Problemas – Tema 3

Problemas resueltos - 17 - Teorema fundamental del álgebra

1. Resuelve $x^4+16=0$. Escribe las soluciones en notación polar y relaciona el ejercicio con el Teorema fundamental del álgebra.

El Teorema fundamental del álgebra garantiza que la ecuación polinómica de cuarto grado tendrá cuatro soluciones, ya sean reales y/o complejas.

Si un valor complejo es solución de una ecuación, su conjugado también lo será.

$x^4+16=0 \rightarrow x^4=-16 \rightarrow$ Expresamos -16 como forma polar $\rightarrow$ $-16=(16)_{180^o}$

$x^4=(16)_{180^o} \rightarrow x=\sqrt[4]{(16)_{180^o}}=(\sqrt[4]{16})_{\frac{180^o+360^o\cdot k}{4}}=2_{\frac{180^o+360^o\cdot k}{4}}$, $k=0,1,2,3$

Si $k=0 \rightarrow fase=45^o$

Si $k=1 \rightarrow fase=135^o$

Si $k=2 \rightarrow fase=225^o$

Si $k=3 \rightarrow fase=315^o$

Cada fase con sus correspondientes vueltas de 360º.

Las soluciones para $k=0$ y $k=3$ son conjugadas entre sí. Sus fases suman 360ºº.

Mientras que las soluciones para $k=1$ y $k=2$ también son conjugadas entre sí.

2. Resuelve la ecuación $x^3+x^2+x=0$ y relaciona el resultado con el Teorema Fundamental del Álgebra.

$x^3+x^2+x=0$ → sacamos factor común → $x(x^2+x+1)=0$

Obtenemos una primera solución real: $x=0$.

Por otro lado, nos queda la ecuación de segundo grado: $x^2+x+1=0$ → Resolvemos:

$x=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Obtenemos tres soluciones para nuestra ecuación polinómica de grado tres.

Una solución es real y las otras dos son complejas (siendo una la conjugada de la otra).