Problemas sobre puntos de inflexión

CURSO	TEMA	WWW.DANIPARTAL.NET
1ºBach CCSS	Derivadas	Colegio Marista “La Inmaculada” de Granada

PROBLEMA 1

Hallar los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$\boldsymbol{f(x) = e^x(x^2 - x + 1)}$

El dominio de la función es toda la recta real. Derivamos e igualamos a cero para hallar los puntos críticos.

$f'(x) = \mathrm{e}^x(x^2 - x + 1) + \mathrm{e}^x(2x - 1) \rightarrow f'(x) = \mathrm{e}^x(x^2 + x)$, $f'(x) = 0$

La exponencial nunca se hace cero, por lo que nos queda:

$x^2 + x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 1 \rightarrow$ puntos críticos

Calculamos la segunda derivada para averiguar si son máximos o mínimos.

$f'(x) = \mathrm{e}^x(x^2 + x) \rightarrow f''(x) = \mathrm{e}^x(x^2 + x) + e^x(2x + 1) \rightarrow f''(x) = \mathrm{e}^x(x^2 + 3x + 1)$

$f''(0) = 1 > 0 \rightarrow$ mínimo en $(0,1)$

$f''(-1) = \frac{-1}{e} < 0 \rightarrow$ máximo en $(-1, \frac{3}{e})$

Los candidatos a puntos de inflexión se obtienen de igualar la segunda derivada a cero.

$f''(x) = \mathrm{e}^x(x^2 + 3x + 1)$

$f''(x) = 0 \rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Donde nuevamente recordamos que la exponencial nunca se anula.

Para confirmar que estamos ante puntos de inflexión, podemos evaluar la tercera derivada en los puntos candidatos. Y si la tercera derivada resulta distinta de cero, confirmaremos su existencia. O bien (puede ser más sencillo), determinar la curvatura a ambos lados de estos puntos y comprobar que aparece cambio en dicha curvatura a izquierda y a derecha de cada candidato a punto de inflexión.

Función $f(x)$	$f(x) \cup$	$f(x) \cap$	$f(x) \cup$
Intervalos	$(-\infty, \frac{-3-\sqrt{5}}{2})$	$(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2})$	$(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \infty)$
Segunda Derivada $f''(x)$	$f''(-10) > 0$	$f''(-1) < 0$	$f''(0) > 0$

PROBLEMA 2

Obtener los puntos de inflexión de $g(x) = e^x - x$.

La condición necesaria de punto de inflexión es segunda derivada nula.

Calculamos la primera derivada.

$g(x) = e^x - x \rightarrow g'(x) = e^x - 1$

Calculamos la segunda derivada.

$g''(x) = e^x$, $g''(x) = 0$

La segunda derivada no se anula para ningún valor real ya que la exponencial nunca se anula. Conclusión: la función no posee puntos de inflexión.

PROBLEMA 3

Sea $f(x) = x^3 - 2x + 5$. Determina la ecuación de las rectas tangente y normal a la función en el punto de inflexión.

La condición necesaria de punto de inflexión nos pide anular la segunda derivada.

$f'(x) = 3x^2 - 2 \rightarrow f''(x) = 6x \rightarrow f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0$

Para demostrar que el candidato a punto de inflexión, efectivamente, es un punto de inflexión, aplicamos la condición suficiente. Por ejemplo, calculando la tercera derivada.

$f'''(x) = 6$

Evaluamos la tercera derivada en el candidato a punto de inflexión, y vemos el signo.

$f'''(0) = 6 > 0$

En $x = 0$ hay punto de inflexión, de cóncavo a convexo.

La imagen del punto de inflexión es:

$f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0 + 5 = 5$

Por lo que debemos escribir la ecuación punto-pendiente de la recta tangente a la función en el punto de tangencia $(0,5)$.

$f'(0) = \frac{y-5}{x-0} \rightarrow$ La derivada evaluada en $x = 0$ es $f'(0) = -2 \rightarrow$ Por lo tanto:

$-2 = \frac{y-5}{x-0} \rightarrow -2x = y - 5 \rightarrow y = -2x + 5 \rightarrow$ Recta tangente

La recta normal es perpendicular a la recta tangente. Por lo tanto, su ecuación punto-pendiente es:

$\frac{-1}{f'(0)} = \frac{y-5}{x-0} \rightarrow \frac{-1}{-2} = \frac{y-5}{x-0} \rightarrow x = 2y - 10 \rightarrow x - 2y + 10 = 0 \rightarrow$ Recta normal