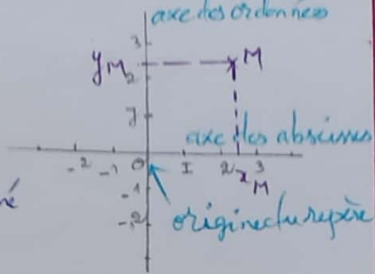
Chapitre ③ : Le repère dans le plan

Les coordonnées d'un point

Repère orthonormé du plan

On a : $(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ = 1$

- le repère (O, I, J) s'appelle repère orthonormé
- On dit que le plan est rapporté à un repère orthonormé
- le point O s'appelle l'origine du repère
- La droite (OI) est appelée : l'axe des abscisses
- La droite (OJ) est appelée : l'axe des ordonnées



Coordonnées d'un point

Pour tout point M du plan, il existe un couple unique de nombres réels $(x_M ; y_M)$ appelé couple de coordonnées du point M. x_M : est l'abscisse de M, y_M : est l'ordonnée de M et on écrit : $M(x_M ; y_M)$

Coordonnées du milieu d'un segment

M milieu du segment $[AB]$

donc : $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$

*** Remarque :**

→ Si $M \in (OI)$ alors : $M(x_M ; 0)$

→ Si $M \in (OJ)$ alors : $M(0 ; y_M)$

→ $O(0,0)$ et $I(1;0)$ et $J(0;1)$

La distance entre deux points

Propriété : Méthode ①

Si $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$

$\Rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Remarque importante : Méthode ②

Si $\vec{AB}(a ; b)$

donc $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$

Exemple : $A(1;5)$ et $B(3;9)$ et $C(11;5)$ et $D(9;1)$ Montrer que $ABCD$ est rectangle

On a $\vec{AB}(3-1, 9-5)$

$\rightarrow \vec{AB}(2, 4)$

$\vec{DC}(11-9, 5-1)$

$\rightarrow \vec{DC}(2 ; 4)$

Alors $\vec{AB} = \vec{DC}$

donc $ABCD$ est parallélogramme

On a $\vec{BC}(11-3, 5-9)$

$\rightarrow \vec{BC}(8 ; -4)$

et $\vec{AC}(11-1, 5-5)$

$\rightarrow \vec{AC}(10 ; 0)$

On a $AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$

$BC = \sqrt{8^2 + (-4)^2} = \sqrt{80}$

$AC = \sqrt{10^2 + 0^2} = \sqrt{100} = 10$

On a $AC^2 = AB^2 + BC^2$

donc d'après le théorème de Pythagore réciproque, le triangle ABC est rectangle en B

Alors $ABCD$ est rectangle

Les coordonnées d'un vecteur

Coordonnées de vecteur

Si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B , y_B)$

On a : $\vec{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$

Egalité de deux vecteurs

Si $\vec{AB}(a, b)$ et $\vec{CD}(x, y)$

On a $\vec{AB} = \vec{CD}$ c-à-d $a = x$ et $b = y$

deux vecteurs sont égaux s'ils ont même coordonnées

Somme et différence de deux vecteurs

Si $\vec{AB}(a, b)$ et $\vec{CD}(x, y)$

On a : $\vec{AB} + \vec{CD}(a + x ; b + y)$

$\vec{AB} - \vec{CD}(a - x ; b - y)$

Produit de vecteur par un nombre réel

Si $\vec{AB}(a ; b)$ et K un nombre réel

On a : $K \times \vec{AB}(Ka ; Kb)$

Questions classiques

Question ①

Montrer que A, B et C sont alignés

Donc on doit montrer que $\vec{AB} = K\vec{AC}$ avec $K \in \mathbb{R}$

$A(2, -1)$, $B(3;5)$ et $C(4;11)$

$\vec{AB}(3-2 ; 5-(-1))$

$\vec{AB}(1, 6)$

$\vec{AC}(4-2 ; 11-(-1))$

$\vec{AC}(2, 12)$

$2\vec{AB}(2, 12)$

$\rightarrow \vec{AC} = 2\vec{AB}$

Alors A, B et C alignés

Question ②

Déterminer les coordonnées de D telle que $ABCD$ parallélogramme

On cherche coordonnées de D tel que : $\vec{AB} = \vec{DC}$

$A(3;3)$ $B(1;-4)$ et $C(-2;-1)$

$ABCD$ parallélogramme

ssi $\vec{AB} = \vec{DC}$

ssi $\begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{cases}$

ssi $\begin{cases} 1 - 3 = -2 - x_D \\ -4 - 3 = -2 - y_D \end{cases}$

$\Rightarrow D(0 ; 5)$

Question ③

→ Nature du triangle ABC

* ABC isocèle en A c-à-d $AB = AC$

* ABC équilatérale c-à-d $AB = BC = AC$

* ABC rectangle en A ssi $BC^2 = AB^2 + AC^2$ Théorème de Pythagore directe

* ABC triangle rectangle et isocèle

Question ④ : Nature du quadrilatère $ABCD$

⇒ On montre d'abord que $ABCD$ est parallélogramme $\vec{AB} = \vec{DC}$

→ $ABCD$ rectangle : Si $ABCD$ parallélogramme + ABD triangle rectangle en A (ou bien les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ égaux c-à-d $AC = BD$)

→ $ABCD$ losange : Si $ABCD$ parallélogramme + ABD isocèle en A ou bien les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont perpendiculaires $(AC) \perp (BD)$

→ $ABCD$ carré : $ABCD$ parallélogramme + ABD triangle rectangle isocèle en A ou bien les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ égaux [illegible] perpendiculaires $(AC) \perp (BD)$ et $AC = BD$

Rédigé par: Mr BENNASSER Jamal