Teoría – Tema 3

Teoría - 16 - ecuación de Euler

Ecuación de Euler

Por su gran importancia en diferentes ramas de la ciencia, indicamos la conocida fórmula de Euler. Relaciona la notación trigonométrica de un número complejo con la función exponencial

Fórmula de Euler

$$e^{ix} = \cos(x) + sen(x) \cdot i$$

Esta ecuación, a nivel de culturilla matemática, es la que da paso a la conocida relación:

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + sen(\pi) \cdot i \quad \rightarrow \quad e^{i\pi} = -1 \quad \rightarrow \quad e^{i\pi} + 1 = 0$$

Radicación de complejos en notación polar

Si aplicamos raíz n-ésima a un complejo en notación polar, obtenemos:

$\sqrt[n]{r_\alpha}=r'_\beta$ ==> $r_\alpha=(r'_\beta)^n$ ==> $r_\alpha=(r')^n_{n\cdot\beta}$, con $n\in\mathbb{N}$

Y dos complejos en forma polar son iguales si sus módulos son iguales y sus argumentos también lo son (o se diferencian un número de vueltas completas de 360º en el plano complejo). Es decir:

$r=(r')^n$ ==> $\sqrt[n]{r}=r'$

$\alpha+360^o\cdot k=n\cdot\beta$ ==> $\dfrac{\alpha+360^o\cdot k}{n}=\beta$, con $n\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{Z}$

Si rompemos la igualdad de argumentos en dos fracciones: $\dfrac{\alpha}{n}+360^o\cdot\dfrac{k}{n}=\beta$

¿Cuántas soluciones distintas de la raíz n-ésima tenemos en una vuelta de 360º?

$si\ k=0 \rightarrow \dfrac{\alpha}{n}=\beta_1$

$si\ k=1 \rightarrow \dfrac{\alpha}{n}+360^o\cdot\dfrac{1}{n}=\beta_2$

$si\ k=2 \rightarrow \dfrac{\alpha}{n}+360^o\cdot\dfrac{2}{n}=\beta_3$

$si\ k=3 \rightarrow \dfrac{\alpha}{n}+360^o\cdot\dfrac{3}{n}=\beta_4$

…....................

…....................

$si\ k=n-1 \rightarrow \dfrac{\alpha}{n}+360^o\cdot\dfrac{n-1}{n}=\beta_n$

$si\ k=n \rightarrow \dfrac{\alpha}{n}+360^o\cdot\dfrac{n}{n}=\dfrac{\alpha}{n}+360^o=\beta_1$

Es decir, para $k=n$ obtenemos el mismo argumento $\dfrac{\alpha}{n}$ que obtuvimos en $k=0$, diferenciado por una vuelta de 360º. Por lo tanto: en una vuelta de 360º tenemos n raíces n-ésimas distintas.

Raíz n-ésima de un número complejo en forma polar.

$\sqrt[n]{r_\alpha}=\left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\alpha+360^o\cdot k}{n}}$, con $k=0,1,2,3,\ldots,n-1$

El complejo $z=r_\alpha$ tiene n raíces n-ésimas distintas. Para $k\geq n$ y $k<0$ repetimos los mismos argumentos contenidos en una vuelta completa de 360º.

Las raíces n-ésimas de $z=r_{\alpha}$ forman los vértices de un polígono regular de n-lados, centrado en el origen del plano complejo, inscrito en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$.

Ejemplo

Calcula las raíces cuartas de $81_{120^{o}}$.¿Qué figura forman sus afijos?

, con $k=0,1,2,3$

Para cada valor de k obtenemos una raíz cuarta:

$$z_0=(\sqrt[4]{81})_{\frac{120^{o}+360^{o}\cdot 0}{4}}=3_{30^{o}}$$

$$z_1=3_{\frac{120^{o}+360^{o}\cdot 1}{4}}=3_{120^{o}}$$

$$z_2=3_{\frac{120^{o}+360^{o}\cdot 2}{4}}=3_{210^{o}}$$

$$z_3=3_{\frac{120^{o}+360^{o}\cdot 3}{4}}=3_{300^{o}}$$

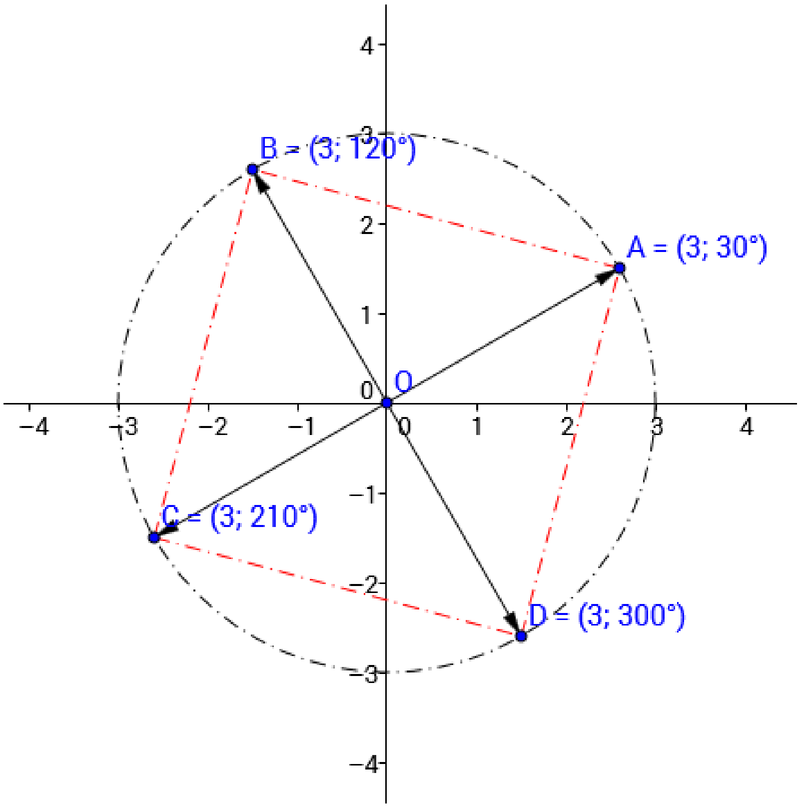
Por supuesto, en cada raíz podemos sumar todas las vueltas completas de 360º que deseemos y seguiríamos obteniendo un complejo equivalente.

También puedes comprobar que para $k=4$ → $z_4=3_{390^{o}}=3_{30^{o}}=z_0$ → Recuperamos la primera de las raíces.

Al calcular las raíces cuartas del ejemplo anterior, $z=81_{120^{o}}$, obtenemos cuatro valores distintos.

Estos valores coinciden con los vértices de un cuadrado, inscrito a su vez en una circunferencia de radio 3 . Es decir, el radio tiene como longitud la raíz cuarta de 81 .

En la siguiente gráfica hemos representado los cuatro valores solución en el plano complejo, junto a la circunferencia que circunscribe al cuadrado ya indicado.



Podemos preguntarnos por la longitud del lado del cuadrado. Dos puntos cualesquiera del plano complejo $A(a,b)$ y $B(c,d)$ estarán separados una distancia que puede calcularse de la siguiente forma:

$$distancia(A,B)=\overline{AB}=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$$

Si en nuestro ejemplo tomamos como muestra los puntos A y B , tendremos:

$$A=3_{30^o}=3\cdot cos30^o+3\cdot sen30^o\cdot i=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+3\cdot\frac{1}{2}\cdot i \quad\rightarrow\quad A(a,b)=\left(\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$B=3_{120^o}=3\cdot cos120^o+3\cdot sen120^o\cdot i=3\cdot\frac{-1}{2}+3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i \quad\rightarrow\quad B(c,d)=\left(\frac{-3}{2},\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$distancia(A,B)=\overline{AB}=\sqrt{\left(\frac{-3}{2}-\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{-3-3\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3\cdot\sqrt{3}-3}{2}\right)^2}$$

$$distancia(A,B)=\overline{AB}=\sqrt{\frac{9+27+18\cdot\sqrt{3}}{4}+\frac{27+9-18\cdot\sqrt{3}}{4}}$$

$$distancia(A,B)=\overline{AB}=\sqrt{\frac{72}{4}}=\sqrt{18}\simeq 4{,}243$$

Raíces de una ecuación. Teorema fundamental del álgebra

Si $z \in \mathbb{C}$ es solución de una ecuación polinómica con coeficientes reales, su conjugado $\overline{z}$ también es solución de la misma ecuación.

Podemos demostrar este enunciado, de manera sencilla, para un polinomio $P(x)$ de grado 2, de coeficientes reales, y con dos raíces complejas z_1 y z_2 . Si factorizamos el polinomio en sus raíces:

$$P(x)=(x-z_1)(x-z_2) \quad \text{, con } \quad x \in \mathbb{R}$$

Y el resultado de este producto debe ser real si x es real. Y, como ya demostramos en apartados anteriores, z_1 y z_2 deben ser conjugados para que su producto sea real:

$$z_2=\overline{z_1} \quad \rightarrow \quad P(x)=(x-z_1)(x-\overline{z_1}) \quad \rightarrow \quad P(x)=|x-z_1|^2 \in \mathbb{R}, \ si \ x \in \mathbb{R}$$

De manera general podemos afirmar (sin demostrar) que **todo polinomio de grado n, $n \in \mathbb{N}$, con coeficientes reales o complejos, tiene n raíces (teorema fundamental del álgebra)**.