Určení rekurentního vyjádření ze vzorce pro n-tý člen

Z daného vzorce pro n-tý člen lze **vždy** najít rekurentní vyjádření, a to mnoha způsoby (**v různých tvarech**). (Viz Př.2,3,4)

Postup: Nejčastěji a) **podílem** $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ b) **rozdílem** $a_{n+1}-a_n$. Někdy je snadnější první, jindy druhá cesta. Lze však postupovat i jiným způsobem (viz Př.1).

Př.1 Najdi rekurentní vyjádření posloupnosti, jejíž n-tý člen je dán vzorcem $a_n=\frac{1}{n(n+1)}; n\in N$

Řešení: a) podílem

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)};\ a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)};\rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{(n+2)}\rightarrow \boxed{a_{n+1}=a_n\frac{n}{n+2};\ a_1=\frac{1}{2}}$$

b) rozdílem

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n-(n+2)}{n(n+1)(n+2)}=\frac{-2}{n(n+1)(n+2)}=\frac{-2}{(n+2)}\cdot\frac{1}{n(n+1)}=\frac{-2}{(n+2)}\cdot a_n$$

$$a_{n+1}=a_n+\frac{-2}{(n+2)}\cdot a_n=a_n\left(1+\frac{-2}{(n+2)}\right)=a_n\frac{n}{n+2}\rightarrow \boxed{a_{n+1}=a_n\frac{n}{n+2};\ a_1=\frac{1}{2}}$$

c) jinak

$$a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{n}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n(n+1)}\cdot\frac{n}{n+2}=a_n\frac{n}{n+2}\rightarrow \boxed{a_{n+1}=a_n\frac{n}{n+2};\ a_1=\frac{1}{2}}$$

Př.2 $a_n=n(n+1); n\in N$

Řešení: a) podílem

$$a_{n+1}=(n+1)(n+2)\rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}=\frac{n+2}{n}\rightarrow \boxed{a_{n+1}=a_n\frac{n+2}{n};\ a_1=2}$$

b) rozdílem

$$a_{n+1}-a_n=(n+1)(n+2)-n(n+1)=\ldots=2(n+1)\rightarrow \boxed{a_{n+1}=a_n+2(n+1);\ a_1=2}$$

Zdá se, že výsledek je jiný než v a), ale snadno ukážeme, že je to totéž. Vtah lze totiž ještě dále upravit:

$a_{n+1}=a_n+2(n+1)=a_n+\frac{2}{n}n(n+1)=a_n+\frac{2}{n}a_n=a_n\left(1+\frac{2}{n}\right)=a_n\frac{n+2}{n}$**,** což je totéž jako v a)! Vidíme, že dvě zdánlivě různá rekurentní vyjádření mohou určovat tutéž posloupnost.

Př.3 $a_n=2n; n\in N$

Řešení: a) podílem

$$a_{n+1}=2(n+1)\rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2(n+1)}{2n}=\frac{n+1}{n}\rightarrow \boxed{a_{n+1}=a_n\frac{n+1}{n};\ a_1=2}$$

V tomto případě lze pokračovat ještě v úpravách a dostaneme **jiný tvar** rekurentního vyjádření:

$a_{n+1}=a_n\frac{n+1}{n}=a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)=a_n\left(1+\frac{2}{a_n}\right)=a_n+2\rightarrow \boxed{a_{n+1}=a_n+2;\ a_1=2}$**.** Tohle vyjádření je oproti předchozímu hezčí v tom, že na pravé straně vzorce vystupuje pouze a_n, ale už tam není n. Všimněte si také toho, že toto vyjádření přirozeně vystihuje základní vlastnost této posloupnosti, a sicejc to, že následující člen je vždy o 2 větší než předcházející, což vás asi nepřekvapuje, páč je to přece posloupnost 2,4,6,8,10,… - tedy posloupnost všech sudých čísel.

b) rozdílem

$a_{n+1}-a_n=2(n+1)-2n=2\rightarrow \boxed{a_{n+1}=a_n+2;\ a_1=2}$**.** Takže tady byl rozdíl mnohem jednodušší!

Př.4 $a_n = \frac{n+1}{n}; n \in N$ (Také bych ji mohl zapsat jako $a_n = 1 + \frac{1}{n}; n \in N$)

Řešení: a) podílem

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \to \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)n}{(n+1)^2} \to \boxed{a_{n+1} = a_n \frac{(n+2)n}{(n+1)^2};\ a_1 = 2}$$

b) rozdílem

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \ldots = -\frac{1}{n(n+1)} \to \boxed{a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n(n+1)}; a_1 = 2}$$

Dostáváme dva různé tvary rekurentního vyjádření. Oba obsahují na pravé straně jak *n*, tak a_n. V následujícím řešení odvodíme třetí tvar, kde už bude na pravé straně vystupovat jen a_n:

c) jinak

$$a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow a_n - 1 = \frac{1}{n} \text{ a odtud:}$$

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \xrightarrow{\text{rozšíříme } \frac{1}{n}} a_{n+1} = \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1+2(a_n-1)}{a_n} = \frac{2a_n - 1}{a_n} = 2 - \frac{1}{a_n} \to \boxed{a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}; a_1 = 2}$$

Takže jsme odvodili 3 různé tvary, to je síla, co? Jó, hele, zkuste si dosadit do každého z těch tvarů a uvidíte, že dostáváme stále tutéž posloupnost $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \cdots$

Př.5 $a_n = \frac{1}{n}; n \in N$ (čiliž je to posloupnost $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$)

Řešení: a) podílem

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \to \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \to \boxed{a_{n+1} = a_n \frac{n}{n+1};\ a_1 = 1}$$, ale s tím se nespokojíme, neboť to lze dál upravit: $a_{n+1} = a_n \frac{n}{n+1} = a_n \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = a_n \frac{1}{1+a_n} = \frac{a_n}{1+a_n} \to \boxed{a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n};\ a_1 = 1}$, což je elegantnější tvar.

b) rozdílem

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \ldots = -\frac{1}{n(n+1)} \to \boxed{a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n(n+1)}; a_1 = 1}.$$

Všimněte si, že je to až na hodnotu a_1 stejné vyjádření jako u Př.4 b). Není to žádná chyba, ani to není nic překvapivého, páč první posloupnost je $\boxed{1+\frac{1}{n}}$ a druhá je $\boxed{\frac{1}{n}}$, čili jejich členy se liší o jedničku a rozdíl kterýchkoli dvou po sobě jdoucích členů musí být stejný, proto v obou případech máme $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n(n+1)}$.

I tento tvar lze však upravit jako v a):

$$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n(n+1)} = a_n - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = a_n - a_n \cdot a_{n+1} \to a_{n+1} = a_n - a_n \cdot a_{n+1} \to a_{n+1} + a_n \cdot a_{n+1} = a_n \to a_{n+1}(1+a_n) = a_n \to$$

$\boxed{a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n};\ a_1 = 1}$, což je zasejc ten elegantní tvar jako v a).

Př.6 $a_n = \frac{n+3}{2n}; n \in N$

Řešení: a) podílem

$$a_{n+1} = \frac{n+4}{2n+2};\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+4}{n+3} \cdot \frac{n}{n+1} \to \boxed{a_{n+1} = a_n \frac{n(n+4)}{(n+1)(n+3)};\ a_1 = 2}$$

b) rozdílem

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+4}{2(n+1)} - \frac{n+3}{2n} = \frac{n(n+4)-(n+1)(n+3)}{2n(n+1)} = -\frac{3}{2n(n+1)} \to \boxed{a_{n+1} = a_n - \frac{3}{2n(n+1)};\ a_1 = 2}$$

c) jinak

$$a_n = \frac{n+3}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2n} \to \cdots n = \frac{3}{2a_n - 1} \to a_{n+1} = \frac{n+4}{2n+2} = \frac{\frac{3}{2a_n-1}+4}{\frac{6}{2a_n-1}+2} = \ldots \frac{8a_n - 1}{4(1+a_n)} \to$$

$$\boxed{a_{n+1} = \frac{8a_n - 1}{4(1+a_n)};\ a_1 = 2}$$

Př.7 $a_n = \frac{2n-1}{n+1}; n \in N$

Řešení: a) podílem

$$a_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{n+2} = \frac{2n+1}{n+2} \to \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n-1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \to \boxed{a_{n+1} = a_n \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n-1)(n+2)};\ a_1 = \frac{1}{2}}$$

b) rozdílem

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+1}{n+2} - \frac{2n-1}{n+1} = \frac{(2n+1)(n+1)-(2n-1)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{3}{(n+2)(n+1)} \to \boxed{a_{n+1} = a_n + \frac{3}{(n+2)(n+1)};\ a_1 = \frac{1}{2}}$$

c) jinak

$a_n = \frac{2n-1}{n+1} \to$ vyjádříme n: $n = \frac{a_n+1}{2-a_n}$ a dosadíme do vzorce pro a_{n+1}:

$$a_{n+1} = \frac{2n+1}{n+2} = \frac{\frac{2a_n+2}{2-a_n}+1}{\frac{a_n+1}{2-a_n}+2} = \cdots = \frac{4+a_n}{5-a_n} \to \boxed{a_{n+1} = \frac{4+a_n}{5-a_n};\ a_1 = \frac{1}{2}}$$

Př.8 $a_n = 2^n; n \in N$ (čiliž 2,4,8,16,32,…)

Řešení: a) podílem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2^n \cdot 2}{2^n} = 2 \to \boxed{a_{n+1} = 2a_{n;}\ \ a_1 = 2}$$

b) rozdílem

$$a_{n+1} - a_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n \cdot 2 - 2^n = 2^n(2-1) = 2^n = a_n \to a_{n+1} - a_n = a_n \to \boxed{a_{n+1} = 2a_{n;}\ \ a_1 = 2}$$

Př.9 $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}; n \in N$

Řešení: a) podílem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n} \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2} = -\frac{n^2}{(n+1)^2} \to \boxed{a_{n+1} = -\left(\frac{n}{n+1}\right)^2;\ a_1 = 1}$$

b) rozdílem – to je dost ošklivé, na to kašlem!