Problemas sobre asíntotas

CURSO	**TEMA**	**WWW.DANIPARTAL.NET**
1ºBach CCSS	Funciones y Límite	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

PROBLEMA 1

Calcula las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\frac{2x-1}{x^2-9}$ **b)** $f(x)=\frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}$ **c)** $f(x)=\frac{2x+5}{3x}$

a) En un cociente de polinomios, los candidatos a asíntotas verticales son los valores que anulan al denominador.

$\lim_{x\to 3^-}\frac{2x-1}{x^2-9}=\frac{5}{0^-}=-\infty$, $\lim_{x\to 3^+}\frac{2x-1}{x^2-9}=\frac{5}{0^+}=+\infty \to$ AV en $x=3$

$\lim_{x\to -3^-}\frac{2x-1}{x^2-9}=\frac{5}{0^+}=+\infty$, $\lim_{x\to -3^+}\frac{2x-1}{x^2-9}=\frac{5}{0^-}=-\infty \to$ AV en $x=-3$

La asíntota horizontal se obtiene estudiando el comportamiento de la función en el infinito. Al ser un cociente de polinomios, la AH en más infinito coincide con la AH en menos infinito.

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x^2-9}=\frac{\infty}{\infty}\to$ Indeterminación

Grado numerador < Grado denominador $\to \lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x^2-9}=0\to y=0$

Al existir asíntota horizontal, no tendremos oblicua. Recuerda: en un cociente de polinomios si el grado del numerador es menor o igual al grado del denominador, tendremos AH pero no AO.

b) Los candidatos a asíntotas verticales aparecen, nuevamente, en los valores que anulan al denominador del cociente de polinomios.

$\lim_{x\to -1^-}\frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=\frac{2}{0^-}=-\infty$, $\lim_{x\to -1^+}\frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=\frac{2}{0^+}=+\infty\to$ AV en $x=-1$

$\lim_{x\to -2^-}\frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=\frac{-13}{0^+}=-\infty$, $\lim_{x\to -2^+}\frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=\frac{-13}{0^-}=+\infty\to$ AV en $x=-2$

La asíntota horizontal se obtiene estudiando el comportamiento de la función en el infinito.

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=\frac{\infty}{\infty}\to$ Indeterminación

Grado numerador > Grado denominador $\to \lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=\infty$

Al no existir asíntota horizontal, estudiamos la oblicua: $y=mx+n$.

$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2+3}{x^3+3x^2+2x}=\frac{\infty}{\infty}\to$ Indeterminación

Grado numerador = Grado denominador $\to m=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2+3}{x^3+3x^2+2x}=\frac{3}{1}=3$

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3 + 2x^2 + 3}{x^2 + 3x + 2} - 3x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{-7x^2 - 6x + 3}{x^2 + 3x + 2} = \frac{-7}{1} = -7$$

Asíntota oblicua $\rightarrow y = 3x - 7$ tanto en más como en menos infinito.

Recuerda: en un cociente de polinomios si el grado del numerador supera en una unidad al grado del denominador, tendremos AO y no tendremos AH.

c) Una vez más, los candidatos a asíntotas verticales aparecen en los valores que anulan al denominador.

$\lim_{x\to 3^-}\frac{2x-1}{x^2-9} = \frac{5}{0^-} = -\infty, \lim_{x\to 0^+}\frac{2x+5}{3x} = \frac{5}{0^+} = +\infty \rightarrow$ AV en $x = 0$

La asíntota horizontal se obtiene estudiando el comportamiento de la función en el infinito.

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5}{3x} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow$ Indeterminación

Grado numerador = Grado denominador $\rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{2x+5}{3x} = \frac{2}{3} \rightarrow y = \frac{2}{3}$

Al existir asíntota horizontal, no tendremos oblicua.

PROBLEMA 2

Calcula la ecuación de las asíntotas de la función $f(x)=\frac{1-2x^2}{x^2-1}$.

El dominio de la función son todos los números reales excepto donde se anula el denominador.

$$D(f)=R-\{-1,1\}$$

Si encontramos límites donde $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$, entonces la recta $x=a$ es una asíntota vertical. Estudiamos los límites laterales alrededor de los puntos donde no está definida la función.

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{1-2x^2}{x^2-1}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{1-2x^2}{x^2-1}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

Tenemos asíntota vertical en $x=-1$.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1-2x^2}{x^2-1}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1-2x^2}{x^2-1}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

Asíntota vertical en $x=1$.

Si encontramos límites donde $\lim_{x\to\infty} f(x)=k$, entonces la recta vertical $y=k$ es una asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-2x^2}{x^2-1}=\frac{-\infty}{\infty}$$

Dividimos por la máxima potencia x^2 y simplificamos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-2x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-2}{1-\frac{1}{x^2}}=(evaluar)=\frac{\frac{1}{\infty}-2}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{0-2}{1-0}=-2$$

Aparece asíntota horizontal $y=-2$ tanto en más como en menos infinito. Al ser un cociente de polinomios la AH en menos infinito coincidirá con el valor de la AH en más infinito.

Al existir asíntota horizontal, no existe asíntota oblicua.

PROBLEMA 3

Sea la función $f(x)=\frac{k}{(x-a)(2x-1)}$. Hallar los parámetros a y k sabiendo que la gráfica pasa por el punto $(0,2)$ y que la recta $x=2$ es una A.V.

Como nos dicen que pasa por el punto $(0,2)$ sustituimos ese punto en la función que nos dan:

$$2=\frac{k}{(0-a)(2\cdot 0-1)}=\frac{k}{-a(-1)}=\frac{k}{a}\rightarrow k=2a$$

Como nos dicen que tiene de asíntota vertical la recta $x=2$, el límite cuando x tiende a 2 nos debe dar infinito para que exista dicha asíntota.

$$\lim_{x\to 2}\frac{k}{(x-a)(2\mathrm{x}-1)}=\infty\rightarrow\lim_{x\to 2}\frac{k}{(2-a)(2\cdot 2-1)}=\infty\rightarrow\frac{k}{3(2-a)}=\infty$$

El denominador debe anularse $\rightarrow 3(2-a)=0\rightarrow a=2$

En consecuencia $\rightarrow k=2a\rightarrow k=4$

PROBLEMA 4

Sea la función $g(x) = \frac{m\,x^3}{(x-n)^2}$. Hallar los parámetros m y n sabiendo que $y = 2x - 4$ es una asíntota de la función.

Si la recta $y = 2x - 4$ es una asíntota oblicua, la convergencia de los dos siguientes límites debe ser:

$pendiente = 2 \rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = m \rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{mx^3}{(x-n)^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{mx^3}{x(x-n)^2}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{mx^3}{x(x^2+n^2-2nx)} = \lim_{x\to\infty} \frac{mx^3}{x^3-2nx^2+n^2x} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow$ Indeterminación

Al ser un cociente de polinomios del mismo grado, el límite en el infinito tiende al cociente de los coeficientes que acompañan a la máxima potencia. Es decir:

$\lim_{x\to\infty} \frac{mx^3}{x^3-2nx^2+n^2x} = \frac{m}{1} = m \rightarrow m = 2$

$ordenada\ en\ el\ origen = -4 \rightarrow \lim_{x\to\infty} (g(x) - 2x) = n$

$\lim_{x\to\infty} (\frac{2x^3}{x^2+n^2-2nx} - 2x) = \lim_{x\to\infty} (\frac{2x^3 - 2x^3 + 4nx^2 - 2n^2x}{x^2+n^2-2nx})$

$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4nx^2-2n^2x}{x^2+n^2-2nx}\right) = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow$ Indeterminación

Nuevamente resolvemos dividiendo los cocientes de los coeficientes que acompañan a las máximas potencias.

$\lim_{x\to\infty} (\frac{4nx^2-2n^2x}{x^2+n^2-2nx}) = \frac{4n}{1} = 4n \rightarrow 4n = -4 \rightarrow n = -1$

La función solución resulta:

$$g(x) = \frac{2x^3}{(x+1)^2}$$

PROBLEMA 5

Estudia las asíntotas de la función $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & si\ x<-1\\ a\,x+b & si\ -1\le x<1\\ \frac{x^2}{x+1} & si\ x\ge 1\end{cases}$ **siendo** a **y** b **números reales.**

¡Ojo! Cada tramo tiene un dominio de definición. Por lo tanto, debemos atenernos a esos dominios.

Por ejemplo. La función $f(x)=\frac{1}{x}$ solo está definida a la izquierda de -1. Por lo tanto, no tiene sentido que estudiemos la A.V. en los alrededores de $x=0$ porque ahí no está definida la función.

Para $f(x)=\frac{1}{x}$ solo tendremos que estudiar la A.H. cuando $x\to-\infty$. No tiene sentido preguntarse por la A.H. en más infinito, porque el tramo de definición es a la izquierda de -1.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0\to$ existe A.H. $y=0$ si $x\to-\infty$ → si existe A.H. no existe A.O.

La función $f(x)=ax+b$ es un polinomio. Los polinomios no poseen asíntotas de ningún tipo.

La función $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$ está definida desde 1 en adelante. Por lo tanto, no tiene sentido estudiar la A.V. en $x=-1$ porque ahí no está definida la función. Solo estudiaremos la A.O. cuando la variable tiende a más infinito.

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x}=\frac{\infty}{\infty}\to$ dividir por la máxima potencia, simplificar y evaluar $\to m=1$

$n=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2}{x+1}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-x}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}\to$ aplicar L'Hôpital

$n=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-1}{1}=-1\to$ existe A.O. $y=x-1$ si $x\to\infty$ → Si hay A.O. no hay A.H.