5 Aplicaciones de la derivada

En la actualidad el concepto de derivada tiene muchas aplicaciones en distintas ramas de la ingeniería, la física y la propia matemática como una herramienta útil para el desarrollo de nuevas teorías. Una de las interpretaciones básicas de la derivada la podemos encontrar en la geometría en donde nos es de mucha ayuda para identificar figuras e interpretar gráficas.

El valor de la derivada de una función en un punto puede interpretase geométricamente, ya que se corresponde con pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto. La recta tangente es a su vez la gráfica de la mejor aproximación lineal de la función alrededor de dicho punto.

Competencia específica a desarrollar

Aplicar el concepto de la derivada para la solución de problemas de optimización y de variación de funciones y el de diferencial en problemas que requieren de aproximaciones.

Actividades de Aprendizaje

- Utilizar la derivada para calcular la pendiente de rectas tangentes a una curva en puntos dados.
- Aplicar la relación algebraica que existe entre las pendientes de rectas perpendiculares para calcular, a través de la derivada, la pendiente de la recta normal a una curva en un punto.
- Determinar si dos curvas son ortogonales en su punto de intersección.
- Aplicar el teorema de Rolle en funciones definidas en un cierto intervalo y explicar su interpretación geométrica.
- Aplicar el teorema del valor medio del cálculo diferencial en funciones definidas en un cierto intervalo y explicar su interpretación geométrica.
- Determinar, a través de la derivada, cuándo una función es creciente o decreciente en un intervalo.
- Obtener los puntos críticos de una función.
- Explicar los conceptos de punto máximo, mínimo o punto de inflexión de una función.

- Determinar cuándo un punto crítico es un máximo, mínimo o un punto de inflexión (criterio de la primera derivada).
- Explicar la diferencia entre máximos y mínimos relativos con los máximos y mínimos absolutos de una función en un intervalo.
- Mostrar la importancia del teorema de Rolle para la existencia de un máximo o de un mínimo en un intervalo.

5.1 Recta tangente y normal a una curva

5.1.1 Recta tangente

Recordemos de la geometría analítica que una vez conocida la pendiente de una recta podemos encontrar su ecuación que pasa por un punto. A ésta se le conoce como **ecuación punto-pendiente** y está dada por:

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

donde m representa la pendiente de la línea recta y (x_1, y_1) un punto por donde pasa.
En la sección 4.3, vimos que se puede obtener la pendiente de la línea recta en cualquier punto de una curva con el simple hecho de calcular su derivada.
Así usando la ecuación anterior y la definición geométrica de la derivada podemos definir

Proposición 5.1

La **ecuación de la recta tangente** a cualquier curva descrita por una función $f(x)$ en un punto arbitrario (x_1, y_1) se obtiene mediante la fórmula

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1),$$

Ejemplo 5.1

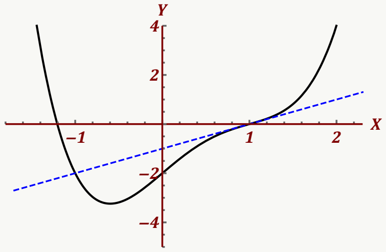
Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 2$ para $x = 1$.

Solución .
En primer lugar evaluamos $x = 1$ en la función para obtener $f(1) = (1)^4 - 2(1)^3 + 3(1) - 2 = 1 - 2 + 3 - 2 = 0$, así sabemos que la recta tangente que vamos a obtener toca a la curva $f(x)$ en el punto $(1, 0)$.
Enseguida calculamos la derivada, es decir $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3$ y la evaluamos en el punto $x = 1$,

$$f'(1) = 4(1)^3 - 6(1)^2 + 3 = 4 - 6 + 3 = 1,$$

finalmente la ecuación de la recta tangente es

$$y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 1.$$



Ejemplo 5.2

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \dfrac{3x-2}{x^2+1}$ en $x = 1$.

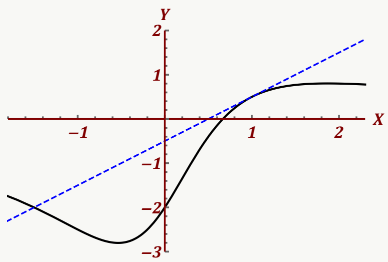
Solución .
En primer lugar evaluamos $x = 1$ en la función para obtener $f(1) = \dfrac{3(1)-2}{(1)^2+1} = \dfrac{1}{2}$, así la recta tangente que vamos a obtener tocará a la curva $f(x)$ en el punto $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.

Enseguida calculamos la derivada, es decir $f'(x) = \frac{-3x^2+4x+3}{(x^2+1)^2}$ y la evaluamos en el punto $x = 1$,

$$f'(1) = \frac{-3(1)^2+4(1)+3}{\left((1)^2+1\right)^2} = \frac{4}{4} = 1,$$

finalmente la ecuación de la recta tangente es

$$y - \frac{1}{2} = 1(x-1) \Rightarrow y = x - \frac{1}{2}.$$



5.1.2 Recta normal

Otra línea recta que nos interesa conocer, es aquella que resulta perpendicular a la *recta tangente*, esta ecuación la conocemos como **recta normal** a la curva y la definimos mediante la fórmula

$$y - y_1 = m_n(x - x_1)$$

Como sabemos que el producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares es igual a -1, podemos definir

Definición 5.1 **Pendiente de una recta Normal**

La pendiente de la *recta normal* (m_n) a una curva en un punto dado x_1 es el negativo de la inversa multiplicativa de la pendiente de la recta tangente en dicho punto, es decir

$$m_n = -\frac{1}{m_t}$$

donde m_t es la pendiente de la recta tangente.

Así usando la ecuación de la recta normal, la definición anterior y la derivada geométrica podemos definir

Proposición 5.2

La **ecuación de la recta normal** a cualquier curva descrita por una función $f(x)$ en un punto arbitrario (x_1, y_1) se obtiene mediante la fórmula

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1),$$

Ejemplo 5.3

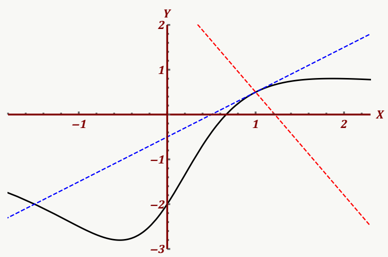
Encuentre la ecuación de la recta tangente y normal a la curva $f(x) = \dfrac{3x-2}{x^2+1}$ en $x = 1$.

Solución .
En primer lugar evaluamos $x = 1$ en la función para obtener $f(1) = \dfrac{1}{2}$, así las rectas tangente y normal tocarán a la curva $f(x)$ en el punto $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.
Enseguida calculamos la derivada, es decir $f'(x) = \frac{-3x^2+4x+3}{(x^2+1)^2}$ y al evaluarla en $x = 1$, obtenemos $f'(1) = 1$, finalmente la ecuación de la recta tangente es

$$y - \frac{1}{2} = 1(x-1) \Rightarrow y = x - \frac{1}{2}.$$

y de la recta normal

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{1}(x-1) \Rightarrow y = \frac{3}{2} - x.$$



5.2 Teoremas fundamentales del cálculo diferencial

5.2.1 Teorema de Rolle

Suponga que tenemos una función $y = f(x)$, continua y diferenciable sobre un intervalo cerrado $[a,b]$ y que $f(a) = f(b)$, es decir se encuentran a la misma altura sobre los puntos a, b respectivamente, entonces el siguiente resultado nos dice que siempre es posible encontrar una recta tangente horizontal a la curva en un punto $x = c$ dentro del intervalo (a,b).

Teorema 5.1 (Teorema de Rolle)

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y es derivable sobre (a,b), además cumple que $f(a) = f(b)$ entonces, existe al menos un número c perteneciente al intervalo (a,b) tal que $f'(c) = 0$.

Demostración .
Si f es constante es claro que $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$. Supongamos que la función $f(x)$ es creciente en el punto $x = a$ y notemos que por continuidad ésta no puede ser absolutamente creciente cuando x recorre desde a hasta b, puesto que $f(a) = f(b)$, es decir existe un punto c en el cual $f(c-h) \le f(c)$ y $f(c+h) \ge f(c)$, pero estas desigualdades significan que

$$\frac{f(c+(-h)) - f(c)}{h} \le 0 \quad \text{y también} \quad \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \ge 0$$

Al aplicar el límite cuando $h \to 0$, las dos ecuaciones son iguales pues nos estamos acercando por la derecha y por la izquierda

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+(-h)) - f(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = 0$$

por lo tanto $f'(c) = 0$.

Geométricamente podemos apreciar que debe existir un valor c, entre a y b en el cual la recta tangente a la curva en $f(c)$ es horizontal.

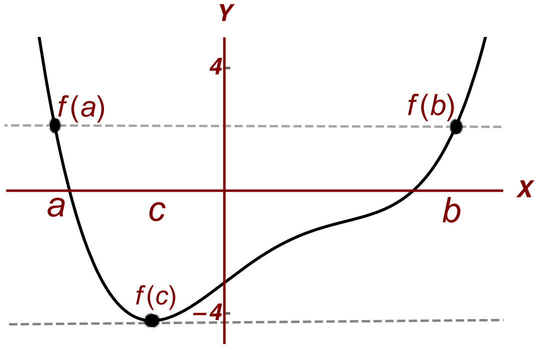


Figura 5.1. Teorema de Rolle

Notemos que puede haber más de una recta horizontal tangente a la curva dentro del intervalo continuo, para encontrarla derivamos la función e igualamos a cero, después despejamos la variable.

Ejemplo 5.4

Dada la función $f(x)=x^3-3x+1$, encontrar los puntos donde $f'(x)=0$ dentro del intervalo $(-1.87,1.53)$.

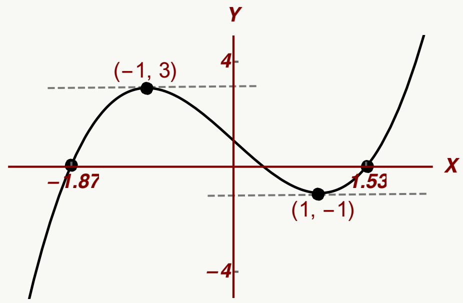
Solución .

Como $f(x)$ es continua en (a,b) y diferenciable, por el teorema de Rolle, existe al menos un punto c tal que $f'(c)=0$.

Para encontrarlo derivamos $f'(x) = 3x^2-3$, igualamos a cero y despejamos x

$$3x^2-3=0 \quad\Rightarrow\quad x=1,-1$$

ambos quedan dentro de nuestro intervalo, por lo que al sustituir estos valores de x en la función $f(x)$ obtenemos los puntos $(1,-1)$ y $(-1,3)$, donde se encuentran las tangentes horizontales

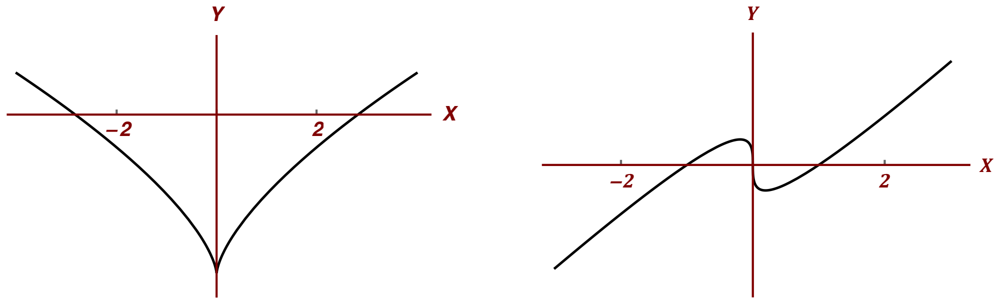


Aún si no se cumplen todas las condiciones del teorema, posiblemente podremos encontrar rectas horizontales dentro del intervalo pedido, esto nos dice que el teorema es necesario pero no suficiente.

Las funciones $f(x)=x^{2/3}-2$ y $g(x)=x-x^{1/3}$ son continuas en el intervalo $[-2,2]$ pero no son derivables en $x=0$ sin embargo en una de ellas si podemos encontrar incluso dos rectas tangentes horizontales a la curva en este intervalo, como se puede apreciar en las gráficas.

5.2.2 Teorema del valor medio

Una generalización del *teorema de Rolle* es el *teorema de valor medio* (o teorema de Lagrange), el cual nos dice que no necesariamente deben ser horizontales las rectas punteadas que se



(a) $f(x) = x^{2/3} - 2$ (b) $g(x) = x - x^{1/3}$

Figura 5.2. Funciones no diferenciables en $x = 0$

aprecian en la figura del *teorema de Rolle*.
Este teorema establece que cuando una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en su interior, entonces debe haber por lo menos un punto sobre la gráfica donde la pendiente de la recta tangente es la misma que la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. La palabra medio se refiere aquí a un promedio; es decir, al valor de la derivada en algún punto es el mismo que la razón de cambio media de la función sobre el intervalo.

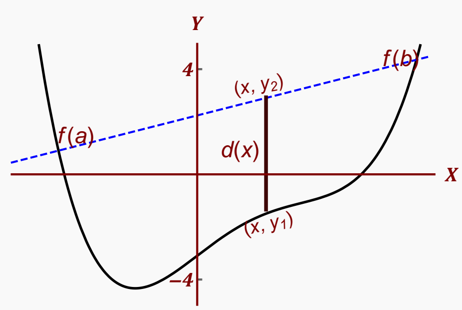
Teorema 5.2 (Teorema del valor medio)

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b) entonces existe al menos algún punto c en el intervalo (a, b) tal que la tangente a la curva en c es paralela a la recta secante que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Es decir:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demostración .
Consideremos la función $d(x)$ como la distancia vertical entre un punto sobre la gráfica de $y = f(x)$ y la recta secante que pasa por $(a, f(a)) y (b, f(b))$, como se muestra en la figura.
Puesto que la ecuación de la recta secante es

$$y - f(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b)$$



y de la propia figura podemos observar que $d(x) = y_2 - y_1$, es decir

$$d(x) = f(x) - \left[f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) \right]$$

con derivada

$$d'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y como $d(a) = d(b) = 0$ por el teorema de Rolle, existe un punto c en (a, b) tal que $d'(c) = 0$, por lo que concluimos que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

de acuerdo a este teorema geométricamente, siempre es posible encontrar al menos una recta paralela a la recta secante, como se ve en la siguiente figura:

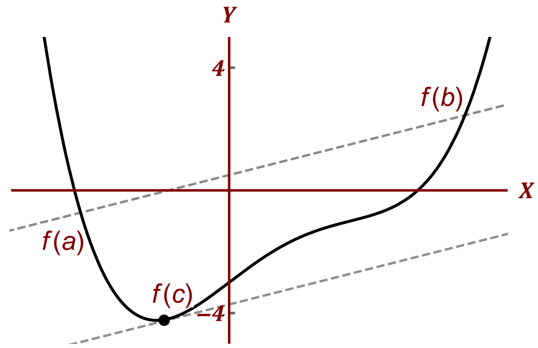


Figura 5.3. Teorema del valor medio

El teorema del valor medio nos garantiza que existe este punto $x = c$ de tal forma que las rectas son paralelas, pero no nos dice como obtener ese valor de x, por lo que debemos recurrir a nuestra destreza matemática para encontrarlo.

Ejemplo 5.5

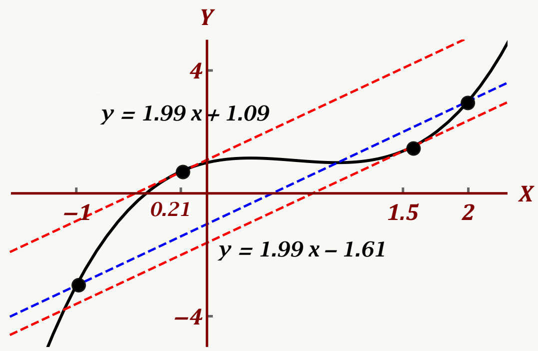
Dada la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$, indicar si contiene una recta paralela a la secante formada por los puntos $(-1,-3)$ y $(2,3)$, si la respuesta es afirmativa, dar la ecuación de dicha recta.

Solución .
El intervalo sobre el eje X, que se nos pide es $[-1,2]$, ahí $f(x)$ es continua y derivable en su interior, por lo que cumple con el teorema del valor medio y por lo tanto debe existir un punto $c \in (-1,2)$ tal que la recta tangente a la curva en $f(c)$ es paralela a la recta pedida.
Para encontrarlo derivamos $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ por otro lado sustituimos en la ecuación del teorema del valor medio, para obtener

$$3c^2 - 4c + 1 = \frac{3+3}{2+1} \quad \Rightarrow 3c^2 - 4c + 1 = 2$$

Resolviendo esta última ecuación

$$c_1 = -0.215 \quad \text{y} \quad c_2 = 1.548$$



es decir tenemos dos rectas paralelas a la secante y tangentes a la curva en los puntos $(-0.125, 0.841)$ y $(1.548, 1.464)$ cuyas ecuaciones son

$$y - 0.841 = 1.99(x + 0.125) \quad \Rightarrow y = 1.99x + 1.09$$

y también

$$y - 1.464 = 1.99(x - 1.548) \quad \Rightarrow y = 1.99x - 1.61$$

5.3 Máximos y mínimos de una función

5.3.1 Introducción

Ahora abordaremos el problema de encontrar los valores máximo y mínimo de una función $f(x)$ sobre un intervalo I. La importancia de encontrar estos valores en caso de haberlos es que nos facilitan enormemente trazar la gráfica correspondiente a la función. Al encontrar estos máximos y/o mínimos de una función también es posible resolver ciertos tipos de problemas de optimización.

En esta sección establecemos algunas definiciones importantes y mostramos como se puede encontrar los valores máximo y mínimo de una función $f(x)$ que es continua sobre un intervalo cerrado I.

Definición 5.2 **Máximos y mínimos locales**

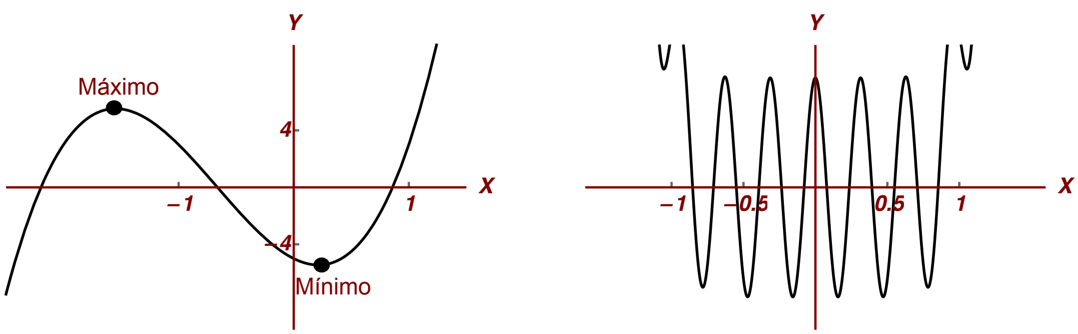
Dada una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua y diferenciable en un intervalo I, decimos que:

- Un número $f(x_1)$ es un **máximo local** de una función si $f(x) < f(x_1)$ para toda $x \in (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon)$
- Un número $f(x_1)$ es un **mínimo local** de una función si $f(x) > f(x_1)$ para toda $x \in (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon)$

Observación

Es importante que el valor de ϵ en la definición sea bastante pequeño, de lo contrario podemos tener errores en nuestro cálculo de los valores máximos o mínimos locales.

Como podemos apreciar en las siguientes gráficas, una función puede tener muchos valores máximos y mínimos.



(a) Interpretación geométrica del máximo y/o mínimo local

(b) Figura con varios máximos y mínimos locales

Figura 5.4. Máximos y mínimos de una función

Si en la figura (a) asignamos $x_1 = 0.2$ y consideramos un $\epsilon = 1$, se cumple la definición y estaríamos garantizando el tener un valor mínimo en x_1, sin embargo en la segunda gráfica (b) seguimos considerando $\epsilon = 1$ de acuerdo a la definición no hay máximos ni mínimos, lo cual es un error pues en la figura se observan varios de ellos.

Definición 5.3 **Valor crítico de una función**

Dada una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua y diferenciable en un intervalo I, decimos que un número x_1 es un **valor crítico** de la función, si $f'(x_1)=0$.

Estamos listos ahora para calcular los valores máximos y mínimos de una función.

5.3.2 Criterio de la primera derivada

Para localizar e identificar un punto máximo o mínimo mediante la manipulación de la primera derivada, debemos realizar los siguientes pasos:

Criterio de la primera derivada

P.1) Realizar la primera derivada, igualar a cero y despejar la variable para obtener los valores críticos, $x_1, x_2 \ldots$.

P.2) Para cada valor x_i, se resta y se suma un valor bastante pequeño para obtener los valores $x_i-\epsilon, x_i+\epsilon$ y se evalúan en la función derivada.

P.3) Si al evaluar primero en $x_i-\epsilon$ y luego en $x_i+\epsilon$ hay un cambio de signo de:

a) Positivo a negativo, entonces el *valor crítico corresponde a un máximo*.

b) Negativo a positivo, entonces el *valor crítico corresponde a un mínimo*.

c) Si no hay cambio de signo, entonces *no es ni máximo, ni mínimo*.

P.4) Para obtener el valor máximo o mínimo, se evaluá el valor crítico correspondiente en la función original.

El hecho de encontrar valores máximos, mínimos nos permiten realizar el bosquejo de una gráfica de una manera rápida, pues basta con ubicar en el plano cartesiano los puntos que corresponden a estos valores y hacer que la gráfica pase por cada uno de ellos, considerando la característica que tiene cada uno de ellos.

Ejemplo 5.6

Encontrar los valores máximos y mínimos de la función $f(x)=\dfrac{5x^3-3x^2+2}{x}$ y bosquejar la gráfica con estos datos.

Solución .
Al derivar la función obtenemos $f'(x)-\dfrac{2}{x^2}+10x-3$ igualando a cero y simplificando

$$-\frac{2}{x^2}+10x-3=0 \quad\Rightarrow\quad 10x^3-3x^2-2=0$$

cuya única solución real es $x_0=0.7037$, es decir es nuestro único valor crítico, para saber a que corresponde, consideramos $\epsilon=0.1$ para obtener $x_0-\epsilon=0.6037$ y $x_0+\epsilon=0.8037$, al evaluarlos en la derivada obtenemos

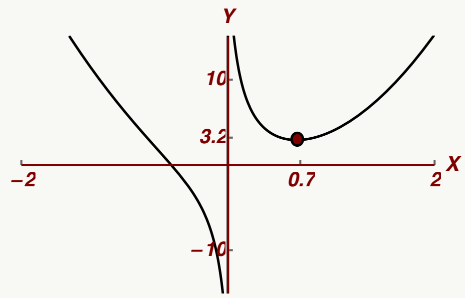
$$f'(0.6037)=-\frac{2}{(0.6037)^2}+10(0.6037)-3=-2.450$$

por otro lado

$$f'(0.8037)=-\frac{2}{(0.8037)^2}+10(0.8037)-3=1.941$$

Como el resultado cambio de negativo a positivo en las evaluaciones, entonces x_0 es un mínimo, para calcular este valor lo sustituimos en la ecuación original

$$f(0.7037) = \frac{5(0.703)^3 - 3(0.703)^2 + 2}{(0.703)} = 3.2$$



Notemos que la gráfica tiene asíntota en $x = 0$, además el único punto crítico (mínimo) es $(0.70, 3.2)$.

Cuando se trata de funciones trigonométricas, debemos considerar todos los posibles valores que hagan cero a la derivada.

Ejemplo 5.7

Encontrar los valores máximos y mínimos de la función $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ en el intervalo $(-3, 3)$ y bosquejar la gráfica con estos datos.

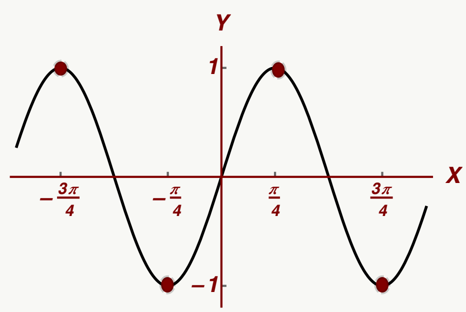
Solución .
Al igualar a cero $f'(x) = 2\cos(2x) = 0$ podemos observar que $x_1 = -\frac{3\pi}{4}$, $x_2 = -\frac{\pi}{4}$, $x_3 = \frac{\pi}{4}$ y $x_4 = \frac{3\pi}{4}$ son solución dentro del intervalo $(-3, 3)$. Consideramos $\epsilon = 0.5$ y evaluamos en la derivada alrededor de cada punto

1. Para x_1: $f'\left(-\frac{3\pi}{4} - 0.5\right) = 1.68$ y $f'\left(-\frac{3\pi}{4} + 0.5\right) = -1.68$, es un **máximo**.
2. Para x_2: $f'\left(-\frac{\pi}{4} - 0.5\right) = -1.68$ y $f'\left(-\frac{\pi}{4} + 0.5\right) = 1.68$, es un **mínimo**.
3. Para x_3: $f'\left(\frac{\pi}{4} - 0.5\right) = 1.68$ y $f'\left(\frac{\pi}{4} + 0.5\right) = -1.68$, es un **máximo**.
4. Para x_4: $f'\left(\frac{3\pi}{4} - 0.5\right) = -1.68$ y $f'\left(\frac{3\pi}{4} + 0.5\right) = 1.68$, es un **mínimo**.

Al evaluar cada punto crítico en la función original tenemos los valores máximos o mínimos,

$$f\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 1, \quad f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1.$$



5.3.3 Criterio de la segunda derivada

En lo que sigue el objetivo será relacionar el concepto de *concavidad* con la segunda derivada de una función. Así, la segunda derivada constituye otra manera para probar si un valor crítico de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ corresponde a un valor máximo o mínimo.

A fin de lograr una buena interpretación geométrica de una función, debemos considerar las siguientes definiciones.

Una curva se dice que tiene **concavidad hacia abajo** si es posible acomodar parte de una circunferencia por abajo de la gráfica de tal forma que sea tangente a la gráfica, y será **cóncava hacia arriba** si la circunferencia se acomoda en la parte superior, no obstante, la definición precisa de concavidad se proporciona en términos de la derivada.

Definición 5.4 **Tipo de concavidad en la gráfica de una función**

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función diferenciable sobre un intervalo (a,b).

1. Si $f'(x)$ es una función creciente sobre (a,b), entonces la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia arriba sobre el intervalo.

2. Si $f'(x)$ es una función decreciente sobre (a,b), entonces la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia abajo sobre el intervalo.

Existe un punto especial que divide la concavidad de una curva, hacia arriba o hacia abajo, este punto lo describimos en la siguiente definición.

Definición 5.5 **Punto de inflexión**

Dada una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua y diferenciable en un intervalo I, decimos que un punto (x_1,y_1) es un **punto de inflexión** de la gráfica de $f(x)$ si en ese punto hay una recta tangente y la gráfica cambia de concavidad.

La siguiente figura muestra el punto donde la gráfica cambia de concavidad.

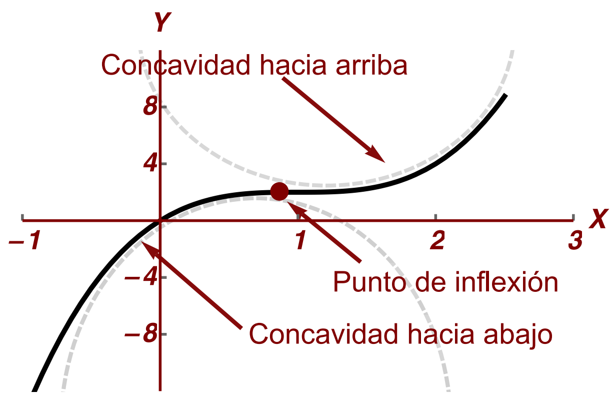


Figura 5.5. Concavidades de una función

Teorema 5.3

Si $(x_1,f(x_1))$ es un *punto de inflexión* para la gráfica de una función $f(x)$, entonces $f''(x_1)=0$ o $f''(x_1)$ no existe.

El inverso de este teorema no es cierto, es decir el hecho de que $f''(x_1)=0$ no implica que x_1 sea un punto de inflexión.

Para encontrar los valores máximos y mínimos de una función $f(x)$ podemos proceder usando la segunda derivada de la siguiente manera:

Criterio de la segunda derivada

P.1) Realizar la primera derivada, igualar a cero y despejar la variable para obtener los valores críticos, $x_1, x_2 \ldots$.

P.2) Calcular la segunda derivada y evaluarla en cada uno de los valores críticos, considerando que:

- Si $f''(x_i) < 0$, implica que x_i corresponde a un **valor máximo**.
- Si $f''(x_i) > 0$ implica que x_i corresponde a un **valor mínimo**.
- Si $f''(x_i) = 0$ o no existe, debemos emplear el criterio de la primera derivada.

P.3) Para obtener el valor máximo o mínimo de la función, se evaluá el valor crítico correspondiente en la función original.

Ejemplo 5.8

Encontrar los valores máximos y/o mínimos de la función $f(x) = 2x^4 - 5$.

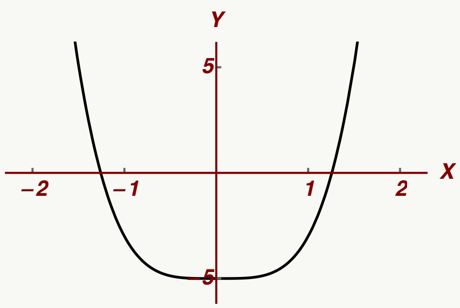
Solución .

Al derivar obtenemos $f'(x) = 8x^3$, igualando a cero observamos que el único punto crítico es $x = 0$, enseguida derivamos nuevamente para tener $f''(x) = 24x^2$, al evaluar el punto crítico en la segunda derivada $f''(0) = 0$, en este caso este criterio no nos da un resultado por lo que recurrimos al criterio de la primera derivada.

Para esto, consideramos $\epsilon = 0.1$, y evaluamos:

$$f'(-0.1) = -0.008 \quad \text{y} \quad f'(0.1) = 0.008$$

es decir, cambia de negativo a positivo por lo que se trata de un *mínimo*, al sustituir en la función original, calculamos este valor mínimo de la función como $f(0) = -5$.



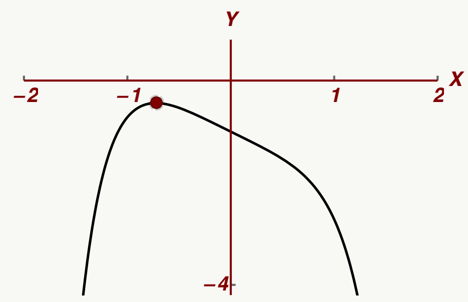
Aún cuando en ocasiones no es posible concluir nada con el criterio de la segunda derivada, este método es muy importante ya que facilita el trabajo en la mayoría de funciones más elaboradas.

Ejemplo 5.9

Encontrar los valores máximos y/o mínimos de función $g(x) = x^2 - x - e^{x^2}$.

Solución .

Al derivar obtenemos $g'(x) = 2x - 1 - 2xe^{x^2}$, con ayuda de métodos numéricos obtenemos el único punto crítico que es $x = -0.724$, enseguida derivamos nuevamente para tener $g''(x) = -4e^{x^2}x^2 - 2e^{x^2} + 2$, y al evaluar el punto crítico en la segunda derivada $g''(-0.724) = -4.928$, es decir, corresponde a un máximo. Finalmente el valor máximo es $g(-0.724) = -0.44$.



Actividad complementaria

Encontrar los valores máximos y/o mínimos de función $g(x) = x^2 - 3x^+ 2x - 1$.

5.4 Diferenciales

En muchas ocasiones nos enfrentamos con problemas en donde debemos calcular el cambio que ocurre en una función $f(x)$ cuando el valor de la variable independiente x pasa de un valor fijo x_1 a x_2, esto se puede hacer si encontramos los valores de $f(x_1)$ y $f(x_2)$ por separado y tomamos la resta de estas dos funciones, como se manejó en la sección de incrementos de la unidad anterior

Por ejemplo, si quisiéramos conocer el volumen del cartón que forma una caja cerrada en forma de cubo con $250mm$, por lado en el interior y $251mm$, de medida exterior. Calculando el volumen exterior e interior obtenemos

$$V_i = (l)(a)(h) = (250)(250)(250) = 15{,}625{,}000mm^3$$

$$V_e = (l)(a)(h) = (251)(251)(251) = 15{,}813{,}251mm^3$$

y al restar $V_e - V_i$ obtenemos que el volumen del cartón es $188{,}251mm^3$.
Podríamos utilizar este procedimiento siempre que nos enfrentemos a situaciones como esta, sin embargo la mayor parte de las veces , es más fácil encontrar un valor bastante aproximado (que normalmente para fines prácticos es suficiente), esto lo podemos hacer usando *diferenciales.*
Supongamos que tenemos una función $y = f(x)$ si calculamos la derivada de esta función tendríamos con la notación de Leibnitz

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Al separar dy y dx, además despejando dy

$$dy = f'(x)dx. \tag{5.1}$$

que nos sirve para aproximar un incremento en la función a partir de el incremento en la variable, más propiamente

Definición 5.6 **Diferencial de una función**

La **diferencial** de una función es igual al producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente, es decir

$$dy = f'(x)dx.$$

Veamos algunos resultados que se obtienen a partir de esta definición.

Proposición 5.3

La diferencial $d(u+v-w) = du + dv - dw$.

Demostración .

De acuerdo a la fórmula de una suma de derivadas tenemos

$$\frac{d(u+v-w)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

por lo tanto, lo único que hay que hacer es multiplicar por dx ambos lados de la igualdad

$$d(u+v-w) = du + dv - dw.$$

Proposición 5.4

La diferencial $d(uv) = u\,dv + v\,du$.

Demostración .

De acuerdo a la fórmula de multiplicación de funciones en la derivada, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx}$$

por lo tanto, lo único que hay que hacer es multiplicar por dx ambos lados de la igualdad

$$dy = u(x)dv + v(x)du.$$

Enseguida mostramos una tabla de fórmulas diferenciales, notemos que son prácticamente las mismas que para derivadas, sólo que ahora separamos la razón $\frac{dy}{dx}$.

Fórmulas de diferenciales

Sean $u(x), v(x), w(x)$ funciones de x y a, c constantes.

P.1) $d(c) = 0.$

P.2) $d(x) = dx.$

P.3) $d(cu) = cd(u).$

P.4) $d(u+v-w) = du+dv-dw.$

P.5) $d(uv) = udv+vdu.$

P.6) $d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu-udv}{v^2}.$

P.7) $d(\frac{u}{c}) = \frac{du}{c}.$

P.8) $d(x^n) = nx^{n-1}dx.$

P.9) $d(u^n) = nu^{n-1}du.$

P.10) $d(\ln u) = \frac{du}{u}.$

P.11) $d(a^u) = a^u \ln a du.$

P.12) $d(e^u) = e^u du.$

P.13) $d(v^u) = uv^{u-1}dv + v^u \ln v du.$

P.14) $d(\sin u) = \cos u\, du$

P.15) $d(\cos u) = -\sin u\, du$

P.16) $d(\tan u) = sec^2 u\, du$

Ejemplo 5.10

Encontrar la diferencial dy de la función $y = 3x^2 - 5x$.

Solución .
Usando las fórmulas **P.4, P.3** y **P.8** respectivamente, tenemos $dy = d(3x^2 - 5x) = d(3x^2) - d(5x) = 3d(x^2) - 5d(x) = 3(2xdx) - 5dx = (6x-5)dx$.

Ejemplo 5.11

Encontrar la diferencial dy de la función $y = 8x^3 cosx$.

Solución .
Consideramos y cómo un producto de funciones con $u(x) = cosx$, y $v(x) = 8x^3$, y usamos la fórmula $dy = u\,dv + v\,du$ para obtener

$$dy = (\cos x)(24x^2 dx) + (8x^3)(-\operatorname{sen} x\, dx) = 8(3x^2 \cos x - x^3 \operatorname{sen} x)dx.$$

Para calcular una diferencial se puede realizar primero la derivada $\frac{dy}{dx}$ de forma normal y al final pasar multiplicando dx.

Ejemplo 5.12

Dada la función $v(x) = (x^3 + 3x - 2)^3$, encontrar su diferencial dv.

Solución .
Derivamos de forma normal la función

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 + 3x - 2)^3 = 3(x^3 + 3x - 2)^2(3x^2 + 3)$$

finalmente multiplicamos toda la ecuación por dx para obtener

$$dv = 3(x^3 + 3x - 2)^2(3x^2 + 3)dx.$$

La operación de hallar diferenciales se llama *diferenciación.*

Actividad complementaria

Calcula la diferencial de las siguientes funciones:

(a) $y = 3x^2 - 9x^3 + 7$

(b) $g = 3\cos^2 x - 5x^4$

(c) $f = \tan x - 2(x-1)^4$

(d) $h = \sqrt{x-2}$

En el caso de funciones implícitas, la diferencial se calcula de forma más simple que para derivadas, aquí sólo hay que diferencial de forma natural cada variable y despejar la diferencial pedida.

Ejemplo 5.13

Dada la función implícita $x^2 + y^2 = a^2$, encontrar dy.

Solución .
Calculamos la diferencial de cada uno de los términos en la ecuación,

$$d(x^2) + d(y^2) = d(a^2) \quad \Rightarrow \quad 2x\,dx + 2y\,dy = 0$$

y despejando dy, tenemos

$$2ydy = -2xdx \quad \Rightarrow \quad dy = -\frac{xdx}{y}.$$

5.4.1 Cálculo de aproximaciones usando la diferencial.

En esta parte mostraremos algunos ejemplos de la aplicación de diferenciales en problemas prácticos. Para comenzar resolvamos el ejemplo de la caja de cartón propuesto al inicio de esta sección por medio de diferenciales.

Ejemplo 5.14

Encontrar el volumen del cartón que forma una caja cerrada en forma de cubo con $250mm$, por lado en el interior y $251mm$, de medida exterior.

Solución .
El lado interior L del cubo según se definió es de $250mm$ y tomamos como la diferencial el grosor del cartón, es decir $dL = 1mm$. Ahora el volumen de la caja de cartón cerrada en forma de cubo se calcula con la fórmula

$$V = L^3 \quad \text{cuya diferencial es} \quad dV = 3L^2 dL$$

sustituyendo, obtenemos el volumen del cartón como

$$dV = 3(250)^2(1) = 187500mm^3.$$

Si comparamos con el resultado exacto que obtuvimos al principio de $188,251mm^3$, vemos que la diferencia entre ambos resultados es muy pequeña comparada con el valor obtenido.

En este ejemplo se tomó $dL = 1mm$, que representa el grosor del cartón pero si se trabaja con materiales más delgados el error se reduce considerablemente.

Ejemplo 5.15

Calcular el incremento del área del cuadrado de 2 m de lado, cuando aumentamos 1mm su lado.

Solución .
En este caso tenemos que $L = 2m$ y la diferencial $0.001m$, además la fórmula para calcular el área de un cuadrado es

$$A = L^2$$

si derivamos obtenemos

$$dA = 2L\,dL$$

Sustituyendo

$$dA = 2(2)(0.001) = 0.004m^2$$

es decir inicialmente tiene un área de $4m^2$ y aumenta a $4.004m^2$.

Ejemplo 5.16

Hallar la variación de volumen que experimenta un cubo, de arista 20 cm, cuando ésta aumenta 0.2 cm su longitud.

Solución .
Como datos tenemos que $a = 20cm$ y $da = 0.2cm$, entonces

$$V = a^3 \;\; y \;\; dV = 3a^2 da$$

por lo tanto tenemos que la variación es igual a

$$dV = 3(20)^2(0.2) = 240cm^3$$

Observación

En problemas en donde se nos proporciona más de una variable, lo primero que debemos hacer es relacionar estas variables de manera que sólo tengamos una variable independiente, para esto debemos usar las propiedades matemáticas del propio problema.

Ejemplo 5.17

Un terreno mide el doble de largo que de ancho, cuanto varía su área si se comete al delimitarlo un pequeño error idéntico en ambas magnitudes.

Solución .
Si denotamos como y al largo del terreno y x al ancho, entonces $y = 2x$, de aquí como el área es $A = xy = x(2x) = 2x^2$, al calcular la diferencial tenemos

$$dA = 4x\,dx$$

que nos representa la variación del terreno, y dx sería el error cometido al delimitarlo.

Ejemplo **5.18**

Un fabricante de pelotas de plástico realiza la producción de 200 pelotas de cierto modelo cuya característica de diseño implica un diámetro interior de 30 cm y un espesor de 2 mm. Por motivo de un desajuste en la maquinaria, los encargados de control de calidad afirman que las pelotas han salido con un espesor de 2.3 mm. ¿Cuánto plástico en exceso se ha gastado aproximadamente en la producción?

Solución .
En este caso, ya que podemos considerar que la pelota es un recipiente de "pared delgada", podemos calcular la cantidad de plástico extra empleada por cada pelota como

$$V = \text{espesor(área de la pelota)} = 4\pi(r^3 - r_0^3)/3$$

donde r_0 es el radio interior, r es el radio exterior y dr es la variación, calculando la diferencial respecto a r

$$dV = 4\pi r^2 dr = 4\pi(15.2)^2(0.03) = 87.100cm^3$$

y puesto que se produjeron 200 pelotas tendremos 17420 cm^3, es decir 17.420 lt de plástico excedente, que representa una pérdida considerable.

5.5 Problemas de optimización

Al referirnos a un problema de optimización, debemos entender que éste consiste en maximizar o minimizar una función real que se obtiene a partir de los datos del propio problema y calculando el valor final de la función.
De forma general, la optimización matemática consiste en el descubrimiento de los valores más apropiados para alguna función que modela cierto problema referido.
No existe una forma específica de resolver este tipo de problemas, sin embargo podemos dar un método sugerido de forma que se pueda atacar la mayor cantidad de problemas, el cual podemos resumirlo de la siguiente manera:

Pasos para resolver problemas de optimización

P.1) Identificar y escribir la(s) ecuación(es) correspondiente al problema.

P.2) Mediante el uso de relaciones matemáticas hacer que la ecuación dependa de una sola variable.

P.3) derivar la ecuación con respecto a la variable libre, igualar a cero y resolver para encontrar el punto deseado (máximo o mínimo).

P.4) Sustituir en la ecuación original para conocer este valor máximo o mínimo.

Consideremos los siguientes ejemplos

Ejemplo 5.19

Dividir un número positivo dado a en dos sumandos, de manera que su producto sea el mayor posible.

Solución .
Escribir $a = b + c$ y sea $P = bc$, expresamos P en términos de una sola variable, digamos c entonces de la primera igualdad se tiene $b = a - c$ y sustituyendo $P = (a-c)c = ac - c^2$ derivando esta última expresión tenemos $P'(c) = a - 2c$ e igualando a cero nos dice que $c = a/2$ es un punto crítico. Claramente es un máximo y por lo tanto la división pedida es $a = a/2 + a/2$.

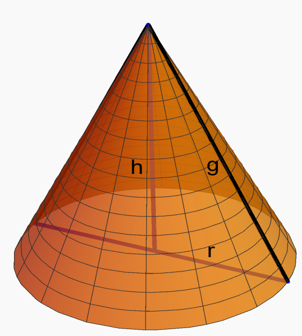
Ejemplo 5.20

Un triángulo isósceles de perímetro 30 cm, gira alrededor de su altura engendrando un cono. ¿Qué valor debe darse a la base para que el volumen del cono sea máximo?

Solución .
Observemos que se quiere obtener el volumen máximo del cono que se forma, por lo que debemos usar la formula $V = \frac{1}{3}\pi r h$ del apéndice A, para encontrarlo.

Para expresar este volumen en términos de una sola variable recordemos que nos dan como dato el perímetro igual a 30cm y de la figura $30 = 2g + 2r$, también $g = \sqrt{h^2 + r^2}$ por lo que al sustituir g en la primera ecuación y despejar h, se obtiene

$$30 = 2\sqrt{h^2 + r^2} + 2r \quad \text{es decir} \quad h = \sqrt{225 - 30r}$$



y sustituyendo en la fórmula para el volumen

$$V = \frac{1}{3}\pi r h = \frac{1}{3}\pi r(\sqrt{225 - 30r})$$

como ya depende de una sola variable, derivamos

$$V'(r) = \pi\left(\frac{75 - 15r}{\sqrt{225 - 30r}}\right)$$

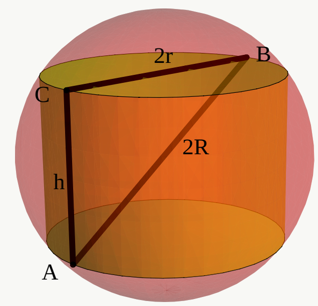
igualando a cero y resolviendo tenemos que $r = 0$ es un mínimo y $r = 5$ corresponde a un valor máximo, por lo que concluimos que el triángulo debe tener base de 10 cm y por lo tanto ser un triángulo equilátero.

Ejemplo 5.21

Inscribir en una esfera dada un cilindro de volumen máximo.

Solución .
Consideremos la esfera de radio R y recordemos que la fórmula para encontrar el volumen de un cilindro es $V = \pi r^2 h$ donde r es el radio del cilindro y h su altura.

Para expresar este volumen en términos de una sola variable consideremos el triángulo rectángulo ABC de la figura, por Pitágoras se tiene que $r = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - h^2}$ y sustituyendo en nuestra fórmula queda



$$V = \pi r^2 h = \pi \frac{4R^2 - h^2}{4} h = \pi R^2 h - \frac{\pi h^3}{4}$$

derivando se obtiene

$$V'(h) = \pi R^2 - \frac{\pi 3h^2}{4}$$

igualando a cero y resolviendo obtenemos el punto critico (máximo) para $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ y finalmente las dimensiones del cilindro

$$\text{altura: } h = \frac{2R}{\sqrt{3}}, \qquad \text{radio: } r = R\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

5.6 Evaluaciones sumativas

5.6.1 Ejercicios

1.• Encontrar los valores máximos y mínimos para las siguientes funciones, así como los puntos de inflexión.

a.• $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2.$
b.• $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5.$
c.• $f(x) = x^2(x-12)^2.$
d.• $h(x) = x(x-1)^2(x-2)^3.$
e.• $g(x) = \frac{x^3}{x^2+3}.$
f.• $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$
g.• $h(y) = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}.$
h.• $g(x) = \frac{16}{x(4-x^2)}$
i.• $g(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2+8}}$
j.• $g(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}$
k.• $f(x) = 2\sin 2x + \sin 4x.$
l.• $f(x) = x - \ln(1+x).$
m.• $f(x) = x \ln x.$
n.• $f(x) = xe^x.$

2.• Resolver los siguientes problemas.

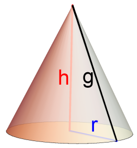
a.• Encontrar las dimensiones en que se debe doblar un trozo de alambre de longitud l, de manera que forme un rectángulo cuya área sea la mayor posible.

b.• ¿Cuál de los triángulos rectángulos de perímetro dado igual a $2p$, tiene mayor área?

c.• Hay que hacer una superficie rectangular cercada por tres de sus lados con tela metálica y colindante por el cuarto con una pared de piedra. ¿Que forma será más conveniente dar a la superficie (para que su área sea mayor), si se dispone en total de l m. lineales de tela metálica?

d.• De una hoja de cartón cuadrada, de lado a hay que hacer una caja rectangular abierta, que tenga la mayor capacidad posible, recortando para ello los cuadrados en las esquinas de la hoja y doblando después los salientes de la figura en forma de cruz así obtenida. ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado que se debe recortar?

e.• Un depósito abierto, de hoja de lata, con fondo cuadrado, debe tener capacidad para m litros. ¿Que dimensiones debe de tener dicho depósito para que en su fabricación se necesite la menor cantidad de hoja de lata?

Cono circular recto cerrado		$\pi r(g+h)$	$\frac{1}{3}A_B\,h.$
g=generatriz	h= altura	A_B= Área de la base	r=radio

A.3 Geometría plana

- **La pendiente de una línea recta que pasa por los puntos** (x_1, y_1) **y** (x_2, y_2) **es:**

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

- **La ecuación de una línea recta:**
  - Que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.
  - Que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m es $y - y_1 = m(x - x_1)$.
  - Que intersepta al eje Y en el punto $(0, b)$ y tiene pendiente m es $y = mx + b$.

- **La ecuación de una parábola:**
  - Con vértice en el punto (h, k) y foco en $(h+p, k)$ es $(y-k)^2 = 4p(x-h)$.
  - Con vértice en el punto (h, k) y foco en $(h, k+p)$ es $(x-h)^2 = 4p(y-k)$.
  - En forma general es $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, donde se debe cumplir que $b^2 - 4ac = 0$ y además los coeficientes a, c no se anulen simultáneamente.

- **La ecuación de una circunferencia:**
  - Con vértice en el punto (h, k) y radio r es $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$.
  - En forma general es $x^2 + bxy + y^2 + dx + ey + f = 0$.

- **El ángulo entre dos rectas en el plano es** $\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$.

- **La distancia entre dos puntos** $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ **y** $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ **está dada por:**

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$