Corbes de Bézier

Les **tècniques de Bézier** són un mètode de dibuixar corbes per *aproximació*: **es tria un conjunt de punts de control que governarà la forma de la corba, encara que la corba només passarà pel primer i l'últim dels punts**.

- Inicis: 1960 Bézier (Renault), Casteljau (Citroën)
- Idea feliç: expressar les corbes de Bézier com a **combinació afí dels punts de control**, és a dir, combinació de punts on la suma de coeficients és 1. Es podrà fer amb els polinomis de Bernstein.
- A més, quan vulguem aplicar una afinitat a la corba, només caldrà trobar les imatges dels punts de control!

Polinomis de Bernstein

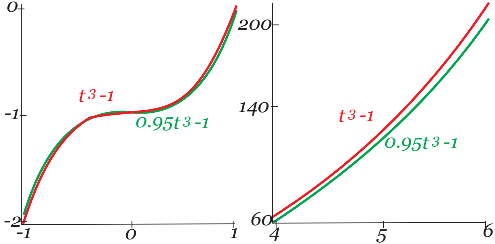
Espai Vectorial dels polinomis

El conjunt de tots els polinomis de grau $\leq n$ és un espai vectorial de dimensió $n+1$. Una base és $\{1, t, \cdots, t^n\}$.

Polinomi de grau n, amb coeficients reals i variable t:

$$a_0 1 + a_1 t + \cdots + a_n t^n, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

- Els coeficients a_i no tenen un significat geomètric global.
- Petits canvis en els a_i fan que el polinomi canviï molt per a valors grans de t.



Polinomis de Bernstein

Una base alternativa: polinomis de Bernstein $\{B_0^n, \cdots, B_n^n\}$.

Com es defineixen?

Vegem un exemple:

Ex. $n = 1 \rightsquigarrow$ Base1: $\{1, t\}$

Base2 (Bernstein): $\{B_0^1 = 1 - t, B_1^1 = t\}$

Polinomi expressat en les dues bases:

$$2\,1 + 3\,t = 2(1 - t) + 5\,t$$

Observa que B_0^1, B_1^1: 1) són coord. baricèntriques $(1 - t) + t = 1$

2) són del mateix grau $((1 - t), t$ grau $n = 1)$

3) són els termes de la potència $((1 - t) + t)^n$ desenvolupant pel binomi de Newton amb $n = 1$

Polinomis de Bernstein

Polinomis de Bernstein

Donat $n \in \mathbb{N}$, el i-èsim polinomi de Bernstein de grau n $(0 \leq i \leq n)$ és

$$B_i^n(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!}(1-t)^{n-i}t^i$$

Són els termes que apareixen en desenvolupar pel binomi de Newton la potència $((1-t)+t)^n = B_0^n(t) + \cdots + B_n^n(t)$

- $n = 1 \rightsquigarrow 1 = ((1-t)+t)^1 = (1-t)+t$
- $n = 2 \rightsquigarrow 1 = ((1-t)+t)^2 = (1-t)^2 + 2(1-t)t + t^2$
- $n = 3 \rightsquigarrow 1 = ((1-t)+t)^3 = (1-t)^3 + 3(1-t)^2t + 3(1-t)t^2 + t^3$

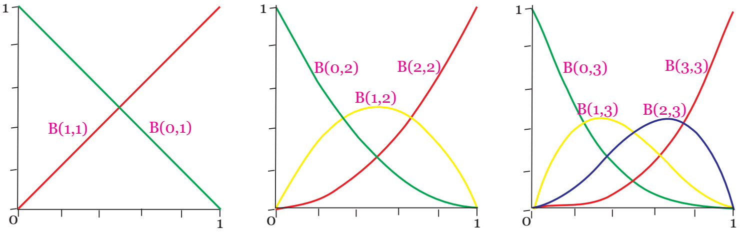
Bases formades per pols. de Bernstein per als conj. de pols. de grau $\leq n$:

$n = 1$: $\{B_0^1 = 1-t,\ B_1^1 = t\}$

$n = 2$: $\{B_0^2 = (1-t)^2,\ B_1^2 = 2(1-t)t,\ B_2^2 = t^2\}$

$n = 3$: $\{B_0^3 = (1-t)^3,\ B_1^3 = 3(1-t)^2t,\ B_2^3 = 3(1-t)t^2,\ B_3^3 = t^3\}$

Polinomis de Bernstein



$$B_0^1 = 1 - t$$
$$B_1^1 = t$$

$$B_0^2 = (1-t)^2$$
$$B_1^2 = 2(1-t)t$$
$$B_2^2 = t^2$$

$$B_0^3 = (1-t)^3$$
$$B_1^3 = 3(1-t)^2 t$$
$$B_2^3 = 3(1-t)t^2$$
$$B_3^3 = t^3$$

Observa que es poden obtenir de forma recursiva:

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) \quad \forall n > 1, \quad \forall t, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

(Els de grau $n > 3$ no ens faran falta)

Polinomis de Bernstein

Propietats dels polinomis de Bernstein:

- Són coord. baricèntriques: $B_0^n(t) + B_1^n(t) + \cdots + B_n^n(t) = 1, \forall n, t$ (generalitzen la interpolació lineal)
- Simetria: $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$ (útil per invertir el sentit de la corba)
- Positivitat: $B_i^n(t) \geq 0 \, \forall n, \forall t \in [0,1]$
- Màxim: $B_i^n(t)$ té un màxim absolut, dins l'interval $[0,1]$, a $t = i/n$.
- Recursió: $B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) \, \forall n > 1, \forall t$ (útil per al càlcul recursiu a partir d'expressions de grau més petit: és la base de l'algoritme de de Casteljau).

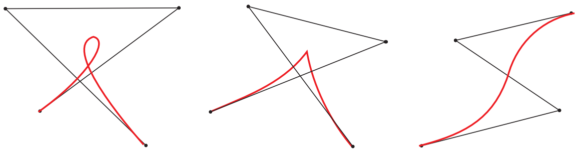
Corbes de Bézier

Corba de Bézier

Donats $n+1$ punts $P_0, \cdots, P_n \in \mathbb{R}^k (k = 2, 3)$, la corba de Bézier que defineixen és la corba parametritzada

$$\boxed{\mathcal{B}(t) := B_0^n(t)P_0 + B_1^n(t)P_1 + \cdots + B_n^n(t)P_n, \quad t \in [0, 1]}$$

on $B_i^n(t)$ són els Polinomis de Bernstein
$P_0, \cdots, P_n$ són els punts de control i, unint-los d'un en un per segments, s'obté el polígon de control; n és el grau de la corba.



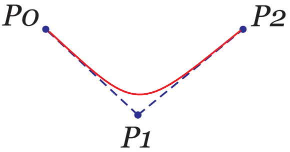
Corbes de Bézier de grau 3 amb els seus polígons de control.
$\mathcal{B}(t) := B_0^3(t)P_0 + B_1^3(t)P_1 + B_2^3(t)P_2 + B_3^3(t)P_3, \quad t \in [0, 1]$

Corbes de Bézier

Troba la corba de Bézier amb punts de control
$P_0 = (-1, 1)$, $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 1)$

Utilitzem els polinomis de Bernstein per a $n = 2$ ($B_0^2(t)$, $B_1^2(t)$, $B_2^2(t)$)

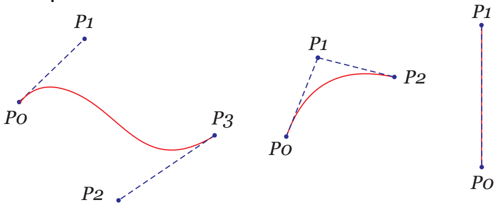
$$\begin{aligned}\mathcal{B}(t) &:= (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2 P_2 = \\ &= (1-t)^2(-1,1) + 2(1-t)t(0,0) + t^2(1,1) = \\ &= (2t-1, 2t^2-2t+1) \quad t \in [0,1]\end{aligned}$$



Corba de Bézier amb el seu polígon de control.

Corbes de Bézier

Observa que les corbes de Bézier són **combinacions afins dels punts de control**. Això fa que la corba es mantingui dintre de l'envolupant convexa d'aquests punts.



Propietats:

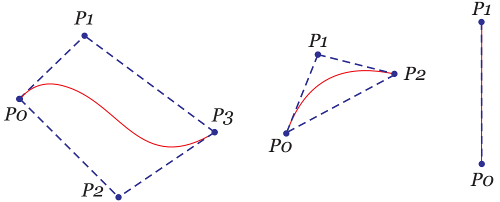
- Invariància afí: Per transformar amb una afinitat f una corba de Bézier, n'hi ha prou amb aplicar l'afinitat als punts de control

  si $\mathcal{B}(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i$, aleshores $f(\mathcal{B}(t)) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) f(P_i)$

- Pas pels extrems: $\mathcal{B}(0) = P_0$, $\mathcal{B}(1) = P_n$

Corbes de Bézier

Observa que les corbes de Bézier són **combinacions afins dels punts de control**. Això fa que la corba es mantingui dintre de l'envolupant convexa d'aquests punts.



Propietats:

- Invariància afí: Per transformar amb una afinitat f una corba de Bézier, n'hi ha prou amb aplicar l'afinitat als punts de control

  si $\mathcal{B}(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i$, aleshores $f(\mathcal{B}(t)) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) f(P_i)$
- Pas pels extrems: $\mathcal{B}(0) = P_0$, $\mathcal{B}(1) = P_n$

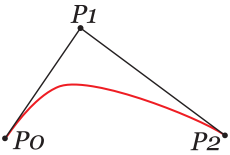
Corbes de Bézier

- Tangència: La corba és tangent, en els seus extrems inicial i final, al primer i al darrer segment del polígon de control, respectivament.

* Corba de grau 2: $\mathcal{B}(t) = (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2 P_2$
  $\mathcal{B}(0) = P_0$ $\mathcal{B}(1) = P_2$

  $\mathcal{B}'(0) = 2(P_1 - P_0)$

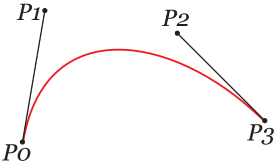
  $\mathcal{B}'(1) = 2(P_2 - P_1)$



* Corba de grau 3:
  $\mathcal{B}(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 tP_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3$
  $\mathcal{B}(0) = P_0$ $\mathcal{B}(1) = P_3$

  $\mathcal{B}'(0) = 3(P_1 - P_0)$

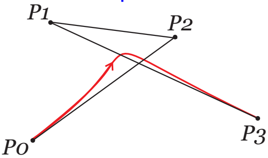
  $\mathcal{B}'(1) = 3(P_3 - P_2)$



Corbes de Bézier

És important l'ordre en què es donen els punts de control .

$\{P_0, P_2, P_1, P_3\}$

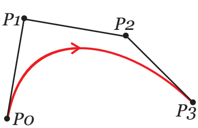


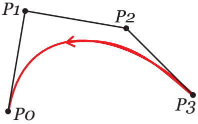
Si es vol canviar el sentit de la corba, n'hi ha prou amb invertir l'ordre:

$$\mathcal{B}(t) := \boxed{\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i}$$

$$\mathcal{B}(1-t) := \sum_{i=0}^{n} B_i^n(1-t) P_i \overset{\text{pàg.16}}{=} \sum_{i=0}^{n} B_{n-i}^n(t) P_i = \boxed{\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_{n-i}}$$

$\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$





$\{P_3, P_2, P_1, P_0\}$

Algoritme de de Casteljau

Però, a partir del punts de control, com es genera la corba?

Algoritme de de Casteljau

És un procediment recursiu per calcular, partint del punts de control, el punt de la corba corresponent a un valor $t \in [0,1]$ del paràmetre.
En cada pas de l'algoritme, es fa una interpolació lineal per a cada parell de punts consecutius obtingut al pas precedent.

$$\textbf{Pas 0}: \; P[i,0] := P_i, \qquad 0 \le i \le n$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

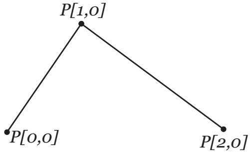
$$\textbf{Pas r}: \; P[i,r] := (1-t)P[i,r-1] + tP[i+1,r-1],$$
$$0 \le i \le n-r, \; 1 \le r \le n-1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\textbf{Pas n}: \; P[0,n] := (1-t)P[0,n-1] + tP[1,n-1] \; = \; \mathcal{B}(t)$$

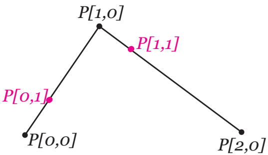
Algoritme de de Casteljau

Construcció d'una corba de grau 2: polígon de control: $\{P_0, P_1, P_2\}$.
$P[0,0] := P_0, P[1,0] := P_1, P[2,0] := P_2$.



Algoritme de de Casteljau

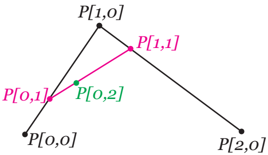
Construcció d'una corba de grau 2: polígon de control: $\{P_0, P_1, P_2\}$.
$P[0,0] := P_0, P[1,0] := P_1, P[2,0] := P_2$.
Fem interpolació lineal en els segments que formen:



$$P[0,1] = (1-t)\,P[0,0] + t\;\,P[1,0]$$
$$P[1,1] = (1-t)\,P[1,0] + t\;\,P[2,0]$$

Algoritme de de Casteljau

Construcció d'una corba de grau 2: polígon de control: $\{P_0, P_1, P_2\}$.
$P[0,0] := P_0, P[1,0] := P_1, P[2,0] := P_2$.
Fem interpolació lineal en els segments que formen:



$$P[0,1] = (1-t)\,P[0,0] + t\;P[1,0]$$

$$P[1,1] = (1-t)\,P[1,0] + t\;P[2,0]$$

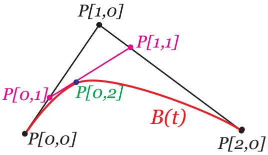
Tornem a fer interpolació lineal:

$$P[0,2] = (1-t)\,P[0,1] + t\,P[1,1] =$$

$$= (1-t)\,((1-t)P[0,0] + tP[1,0]) + t((1-t)P[1,0] + tP[2,0])$$
$$= (1-t)^2 P[0,0] + 2(1-t)tP[1,0] + t^2 P[2,0]$$

Algoritme de de Casteljau

Construcció d'una corba de grau 2: polígon de control $\{P_0, P_1, P_2\}$.
$P[0,0] := P_0, P[1,0] := P_1, P[2,0] := P_2$.
Fem interpolació lineal en els segments que formen:



$$P[0,1] = (1-t)\,P[0,0] + t\;P[1,0]$$

$$P[1,1] = (1-t)\,P[1,0] + t\;P[2,0]$$

Tornem a fer interpolació lineal:

$$P[0,2] = (1-t)\,P[0,1] + t\,P[1,1] =$$

$$= (1-t)\;((1-t)P[0,0] + tP[1,0]) + t((1-t)P[1,0] + tP[2,0])$$

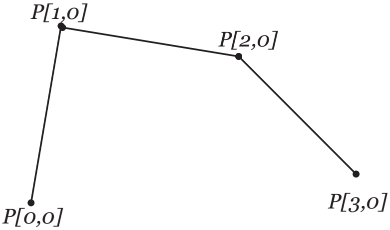
$$= \boxed{(1-t)^2 P[0,0] + 2(1-t)tP[1,0] + t^2 P[2,0] = \mathcal{B}(t)}$$

Hem obtingut l'expressió de la corba de Bézier com a combinació afí dels 3 punts de control, on els coeficients són pols. de Bernstein de grau 2.

Si fixem per al paràmetre t un valor $t_* \in [0,1]$, obtenim un punt de la corba: $P[0,2] = \mathcal{B}(t_*)$.

Algoritme de de Casteljau

Construcció d'una corba de grau 3:
pol. de control $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$



$\boxed{\mathcal{B}(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3}$ $P[i,0] := P_i$

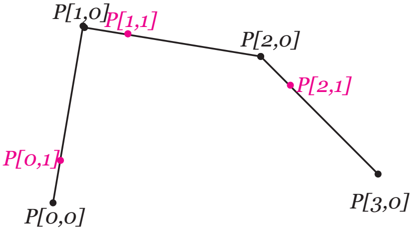
Pas 0	**Pas** 1	**Pas** 2	**Pas** 3
$P[0,0]$			
$P[1,0]$			
$P[2,0]$			
$P[3,0]$			

$\searrow$ producte per $(1-t)$

$\longrightarrow$ producte per t

Algoritme de de Casteljau

Construcció d'una corba de grau 3:
pol. de control $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$



$$\boxed{\mathcal{B}(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t) t^2 P_2 + t^3 P_3} \quad P[i,0] := P_i$$

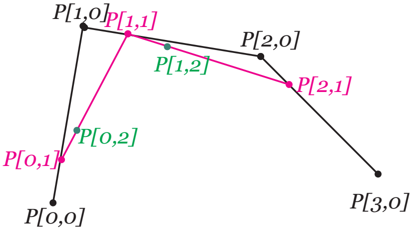
$$\begin{array}{llllll}
\textbf{Pas } 0 & & \textbf{Pas } 1 & \textbf{Pas } 2 & \textbf{Pas } 3 \\
P[0,0] & & & & \\
 & \searrow & & & \\
P[1,0] & \longrightarrow & P[0,1] & & \\
 & \searrow & & & \\
P[2,0] & \longrightarrow & P[1,1] & & \\
 & \searrow & & & \\
P[3,0] & \longrightarrow & P[2,1] & &
\end{array}$$

$\searrow$ producte per $(1-t)$

$\longrightarrow$ producte per t

Algoritme de de Casteljau

Construcció d'una corba de grau 3:
pol. de control $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$



$$\boxed{\mathcal{B}(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t) t^2 P_2 + t^3 P_3} \quad P[i,0] := P_i$$

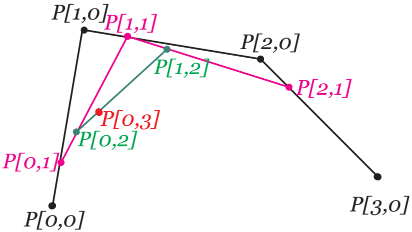
$$\begin{array}{ccccccc}
\textbf{Pas } 0 & & \textbf{Pas } 1 & & \textbf{Pas } 2 & & \textbf{Pas } 3 \\
P[0,0] & & & & & & \\
 & \searrow & & & & & \\
P[1,0] & \longrightarrow & P[0,1] & & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & & \\
P[2,0] & \longrightarrow & P[1,1] & \longrightarrow & P[0,2] & & \\
 & \searrow & & \searrow & & & \\
P[3,0] & \longrightarrow & P[2,1] & \longrightarrow & P[1,2] & &
\end{array}$$

$\searrow$ producte per $(1-t)$

$\longrightarrow$ producte per t

Algoritme de de Casteljau

Construcció d'una corba de grau 3:
pol. de control $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$



$$\boxed{\mathcal{B}(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t) t^2 P_2 + t^3 P_3} \quad P[i,0] := P_i$$

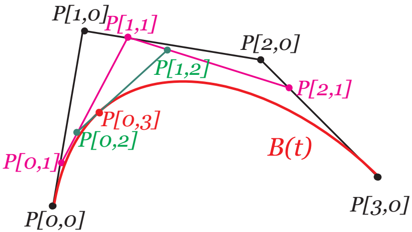
$$\begin{array}{ccccccc}
\textbf{Pas } 0 & & \textbf{Pas } 1 & & \textbf{Pas } 2 & & \textbf{Pas } 3 \\
P[0,0] & & & & & & \\
& \searrow & & & & & \\
P[1,0] & \longrightarrow & P[0,1] & & & & \\
& \searrow & & \searrow & & & \\
P[2,0] & \longrightarrow & P[1,1] & \longrightarrow & P[0,2] & & \\
& \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
P[3,0] & \longrightarrow & P[2,1] & \longrightarrow & P[1,2] & \longrightarrow & P[0,3]
\end{array}$$

$\boxed{\searrow \text{ producte per } (1-t)}$

$\boxed{\longrightarrow \text{ producte per } t}$

Algoritme de de Casteljau

Construcció d'una corba de grau 3:
pol. de control $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$



$$\boxed{\mathcal{B}(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3} \quad P[i,0] := P_i$$

$$\begin{array}{cccccccc}
\textbf{Pas } 0 & & \textbf{Pas } 1 & & \textbf{Pas } 2 & & \textbf{Pas } 3 \\
P[0,0] & & & & & & \\
& \searrow & & & & & \\
P[1,0] & \longrightarrow & P[0,1] & & & & \\
& \searrow & & \searrow & & & \\
P[2,0] & \longrightarrow & P[1,1] & \longrightarrow & P[0,2] & & \\
& \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
P[3,0] & \longrightarrow & P[2,1] & \longrightarrow & P[1,2] & \longrightarrow & P[0,3] = \mathcal{B}(t)
\end{array}$$

$\searrow$ producte per $(1-t)$

$\longrightarrow$ producte per t

Algoritme de de Casteljau

Exemple. Troba la corba de Bézier amb punts de control $P_0 = (-1, 1)$, $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 1)$ (ex. pàg. 18)

Utilitzem l'algoritme de de Casteljau:

$\boxed{\searrow \text{ producte per } (1-t)}$

$\boxed{\longrightarrow \text{ producte per } t}$

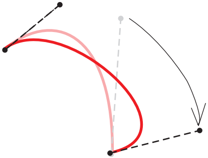
$$\begin{array}{lcccl}
P_0 = (-1,1) & & & & \\
 & \searrow & & & \\
P_1 = (0,0) & \rightarrow & (-1+t, 1-t) & & \\
 & \searrow & & \searrow & \\
P_2 = (1,1) & \rightarrow & (t,t) & \rightarrow & \mathcal{B}(t) = (2t-1, 2t^2-2t+1) \\
 & & & & t \in [0,1]
\end{array}$$

Observa que si fixem d'entrada el valor de t, $t = t_*$, i apliquem l'algoritme de de Casteljau (multiplicant per $1 - t_*$ o t_*), el que tenim és un punt de la corba de Bézier, el punt $\mathcal{B}(t_*)$.

Operacions amb corbes de Bézier

Operacions amb corbes de Bézier de grau n:

1. Canvi d'un punt de control: Si es canvia un dels punts de control, el canvi afecta tota la corba ; però la modificació és més acusada en el tram més proper al punt que es canvia.



2. Càlcul de derivades, en termes dels polinomis de Bernstein o dels punts de l'algoritme de de Casteljau. Serveix per obtenir els vectors velocitat i acceleració:

$$\mathcal{B}'(t) = n\sum_{i=0}^{n-1}(P_{i+1} - P_i)\mathcal{B}_i^{n-1}(t) = n(P[1, n-1] - P[0, n-1])$$

$$\mathcal{B}''(t) = n(n-1)\sum_{i=0}^{n-2}(P_{i+2} - 2P_{i+1} + P_i)\mathcal{B}_i^{n-2}(t) =$$

$$= n(n-1)(P[2, n-2] - 2P[1, n-2] + P[0, n-2])$$

Operacions amb corbes de Bézier

3. Subdivisió. Per a subdividir en trams la corba de Bézier, amb punts de control P_0 , ..., P_n , apliquem primer l'algoritme de Casteljau:

P_0=P[0,0]	P[0,1]	P[0,2]	. . .	P[0,n-1]	P[0,n]
P_1=P[1,0]	P[1,1]	P[1,2]	. . .	P[1,n-1]	
P_2=P[2,0]	P[2,1]	P[2,2]	. . .		
. . .	. . .				
. . .	. . .				
P_{n-1}=P[n-1,0]	P[n-1,1]				
P_n=P[n,0]					

Operacions amb corbes de Bézier

Tram de la corba des de:

$B(0)=P[0,0]$ fins $B(t_0)=P[0,n]$

Algoritme de Casteljau amb punts

Primera fila de l'algoritme original

P[0,0]
P[0,1]
P[0,2]
. . .
. . .
P[0,n-1]
P[0,n]

Tram de la corba des de:

$B(t_0)=P[0,n]$ fins $B(1)=P[n,0]$

Algoritme de Casteljau amb punts

Elements de la diagonal de l'algoritme original (de dalt a baix)

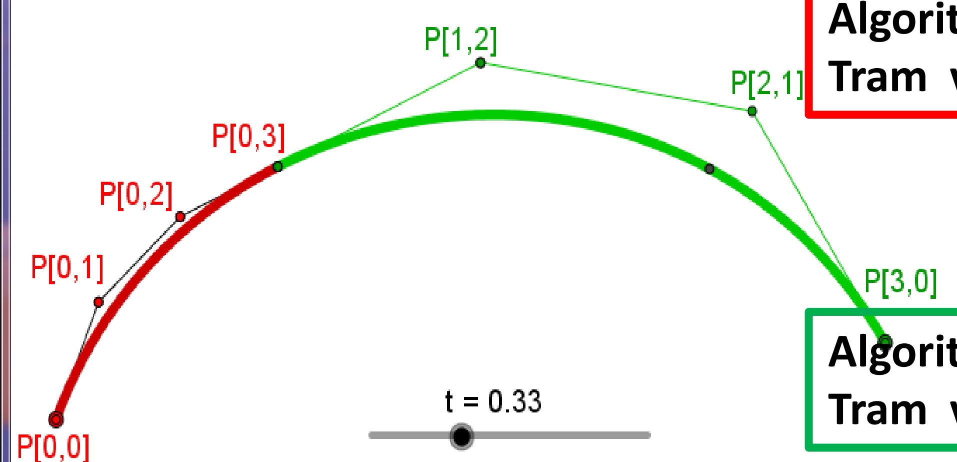
P[0,n]
P[1,n-1]
P[2,n-2]
. . .
. . .
P[n-1,1]
P[n,0]

Operacions amb corbes de Bézier

Fitxer Edita Visualitza Opcions Eines Finestra Ajuda

La finestra gràfica

Exemple: Sub-divisió d'una corba de Bézier de grau n=3



Full de càlcul

Algoritme de la corba senzera

Algoritme del Tram vermell

Algoritme del Tram verd

	A	B	C	D
1	(-2, 0.5)	(-1.69, 1.26)	(-1.1, 1.82)	(-0.4, 2.15)
2	(-1.05, 2.85)	(0.13, 2.98)	(1.07, 2.82)	
3	(2.57, 3.23)	(3.04, 2.51)		
4	(4, 1)			
5				
6	(-2, 0.5)	(-1.8, 1)	(-1.47, 1.42)	(-1.07, 1.74)
7	(-1.69, 1.26)	(-1.3, 1.63)	(-0.86, 1.9)	
8	(-1.1, 1.82)	(-0.64, 2.04)		
9	(-0.4, 2.15)			
10				
11	(-0.4, 2.15)	(0.57, 2.59)	(1.76, 2.61)	(2.73, 2.13)
12	(1.07, 2.82)	(2.37, 2.62)	(3.23, 1.89)	
13	(3.04, 2.51)	(3.67, 1.51)		
14	(4, 1)			
15				
16				
17				

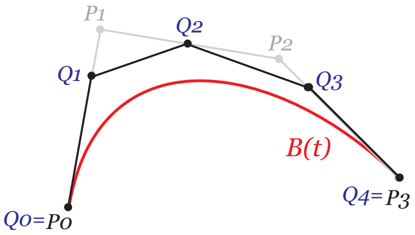
Operacions amb corbes de Bézier

4 Elevació de grau: Serveix per redefinir una corba de grau n com a corba de grau $n+1$. Aquesta té polígon de control $\{Q_0, \cdots, Q_{n+1}\}$, amb

$$Q_0 := P_0,$$

$$Q_i := \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i \quad (1 \leq i \leq n),$$

$$Q_{n+1} := P_n$$



Tipus de continuïtat

Si enganxem una corba de Bézier B_1 amb polígon $P_0, \cdots, P_n$ amb una altre B_2 que té polígon $Q_0, Q_1, \cdots, Q_m$, direm que ho fem amb continuïtat G_i, $0 \leq i \leq 2$:

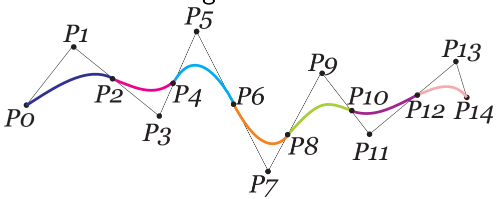
- **Continuïtat** G_0: Cal que $P_n = Q_0$.
- **Continuïtat** G_1: S'han de satisfer les condicions
  1. Continuïtat G_0.
  2. En el punt d'unió $P_n = Q_0$, les rectes tangents coincideixen $\Leftrightarrow$ P_{n-1}, P_n i Q_1 estàn alineats.
- **Continuïtat** G_2: S'han de satisfer les condicions
  1. Continuïtat G_1.
  2. En el punt d'unió $P_n = Q_0$, els cercles osculadors coincideixen $\Leftrightarrow$ les curvatures coincideixen en el punt d'unió.
     És suficient que

$$Q_2 = \frac{\alpha^2 n(n-1)(P_n - 2P_{n-1} + P_{n-2})}{m(m-1)} - P_n + 2Q_1 \,,$$

on $\alpha = \dfrac{m}{n} \dfrac{||\overrightarrow{Q_0Q_1}||}{||\overrightarrow{P_{n-1}P_n}||}$.

Corbes de Bézier i continuïtat geomètrica

Unió G^1 de corbes de Bézier de grau 2



Unió G^1 de corbes de Bézier de grau 3