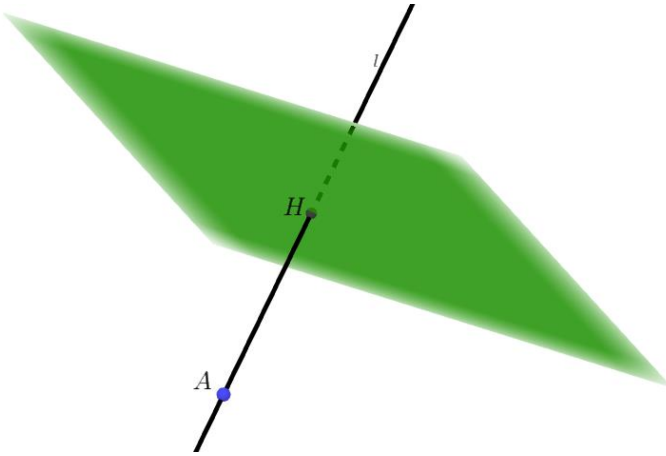
ОГТОРГУЙ ДАХЬ ВЕКТОР



1. $A(1,-4,-5)$ цэгээс $6x-3y-6z+7=0$ хавтгай хүртэлх зайг ол.

Δ Хавтгайн нормаль вектор $\vec{n}=(6,-3,-6)$ байна.

Эндээс шулууны чиглүүлэгч вектор нь $\vec{b}=(6,-3,-6)$ байна. Шулууны параметрт тэгшитгэлийг бичвэл
$\begin{cases} x=1+6t \\ y=-4-3t \\ z=-5-6t \end{cases}$ байна. Үүнийг хавтгайн тэгшитгэлд орлуулбал $6(1+6t)-3(-4-3t)-6(-5-6t)+7=0$ болох ба эндээс $t=-\dfrac{55}{81}$ гэж олдоно. Энэ утгыг шулууны тэгшитгэлдээ орлуулж хавтгай ба шулууны огтлолцлын H цэгийн координатыг олно.

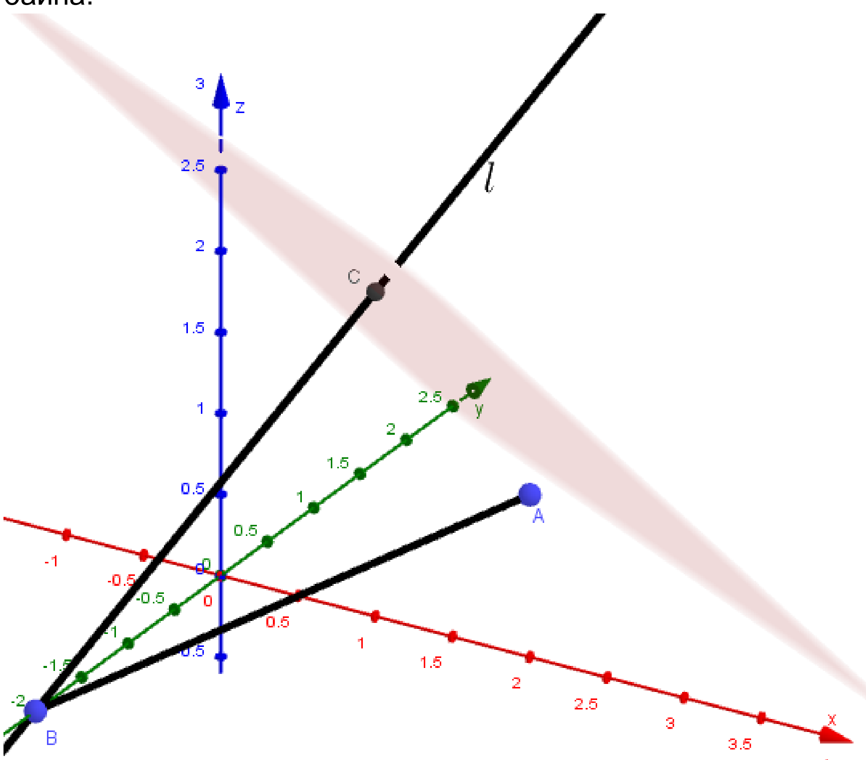
$x=1-6\cdot\dfrac{55}{81}=-\dfrac{83}{27}$, $y=-4+\dfrac{55}{27}=-\dfrac{53}{27}$, $z=-5+\dfrac{110}{27}=-\dfrac{25}{27}$

$H\left(-\dfrac{83}{27},-\dfrac{53}{27},-\dfrac{25}{27}\right)$. Одоо AH хэрчмийн уртыг олъё.

$$AH=\sqrt{\left(1+\frac{83}{27}\right)^2+\left(-4+\frac{53}{27}\right)^2+\left(-5+\frac{25}{27}\right)^2}=\sqrt{\frac{27225}{729}}=\frac{165}{27}=\frac{55}{9}\ \blacksquare$$

2. $A(2,0,1)$ цэг ба $x+2y+2z-5=0$ хавтгайгаас ижил зайд алслагдсан цэгийг Oy тэнхлэг дээр ол.

Δ Уг цэгийг B гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $B(0,a,0)$ байх нь тодорхой. Хавтгайн нормаль вектор $\vec{n}=(1,2,2)$ байна.



Одоо B цэгээс хавтгай хүртэлх зайг тодорхойлъё. l шулууны чиглүүлэгч вектор нь $\vec{b}=(1,2,2)$ байна.

Шулууны параметрт тэгшитгэлийг бичвэл $\begin{cases} x = t \\ y = a + 2t \\ z = 2t \end{cases}$ байна. Үүнийг хавтгайн тэгшитгэлд орлуулбал

$t + 2(a + 2t) + 2 \cdot 2t - 5 = 0$ болох ба эндээс $t = \dfrac{5-2a}{9}$ гэж олдоно. Энэ утгыг шулууны тэгшитгэлдээ

орлуулж хавтгай ба шулууны огтлолцлын C цэгийн координатыг $C\left(\dfrac{5-2a}{9}, a + \dfrac{10-4a}{9}, \dfrac{10-4a}{9}\right)$ гэж

тодорхойлно. Одоо BC хэрчмийн уртыг олъё. $BC = \sqrt{\left(\dfrac{5-2a}{9}\right)^2 + \left(\dfrac{10-4a}{9}\right)^2 + \left(\dfrac{10-4a}{9}\right)^2} = \sqrt{9 \cdot \left(\dfrac{5-2a}{9}\right)^2}$

Мөн AB хэрчмийн уртыг олж хооронд нь тэнцүүлэн бичнэ.

$AB = \sqrt{4 + a^2 + 1} = \sqrt{5 + a^2}$

$\sqrt{9 \cdot \left(\dfrac{5-2a}{9}\right)^2} = \sqrt{5 + a^2} \Rightarrow 5 + a^2 = 9 \cdot \left(\dfrac{5-2a}{9}\right)^2 \Rightarrow 5 + a^2 = \dfrac{25 - 20a + 4a^2}{9} \Rightarrow 5a^2 + 20a + 20 = 0 \Rightarrow a = -2$

гэж олдоно. Эндээс $B(0, -2, 0)$ болно. ■

3. $l_1 : \begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = 3t \\ z = t - 2 \end{cases}$ ба $l_2 : \begin{cases} x = 4t + 7 \\ y = -6t + 5 \\ z = -2t + 4 \end{cases}$ шулуунуудыг параллель болохыг баталж, тэдгээрийн

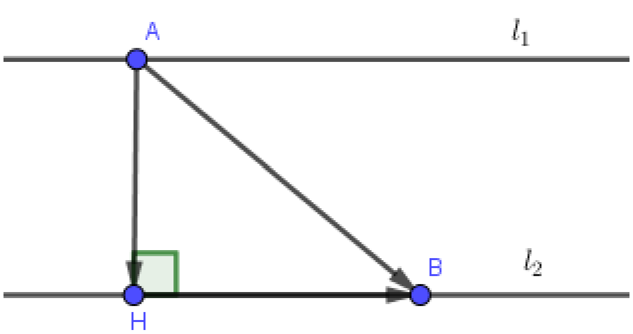
хоорондох зайг ол.

Δ Шулуунуудын чиглүүлэгч векторууд нь $\vec{b}_1 = (-2, 3, 1)$, $\vec{b}_2 = (4, -6, -2)$ бөгөөд эдгээр нь $\vec{b}_1 // \vec{b}_2$ байна.

/параллель эсвэл давхацсан/

$\begin{cases} -2t_1 + 1 = 4t_2 + 7 \\ 3t_1 = -6t_2 + 5 \\ t_1 - 2 = -2t_2 + 4 \end{cases}$ тэгшитгэлийн системийг зэрэг хангах (t_1, t_2) хос олдохгүй. Иймд l_1 ба l_2 шулуунууд

параллель байна.



$A(1, 0, -2)$, $B(7, 5, 4)$ цэгүүдийг авъя. $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}$

$\overrightarrow{AH} = (6, 5, 6) + t(-2, 3, 1) = (6 - 2t, 5 + 3t, 6 + t)$

$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{b}_1 = 0 \quad -2(6 - 2t) + 3(5 + 3t) + 1 \cdot (6 + t) = 0 \Rightarrow t = -\dfrac{9}{14}$

болох ба энэ утгыг $\overrightarrow{AH}$ векторт орлуулбал

$\overrightarrow{AH} = \left(\dfrac{102}{14}, \dfrac{43}{14}, \dfrac{75}{14}\right)$ болно. Эндээс

$\left|\overrightarrow{AH}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{102}{14}\right)^2 + \left(\dfrac{43}{14}\right)^2 + \left(\dfrac{75}{14}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{17878}{196}} = \sqrt{\dfrac{1277}{14}}$

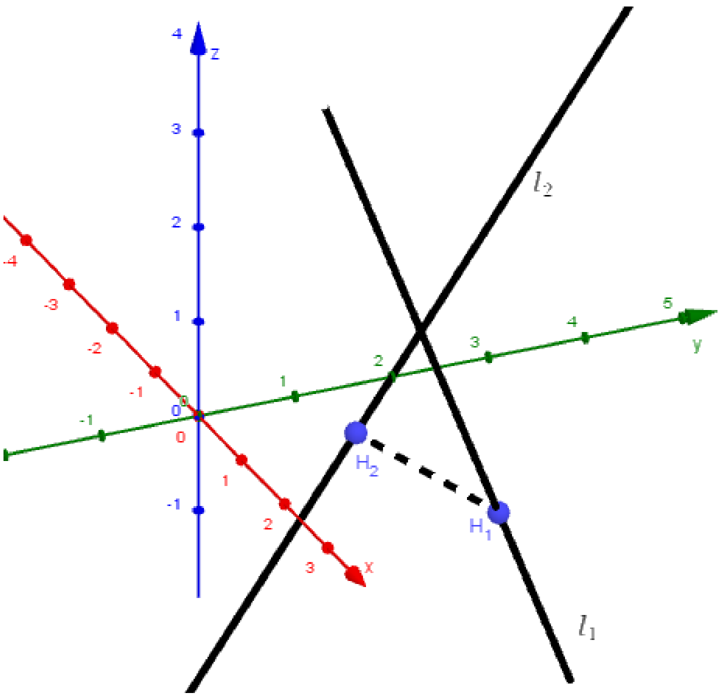
болно. ■

4. $l_1 : \begin{cases} x = t + 3 \\ y = -t + 1 \\ z = 2t + 2 \end{cases}$ ба $l_2 : \begin{cases} x = -t \\ y = 3t + 2 \\ z = 3t \end{cases}$ шулуунуудыг солбисон болохыг баталж, тэдгээрийн хоорондох

зайг ол.

Δ Шулуунуудын чиглүүлэгч векторууд нь $\vec{b}_1=(1,-1,2)$, $\vec{b}_2=(-1,3,3)$ бөгөөд эдгээр нь коллинеар биш байна . /огтлолцсон эсвэл солбисон/

$\begin{cases} t_1+3=-t_2 \\ -t_1+1=3t_2+2 \\ 2t_1+2=3t_2 \end{cases}$ тэгшитгэлийн системийг зэрэг хангах (t_1,t_2) хос олдохгүй. Иймд l_1 ба l_2 шулуунууд солбисон байна. Одоо $H_1\in l_1$, $H_2\in l_2$, $H_1H_2\perp l_1$, $H_1H_2\perp l_2$ байх H_1,H_2 цэгүүдийг олъё. H_1H_2 хэрчмийн урт нь эдгээр солбисон хоёр шулууны хоорондох зай болно.



$H_1(t_1+3,-t_1+1,2t_1+2)$, $H_2(-t_2,3t_2+2,3t_2)$

$\overrightarrow{H_1H_2}=(-t_2-t_1-3,\ 3t_2+2+t_1-1,\ 3t_2-2t_1-2)$

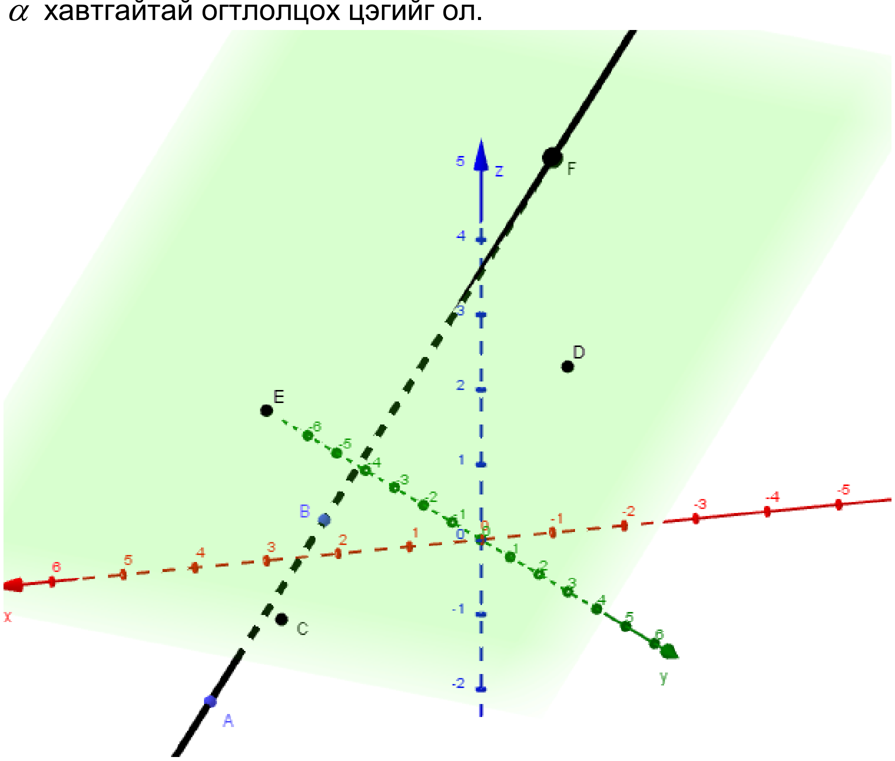
$\overrightarrow{H_1H_2}\perp l_1$, $\overrightarrow{H_1H_2}\perp l_2$ тул

$$\begin{cases} 1(-t_2-t_1-3)-(3t_2+2+t_1-1)+2(3t_2-2t_1-2)=0 \\ -(-t_2-t_1-3)+3(3t_2+2+t_1-1)+3(3t_2-2t_1-2)=0 \end{cases}$$

$\begin{cases} -6t_1+2t_2=8 \\ -2t_1+19t_2=0 \end{cases} \Rightarrow t_1=-\dfrac{76}{55},\ t_2=-\dfrac{8}{55}$ болно. Энэ утгыг орлуулан бичвэл $\overrightarrow{H_1H_2}=\left(-\dfrac{81}{55},-\dfrac{9}{11},\dfrac{18}{55}\right)$ болно.

$$\left|\overrightarrow{H_1H_2}\right|=\sqrt{\frac{6561+2025+324}{3025}}=\sqrt{\frac{8910}{3025}}=\frac{9\sqrt{110}}{55}\ \blacksquare$$

5. $A(5,3,-1)$, $B(3,2,1)$ цэгүүдийг дайрсан l шулууны $C(4,3,0)$, $D(0,3,3)$, $E(3,0,2)$ цэгүүдийг дайрсан α хавтгайтай огтлолцох цэгийг ол.



Δ $l:\ \vec{b}=(-2,-1,2),\begin{cases}x=5-2t\\ y=3-t\\ z=-1+2t\end{cases}$

$\alpha:\ \vec{n}=(a,b,c),\ \overrightarrow{CD}=(-4,0,3),\ \overrightarrow{DE}=(3,-3,-1),\ \overrightarrow{CE}=(-1,-3,2)$

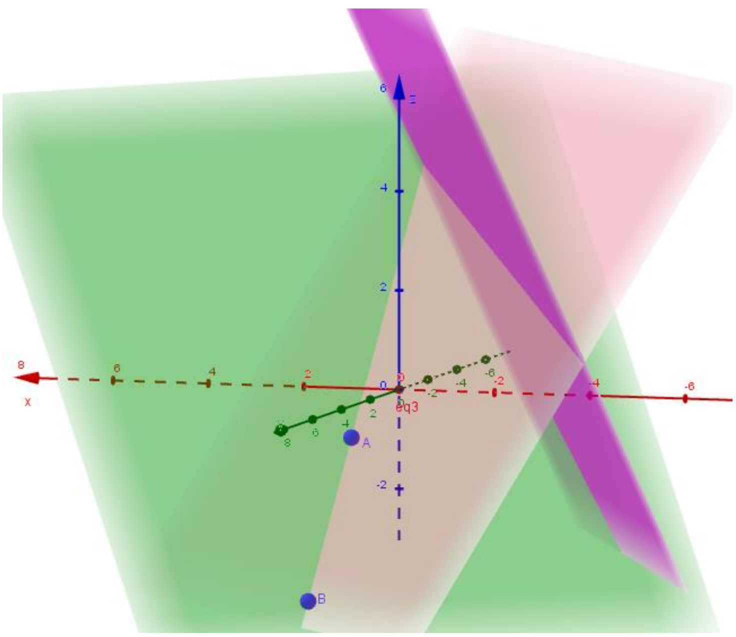
$\begin{cases}-4a+3c=0\\ 3a-3b-c=0\\ -a-3b+2c=0\end{cases}$ болно. $c=12$ гэе. Тэгвэл $a=9,b=5$ болно. $\vec{n}=(9,5,12)$

$\vec{b}\cdot\vec{n}\neq 0$ тул шулуун хавтгайтай огтлолцсон. Хавтгайн тэгшитгэлийг бичвэл $9x+5y+12z+d=0$

$9\cdot 4+5\cdot 3+12\cdot 0+d=0\Rightarrow d=-51$ $9x+5y+12z-51=0$ болно. Хавтгайн тэгшитгэлд $\begin{cases}x=5-2t\\ y=3-t\\ z=-1+2t\end{cases}$ -ийг орлуулж шулуун ба хавтгайн огтлолцлын цэгийн координатыг олъё.

$9(5-2t)+5(3-t)+12(-1+2t)-51=0\Rightarrow t=3$ болох ба $F(-1,0,5)$ болно. ■

6. $A(1,0,-1)$, $B(1,3,-4)$ цэгүүдийг дайрсан бөгөөд $2x+y-z+7=0$ хавтгайтай $\frac{\pi}{3}$ өнцөг үүсгэх хавтгайн тэгшитгэл бич.



Δ $\alpha_1:\ \overrightarrow{n_1}=(2,1,-1)$

$\alpha_2:\ \overrightarrow{n_2}=(a,b,c)$, $\overrightarrow{AB}=(0,3,-3)$.

$0\cdot a+3b-3c=0\Rightarrow b=c$. Бичих гэж буй хавтгайн тэгшитгэлийг $x+by+cz+d=0$ хэлбэртэй гэж үзье. A,B цэгүүдийг дайрсан гэдгээс

$\begin{cases}1-c+d=0\\ 1+3c-4c+d=0\end{cases}\Rightarrow d=c-1$

$x+cy+cz+c-1=0\Rightarrow\vec{n}=(1,c,c),\ \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$$\frac{2+c-c}{\sqrt{1+c^2+c^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+2c^2}\cdot\sqrt{6}}=\frac{1}{2}$$

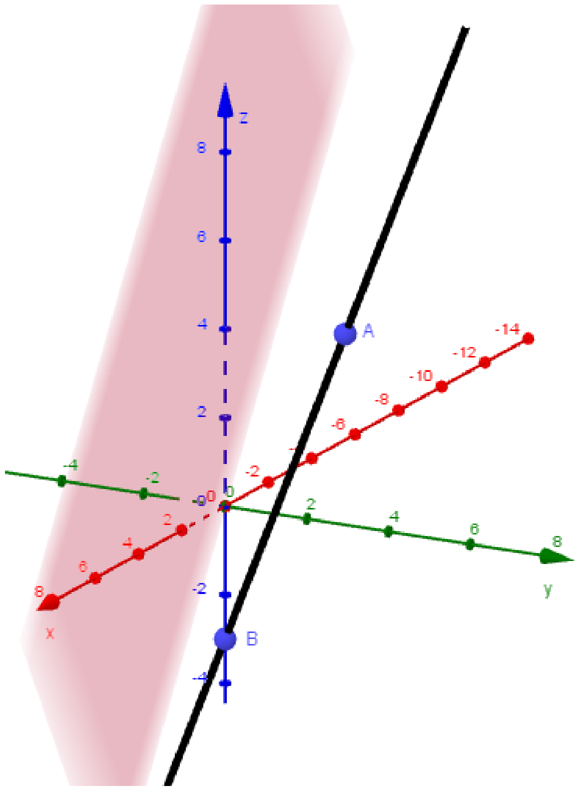
$\sqrt{6(1+2c^2)}=4\Rightarrow 6(1+2c^2)=16\Rightarrow c=\pm\sqrt{\frac{5}{6}}$

$x+\sqrt{\frac{5}{6}}y+\sqrt{\frac{5}{6}}z+\sqrt{\frac{5}{6}}-1=0,\quad x-\sqrt{\frac{5}{6}}y-\sqrt{\frac{5}{6}}z-\sqrt{\frac{5}{6}}-1=0$ ■

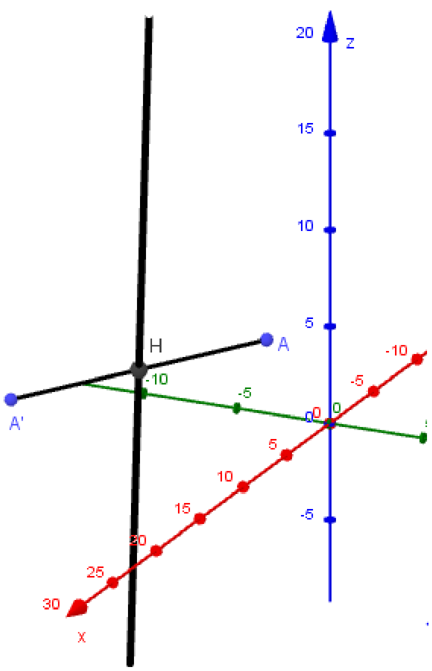
7. $A(2,4,5)$ цэгийг дайрч, Oz тэнхлэгийг огтолсон $2x-3y+z-4=0$ хавтгайтай параллель шулууны хялбар тэгшитгэл бич.

Δ $\vec{n}=(2,-3,1)$, $\vec{b}\cdot\vec{n}=0$, $B(0,0,z)$, $\vec{b}=(2,4,5-z)$, $2\cdot 2+(-3)\cdot 4+1\cdot(5-z)=0\Rightarrow z=-3$

$\vec{b}=(2,4,8)$

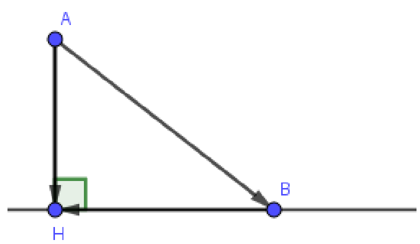


$$\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 4+4t \\ z = 5+8t \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-5}{8} \quad \blacksquare$$



8. $A(3,-2,5)$ цэгтэй $\frac{x-3}{2} = \frac{y+9}{1} = \frac{z+2}{3}$ шулууны хувьд тэгш хэмтэй байх цэгийг ол.

Δ H цэг нь AA' хэрчмийн дундаж цэг болно. Одоо H цэгийн координатыг олъё.



$\vec{b} = (2,1,3)$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH}$,

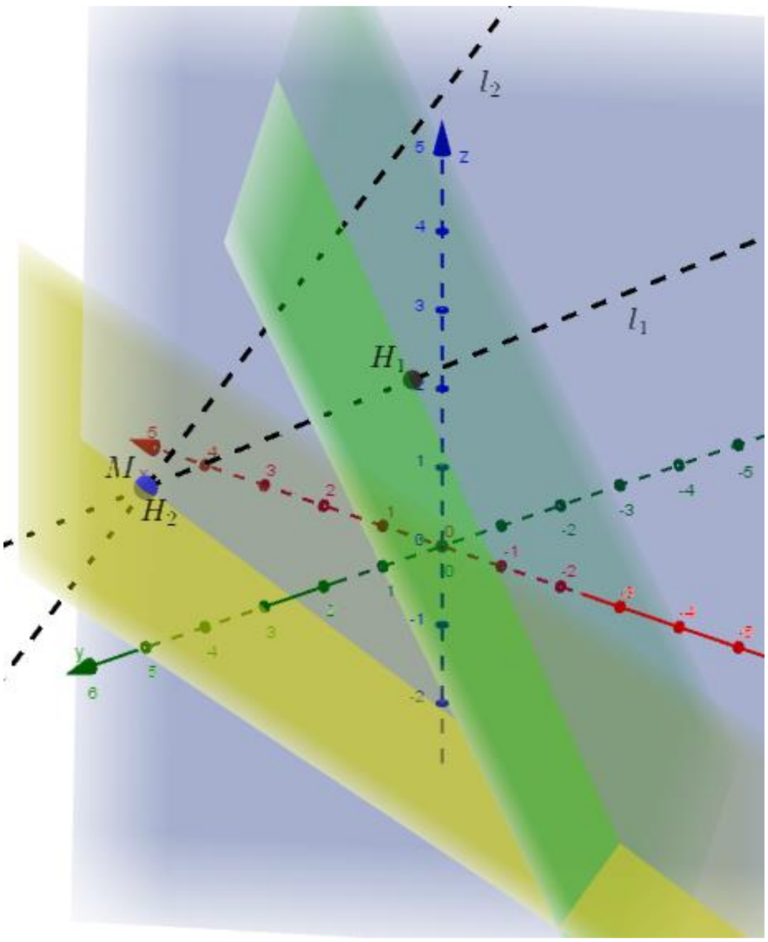
$\overrightarrow{AH} = (0,-7,-7) + t(2,1,3) = (2t,-7+t,-7+3t)$, $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{b} = 0$

$2 \cdot 2t + 1 \cdot (-7+t) + 3(-7+3t) = 0 \Rightarrow t = 2$ болох ба энэ утгыг орлуулан бичвэл $\overrightarrow{AH} = (4,-5,-1)$ болно.

Эндээс H цэгийн координат $H(7,-7,4)$ гэж олдоно.

$\frac{3+x}{2} = 7 \Rightarrow x = 11$, $\frac{-2+y}{2} = -7 \Rightarrow y = -12$, $\frac{5+z}{2} = 4 \Rightarrow z = 3$, $A'(11,-12,3)$ $\blacksquare$

9. $M(2,3,1)$ цэгээс $5x+4y-3z+6=0$ ба $x+y-2z-3=0$ хавтгайнуудад татсан перпендикуляруудыг дайрсан хавтгайн тэгшитгэл бич.



Δ H_1 цэгийн координатыг олъё.

$\alpha_1:\ \vec{n_1}=(5,4,-3),\quad l_1:\ \vec{b_1}=(5,4,-3)$

$\begin{cases} x=2+5t \\ y=3+4t \\ z=1-3t \end{cases}$ Үүнийг α_1 хавтгайн тэгшитгэлд

орлуулбал $5(2+5t)+4(3+4t)-3(1-3t)+6=0$

$t=-\dfrac{1}{2}$ болно. $H_1\left(-\dfrac{1}{2},1,\dfrac{5}{2}\right)$

H_2 цэгийн координатыг олъё.

$\alpha_1:\ \vec{n_2}=(1,1,-2),\quad l_2:\ \vec{b_2}=(1,1,-2)$

$\begin{cases} x=2+t \\ y=3+t \\ z=1-2t \end{cases}$ Үүнийг α_2 хавтгайн тэгшитгэлд

орлуулбал $2+t+3+t-2(1-2t)-3=0$

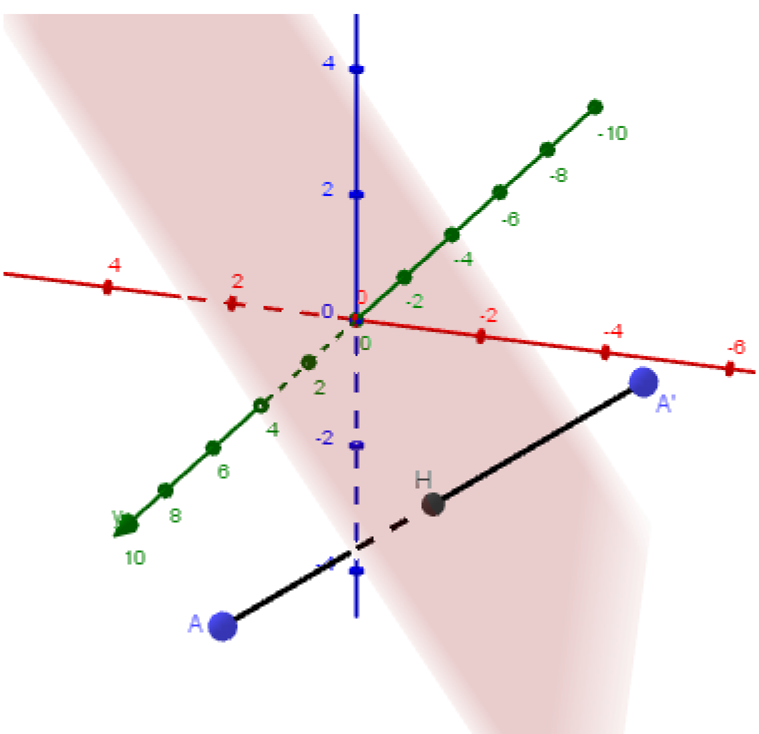
$t=0$ болно. $H_2(2,3,1)$. Энэ цэг α_2 хавтгай дээр оршиж байна.

$\alpha_3:\ \vec{n_3}=(a,b,c),\quad \vec{n_3}\cdot\vec{n_1}=0,\ \vec{n_3}\cdot\vec{n_2}=0$

$\begin{cases} 5a+4b-3c=0 \\ a+b-2c=0 \end{cases}\Rightarrow(-5,7,1)$

$-5\cdot2+7\cdot3+1\cdot1+d=0\Rightarrow d=-12,\quad -5x+7y+z-12=0,\ 5x-7y-z+12=0$ ■

10. $M(1,3,-4)$ цэгийн $3x+y-2z=0$ хавтгайн хувь дахь тэгш хэмтэй цэгийг ол.



Δ H цэг нь AA' хэрчмийн дундаж цэг болно. H цэгийн координатыг олъё.

$\alpha:\ \vec{n}=(3,1,-2)$ байна. AA' хэрчмийг агуулсан шулууны чиглүүлэгч вектор нь $\vec{b}=(3,1,-2)$.

$\begin{cases} x=1+3t \\ y=3+t \\ z=-4-2t \end{cases}$ Үүнийг хавтгайн тэгшитгэлд

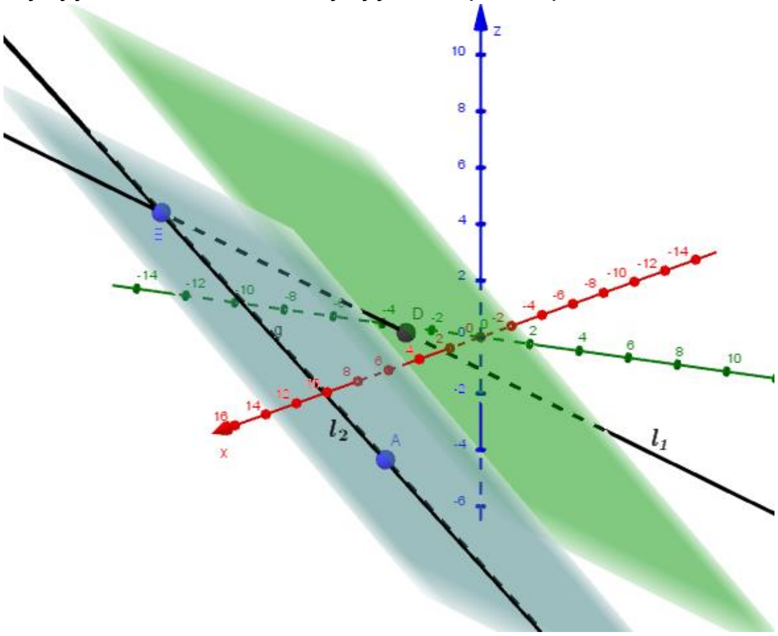
орлуулбал $3(1+3t)+3+t+2(4+2t)=0\Rightarrow t=-1$

Шулууны тэгшитгэлд орлуулбал $H(-2,2,-2)$ болно.

$\dfrac{1+x}{2}=-2\Rightarrow x=-5,\quad \dfrac{3+y}{2}=2\Rightarrow y=1,$

$\dfrac{-4+z}{2}=-2\Rightarrow z=0,\quad A'(-5,1,0)$ ■

11. $A(3,-2,-4)$ цэгийг дайрсан бөгөөд $3x-2y-3z-7=0$ хавтгайтай параллель мөн $\begin{cases} x=2+3t \\ y=-4-2t \\ z=1+2t \end{cases}$ шулуунтай огтлолцох шулууны параметрт тэгшитгэлийг бич.



$\Delta \quad \vec{n}=(3,-2,-3)$

$\alpha // \alpha_1$

$\alpha_1:\ 3x-2y-3z+d=0$

$3\cdot 3-2\cdot(-2)-3\cdot(-4)+d=0 \Rightarrow d=-25$

$\alpha_1:\ 3x-2y-3z-25=0$

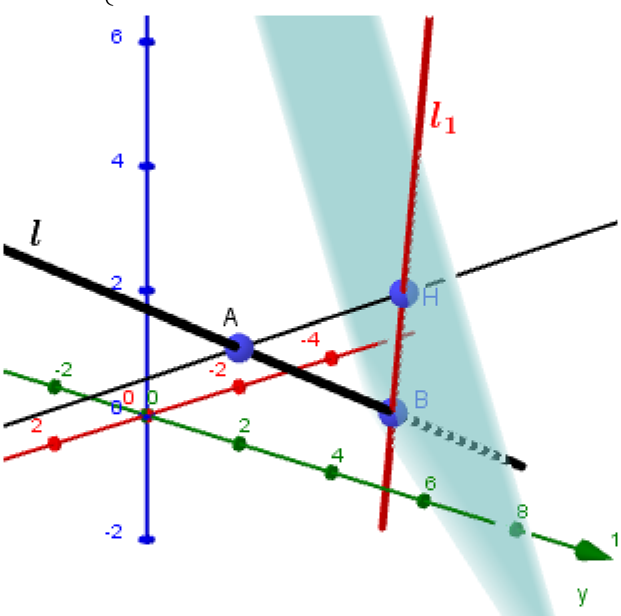
Одоо α_1 хавтгайн тэгшитгэлд $\begin{cases} x=2+3t \\ y=-4-2t \\ z=1+2t \end{cases}$ -ийг орлуулбал

$3(2+3t)-2(-4-2t)-3(1+2t)-25=0 \Rightarrow t=2$

Шулууны тэгшитгэлд орлуулбал $E(8,-8,5)$

$l_2:\ \vec{b}=(-5,6,-9) \Rightarrow \begin{cases} x=8-5t \\ y=-8+6t \\ z=5-9t \end{cases}$ ■

12. $l:\begin{cases} x=1+2t \\ y=3+t \\ z=2+t \end{cases}$ шулууны $3x-2y-z+15=0$ хавтгай дээрх проекцийг ол.



$\Delta \quad l$ шулуун дээр орших $A(1,3,2)$ цэг сонгон авъя. Одоо энэ цэгийн хавтгай дээрх проекцийг олъё. Хавтгайн нормаль вектор нь $\vec{n}=(3,-2,-1)$ байна. AH хэрчмийг агуулсан шулууны чиглүүлэгч вектор нь $\vec{b}=(3,-2,-1)$ болно. Энэ шулууны параметрт тэгшитгэлийг бичвэл $\begin{cases} x=1+3t \\ y=3-2t \\ z=2-t \end{cases}$ болно. Үүнийг хавтгайн тэгшитгэлд орлуулж H цэгийн координатыг олъё.

$3(1+3t)-2(3-2t)-(2-t)+15=0 \Rightarrow t=-\dfrac{5}{7} \Rightarrow$

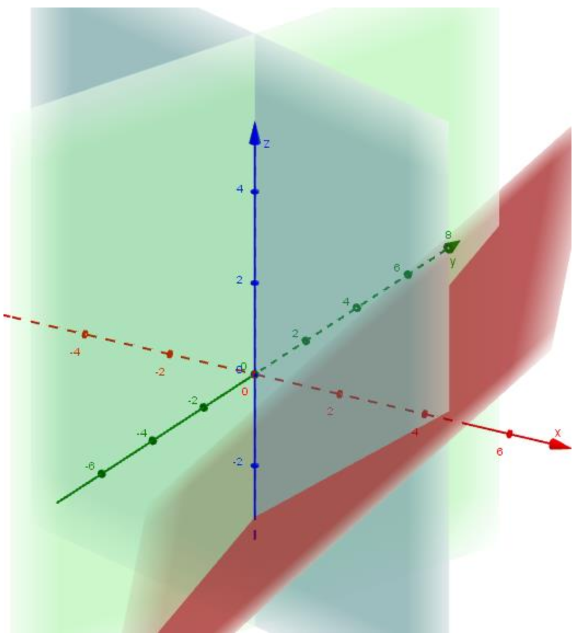
$\Rightarrow H\left(-\dfrac{8}{7},\dfrac{31}{7},\dfrac{19}{7}\right)$ болно.

Одоо l шулууны хавтгайтай огтлолцсон B цэгийн координатыг олъё.

$3(1+2t)-2(3+t)-(2+t)+15=0 \Rightarrow t=-\dfrac{10}{3}$. Эндээс $B\left(-\dfrac{17}{3},-\dfrac{1}{3},-\dfrac{4}{3}\right)$ болно. l_1 шулууны чиглүүлэгч вектор нь $\vec{b}=\left(\frac{95}{21},\frac{100}{21},\frac{85}{21}\right)$ $\quad l_2:\begin{cases} x=-\frac{17}{3}+\frac{95}{21}t \\ y=-\frac{1}{3}+\frac{100}{21}t \\ z=-\frac{4}{3}+\frac{85}{21}t \end{cases}$ ■

13. Oz тэнхлэгийг агуулсан бөгөөд $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ хавтгайтай 60^0 өнцөг үүсгэх хавтгайн тэгшитгэл бич.

Δ Oz тэнхлэгийг агуулсан хавтгай $ax+by=0$ хэлбэртэй байна.



$$\overrightarrow{n_1}=(a,b,0),\ \overrightarrow{n_2}=\left(2,1,-\sqrt{5}\right),\ \cos\alpha=\frac{1}{2}$$

$$\frac{2a+b}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{2^2+1+5}}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\sqrt{10}\cdot\sqrt{a^2+b^2}=4a+2b\Rightarrow 10\left(a^2+b^2\right)=16a^2+16ab+4b^2$$

$$6a^2+16ab-6b^2=0$$

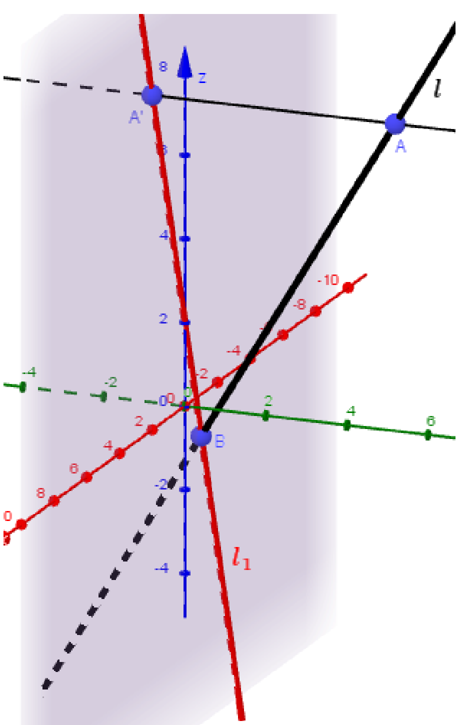
$$6\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^2+16\cdot\left(\frac{a}{b}\right)-6=0,\ \frac{a}{b}=x$$

$$6x^2+16x-6=0\Rightarrow x_1=\frac{1}{3},x_2=-3$$

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{3}\Rightarrow 3a=b\Rightarrow ax+3ay=0\Rightarrow x+3y=0$$

$$\frac{a}{b}=-3\Rightarrow a=-3b\Rightarrow -3bx+by=0\Rightarrow 3x-y=0 \quad ■$$

14. $l:\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+2=0 \end{cases}$ шулууны Oxz хавтгай дээрх проекцийн тэгшитгэл бич.



Δ l шулууны Oxz хавтгайтай огтлолцох цэгийг олъё.

$y=0,\ 2x+2=0\Rightarrow x=-1,\ \ z=-1,\ B(-1,0,-1)$

l шулуун дээр орших A цэгийг сонгон авъя. $A(2,6,8)$

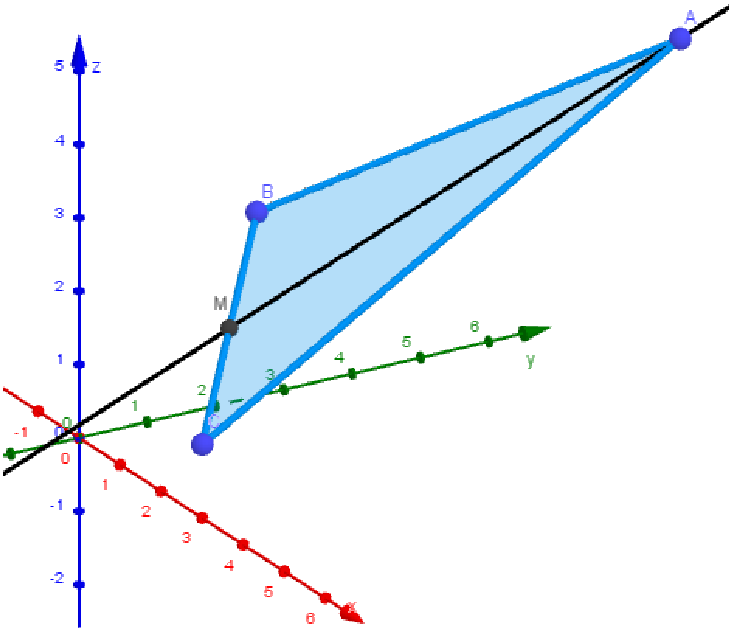
Одоо A цэгийн Oxz хавтгай дээрх проекцийг олъё. $A'(2,0,8)$

Oxz хавтгай дээрх $B(-1,-1), A'(2,8)$ цэгүүдийг дайрсан шулууны тэгшитгэл бичвэл

$$m=\frac{9}{3}=3,\ \ z=3x+c,\ \ 8=3\cdot 2+c\Rightarrow c=2$$

$$z=3x+2\Rightarrow 3x-z+2=0 \quad ■$$

15. $A(3,7,5), B(1,2,3), C(3,0,1)$ цэгүүдэд оройтой гурвалжны A оройгоос татсан медианыг агуулсан шулууны параметрт тэгшитгэл бич.

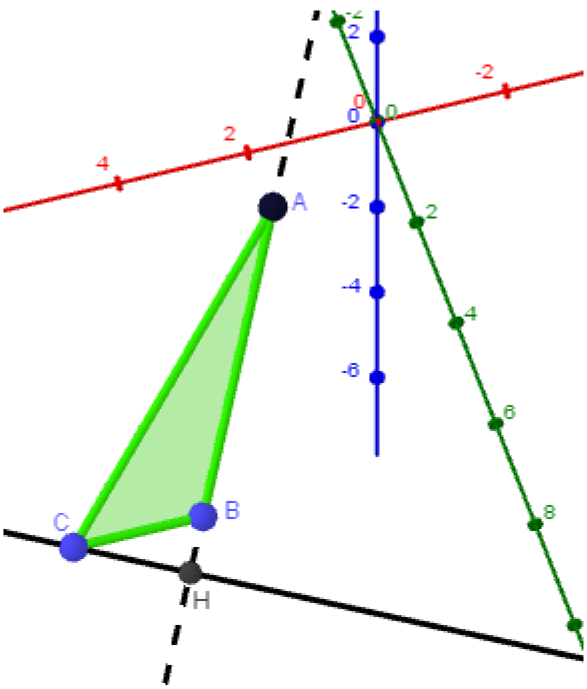


Δ $M(2,1,2)$

$\vec{b} = (1,6,3)$

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 7 + 6t \\ z = 5 + 3t \end{cases} \quad \blacksquare$$

16. $A(1,-2,-4), B(3,1,-7), C(5,1,-7)$ цэгүүдэд оройтой гурвалжны C оройгоос татсан өндрийг агуулсан шулууны хялбар тэгшитгэл бич.



Δ $\overrightarrow{AB} = (2,3,-3)$ байна. AB -г агуулсан шулууны чиглүүлэгч вектор нь $\vec{b} = (2,3,-3)$ болно. $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{CH}$

$\overrightarrow{CH} = (-2,0,0) + t(2,3,-3) = (-2+2t, 3t, -3t)$

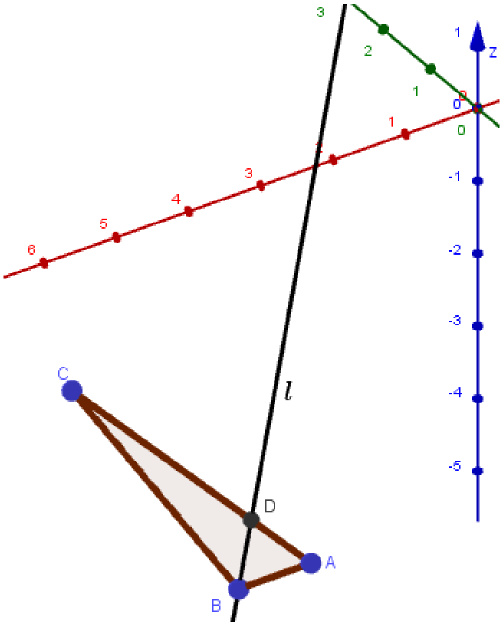
$\overrightarrow{CH} \cdot \vec{b} = 0$

$2(-2+2t) + 3 \cdot 3t - 3(-3t) = 0 \Rightarrow t = \dfrac{2}{11}$ гэж олдоно.

Үүнийг орлуулбал $\overrightarrow{CH} = \left(-\dfrac{18}{11}, \dfrac{6}{11}, -\dfrac{6}{11}\right)$ болно. Эндээс CH өндрийг агуулсан шулууны чиглүүлэгч вектор нь $\vec{b} = (3,-1,1)$ болно. CH өндрийг агуулсан шулууны хялбар тэгшитгэл нь

$\dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+7}{1}$ болно. $\blacksquare$

17. $A(1,2,-7), B(2,2,-7), C(3,4,-5)$ цэгүүдэд оройтой гурвалжны B оройгоос татсан биссектрисийг агуулсан шулууны параметрт тэгшитгэл бич.



Δ $\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{AC}=(2,2,2)$, $|\overrightarrow{AB}|=1$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\overrightarrow{BC}=(1,2,2)$, $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$

Биссектрисийн чанар ёсоор $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}=\frac{1}{3}$

$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ болно. $D(x,y,z)$ гэе.

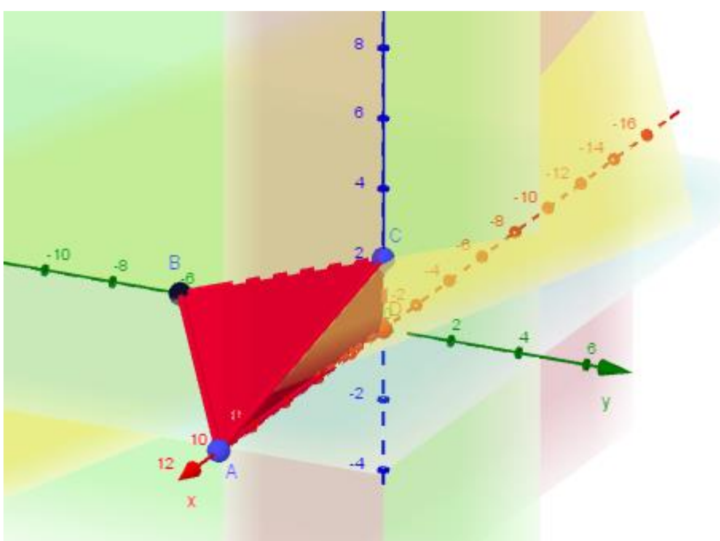
$x-1=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{3}{2}$, $y-2=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{5}{2}$, $z+7=\frac{1}{2}\Rightarrow z=-\frac{13}{2}$

$D\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2},-\frac{13}{2}\right)$ болно. Эндээс l шулууны чиглүүлэгч вектор нь

$\vec{b}=(-1,1,1)$ гэж олдоно. l шулууны параметрт тэгшитгэл

$$\begin{cases} x=2-t \\ y=2+t \\ z=-7+t \end{cases}$$ болно. ■

18. Координатын хавтгайнууд ба $3x-5y+15z-30=0$ хавтгайн хооронд үүсэх тэтраэдрийн эзлэхүүнийг ол.



Δ Хавтгайн координатын тэнхлэгүүдтэй огтлолцох цэгүүдийг олъё.

$3x-30=0\Rightarrow x=10$, $A(10,0,0)$

$-5y-30=0\Rightarrow y=-6$, $B(0,-6,0)$

$15z-30=0\Rightarrow z=2$, $C(0,0,2)$

Одоо пирамидын O оройгоос буулгасан өндрийг олъё. $\vec{n}=(3,-5,15)$

$$\begin{cases} x=3t \\ y=-5t \\ z=15t \end{cases}$$ болох ба үүнийг хавтгайн тэгшитгэлд

орлуулбал $9t+25t+225t-30=0\Rightarrow t=\frac{30}{259}$ болно.

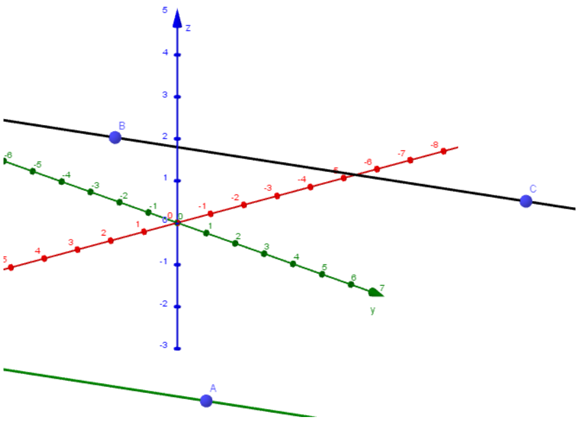
O оройгоос буулгасан өндрийн суурийг H гэвэл $H\left(\frac{90}{259},-\frac{150}{259},\frac{450}{259}\right)$ болно.

$OH=\sqrt{\frac{8100+22500+202500}{67081}}=\sqrt{\frac{233100}{67081}}=\sqrt{\frac{900}{259}}=\frac{30}{\sqrt{259}}$ Одоо ABC гурвалжны талбайг олъё.

$\overrightarrow{AB}=(-10,-6,0)$, $\overrightarrow{AC}=(-10,0,2)$ $\cos\alpha=\frac{100}{\sqrt{136}\cdot\sqrt{104}}=\frac{100}{\sqrt{14144}}=\frac{25}{\sqrt{884}}$, $\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{625}{884}}=\sqrt{\frac{259}{884}}$

$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{136}\cdot\sqrt{104}\cdot\sqrt{\frac{259}{884}}}{2}=\frac{\sqrt{4144}}{2}=\frac{4\sqrt{259}}{2}=2\sqrt{259}\ ,\quad V=\frac{1}{3}\cdot2\sqrt{259}\cdot\frac{30}{\sqrt{259}}=20\ \blacksquare$$

19. $A(0,1,-4)$ цэгийг дайрсан $\begin{cases}x+2y+z-1=0\\2x+2y-3z+6=0\end{cases}$ шулуунтай параллель шулууны хялбар тэгшитгэл бич.



Δ Өгсөн шулуун дээр орших хоёр цэг олъё.

$x=1$ гэе. $z=2, y=-1$ $B(1,-1,2)$

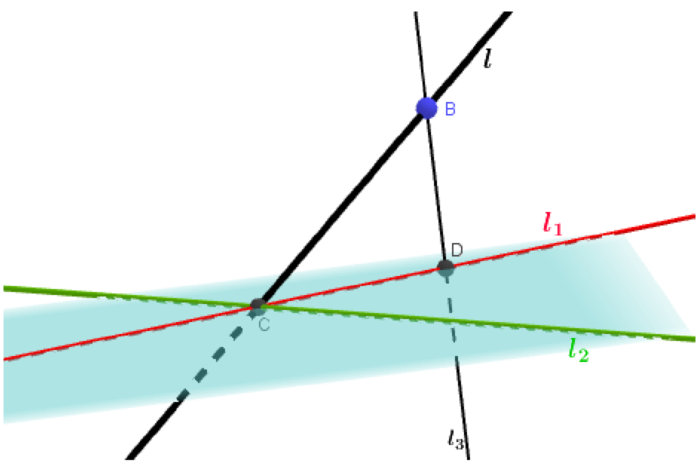
$z=0$ гэе. $x=-7, y=4$ $C(-7,4,0)$

чиглүүлэгч вектор нь $\vec{b}=(8,-5,2)$

Шулууны тэгшитгэл бичвэл $\frac{x}{8}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z+4}{2}$

болно. ■

20. $x+y+z-1=0$ хавтгай ба $l:\begin{cases}x=t\\y=1\\z=-1\end{cases}$ шулууны огтлолцлын цэгийг дайрдаг шулуун нь өгөгдсөн хавтгай дээр оршдог ба өгөгдсөн шулуунд перпендикуляр байв. Энэ шулууны параметрт тэгшитгэлийг бич.



Δ Өгөгдсөн шулууны хавтгай дээрх проекцийг l_1 гэж тэмдэглэе. Гурван перпендикулярын тухай теорем ёсоор $l\perp l_2,\ l_1\perp l_2$ байна.

Мөн l_2 шулуун нь хавтгайн нормаль векторт перпендикуляр байна. C цэгийн координат нь $t+1-1-1=0\Rightarrow t=1\Rightarrow C(1,1,-1)$ байна.

$l:\ \vec{b}=(1,0,0)$

Одоо l_1 шулууны чиглүүлэгч векторийг олъё.

l шулуун дээр орших $B(2,1,-1)$ цэг сонгон аваад хавтгай дээрх проекцийг олно. Хавтгайн нормаль вектор нь $\vec{n}=(1,1,1)$ байна.

$l_3:\begin{cases}x=2+t\\y=1+t\\z=-1+t\end{cases}$ үүнийг хавтгайн тэгшитгэлд орлуулбал $2+t+1+t-1+t-1=0\Rightarrow t=-\frac{1}{3}\Rightarrow D\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right)$

болно. Эндээс $l_1:\ \vec{b_1}=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ болно. $l_2:\ \vec{b_2}=(a,b,c)$ гэвэл $\begin{cases}a=0\\\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}b-\frac{1}{3}c=0\Rightarrow b=-c\\a+b+c=0\end{cases}$

$$l_2:\ \overrightarrow{b_2}=(0,1,-1)\Rightarrow l_2:\ \begin{cases}x=1\\ y=1+t\\ z=-1-t\end{cases}$$ болно. ■