6. La pendiente

Antes de iniciar la discusión matemática de lo que es una pendiente, analizaremos el término iniciando por su origen etimológico. La palabra *pendiente* proviene del latín, del verbo "pendere", cuyo significado puede entenderse como "colgar". La palabra pendiente es un término que tiene diversos usos y significados. Como sustantivo, puede hacer referencia a algo que tiene una inclinación o declive. A veces cuando vamos caminando por la calle, notamos que nos es más fácil avanzar; pero en otros casos nos cuesta demasiado, debido a que el piso no está totalmente plano, sino que comienza a "subir" o a "bajar" en sentido vertical. A esta inclinación se le llama *pendiente*.

-Pendiente de una recta

Para comprender claramente el significado de la pendiente de una recta, es necesario posicionarse en el plano cartesiano. También toma en cuenta que la recta es una serie infinita de puntos y esos puntos se representan con un par coordenado. De esta manera, los puntos de la recta l, se pueden representar con n pares de coordenadas, (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)… (x_n, y_n). La forma en estos valores nos permite comprender el concepto de la pendiente de una recta.

Matemáticamente la pendiente de la recta es su inclinación con respecto al eje horizontal, eje de las abscisas. En la Figura 26 se pueden ver dos rectas, l y n, las cuales tienen inclinaciones distintas.

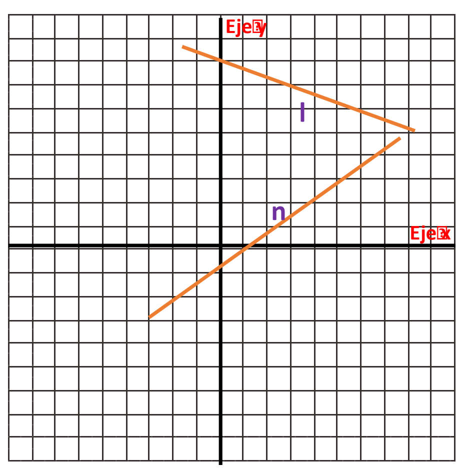

Figura 26. Rectas con inclinaciones distintas en el plano cartesiano

Derivado de la inclinación se dice que la recta tiene una pendiente positiva si se observa que los valores de la abscisa (X) incrementan al igual que los valores de la ordenada (Y). Y se dice que la pendiente de la recta es negativa si al aumentar los valores de la abscisa (X), los valores de la ordenada (Y) disminuye. La pendiente es nula cuando al aumentar los valores del eje X, los valores en el eje Y se mantienen constantes (recta paralela al eje X). El último caso es cuando los valores del eje Y aumentan mientras los valores del eje X se mantienen constantes (recta paralela al eje Y), en este caso la pendiente se dice no definida.

NOTA: La importancia de comprender la pendiente de una recta es debido a que este concepto lo verás en Cálculo Diferencial y encontrarás que tiene aplicaciones para resolver diversos problemas de optimización.

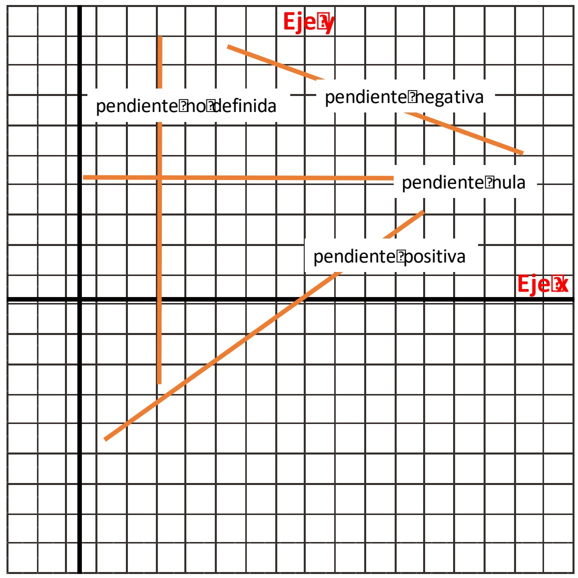

Figura 27. Rectas con distintos valores de la pendiente

-La ecuación de la pendiente

Matemáticamente la pendiente de una recta se define como la relación del cambio vertical con respecto a la horizontal y se denota con la letra m. También se puede definir con base en el ángulo que forma con respecto al eje X. Recuerda que se había dicho que el punto de referencia para medir la inclinación de una recta sería el eje X.

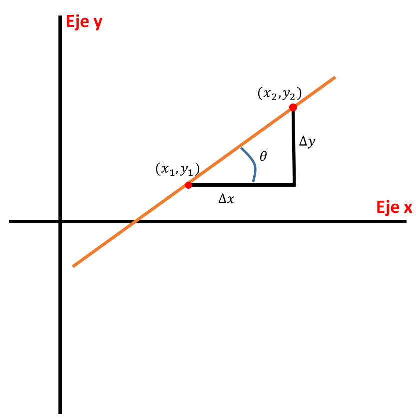

Figura 28. La pendiente y el ángulo de inclinación.

En la Figura 28 se pueden ver dos puntos donde se puedes definir un cambio (o incremento) por medio de restar los valores de los pares coordenados. Los cambios se calculan como tanto para el eje X y eje Y como:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$
$$\Delta y = y_2 - y_1 \qquad \text{Ecn. 20}$$

Con base en los cambios se calcula la pendiente como,

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{Ecn.21}$$

Observa con base en la figura que los cambios corresponden a los catetos de un triángulo rectángulo, considerando la posición del ángulo θ, el cateto opuesto (c.o) corresponde Δy, y el cateto adyacente (c.a) corresponde a Δx. Con base en la trigonometría se sabe que la tangente del ángulo es:

$$\tan(\theta) = \frac{c.o}{c.a} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \text{Ecn. 22}$$

Por lo tanto la pendiente de la recta es igual a la tangente del ángulo,

$$\tan(\theta) = m \qquad \text{Ecn.23}$$

-Ángulo de inclinación y pendiente de una recta

Debido al concepto de pendiente es ampliamente utilizado en distintas aplicaciones, es necesario seguir discutiendo el tema. Se estableció anteriormente que la pendiente de una recta es igual a la tangente del ángulo de inclinación (θ), y este ángulo se mide considerando el eje de X.

El ángulo de inclinación θ de una recta l es el que forma dicha recta con el eje X, medido a partir de la dirección positiva del eje hacia la recta en sentido contrario de las manecillas del reloj.

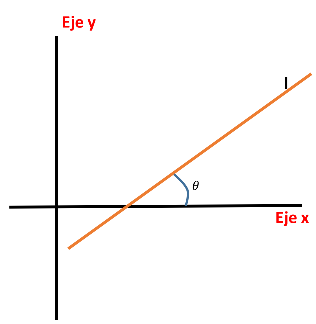

Figura 29. El ángulo de inclinación de una recta.

El rango de valores del ángulo es,

$$0 \leq \theta \leq 180° \qquad \text{Ecn.24}$$

Con base en el valor del ángulo, la recta puede tener una pendiente positiva, negativa, cero o no definida. De esta manera se tiene:

1. Pendiente cero: si $\theta = 0°$, entonces $m = 0$.
2. Pendiente positiva: si $0° \leq \theta \leq 90°$, entonces $m > 0$.
3. Pendiente negativa: si $90° \leq \theta \leq 180°$, entonces $m < 0$.
4. Pendiente cero: si $\theta = 90°$, entonces m no está definida.

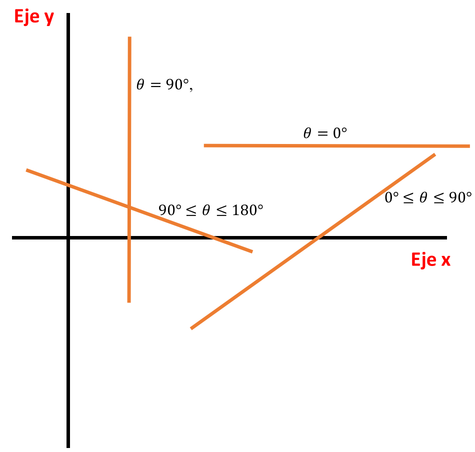

Figura 30. Diferentes valores del ángulo de inclinación de un recta

-Cálculo para obtener el ángulo a partir del valor de la pendiente

Para calcular el ángulo a partir del valor de la pendiente se utiliza la función inversa de la tangente,

$$\theta = \arctan(m) = tan^{-1}(m) \qquad \text{Ecn.25}$$

Nota: la operación arctan está representada en una calculadora como tan^{-1}.

Un ejemplo sencillo de esta operación lo puedes aplicar si consideras que la pendiente de una carretera es de 0.3 unidades. El ángulo de inclinación de la carretera lo calculas como.

$$\theta = \arctan(0.3) = 16.70° \qquad \text{Ecn.26}$$

En el **ejemplo de conversión** denominado pendiente de una recta que se encuentra, en el apartado de desarrollo, pestaña 2, en el Taller de matemáticas, realiza el ejercicio y observa cómo varia el valor del ángulo conforme modificas el valor de la pendiente; puedes escribir valores positivos, negativos y cero. También observa el cambio de la posición de la recta.
Disponible en: http://campusvirtual.cua.uam.mx/material/tallerm/12_Pendiente_De_Una_Recta_html/index.html#

-Obtener la pendiente de una recta a partir de su gráfica

Para llevar a cabo el cálculo de la pendiente de una recta se requiere de las coordenadas de dos puntos que pertenezcan a la recta. Retomando la figura anterior, se puede ver que se tienen los dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$. El punto $P_3 = (x_2, y_1)$, se localiza al proyectar los catetos de un triángulo rectángulo.

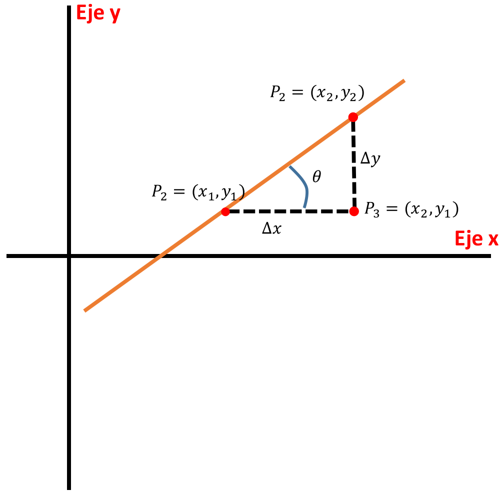

Figura 31. La recta y los puntos de la recta.

Formalmente el cálculo de la pendiente se basa en el cálculo de la distancias entre los tres puntos:

$$m = \frac{d((x_2,y_2),(x_2,y_1))}{d((x_2,y_1),(x_1,y_1))} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \text{Ecn.27}$$

Al sustituir los valores de los puntos, el valor de la pendiente puede tener valores positivos y negativos

En los casos donde la pendiente es cero o no está definida los valores x y y, son:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 0 \qquad \text{Ecn.28}$$

Ya que, $y_2 = y_1$, la recta tiene una posición horizontal.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow es\ indefinida \qquad \text{Ecn.29}$$

Ya que, $x_2 = x_1$, la recta tiene una posición vertical.

En el **ejercicio interactivo** del taller de matemáticas sobre el tema: obtener la pendiente de una recta a partir de su gráfica, que se encuentra en la sección de desarrollo, pestaña 3, en la parte de abajo, puedes revisar el procedimiento de obtención de la pendiente de una recta a partir de su gráfica. Disponible en:
http://campusvirtual.cua.uam.mx/material/tallerm/12_Pendiente_De_Una_Recta_html/index.html
Es importante que hagas los ejercicios de simulación para que entiendan bien cada uno de los temas antes de realizar los ejercicios que se te pedirán y si te queda duda consulta con los facilitadores o con tu grupo en el foro de dudas.

-Conclusión: La recta: historia y definición

A manera de conclusión del tema de la recta y su pendiente te recomiendo la lectura sobre la historia de la recta, disponible en el taller interactivo de matemáticas, la cual te permitirá comprender que la definición de lugares geométricos tiene un componente filosófico.
La lectura sobre la historia de la recta está disponible en:
http://campusvirtual.cua.uam.mx/material/tallerm/13_Ecuacion_De_La_Recta_html/index.html

El inicio de la geometría formal fue desarrollado por **Euclides**. En ella se comienza definiendo los términos primitivos como el **punto**, la **recta** y las **relaciones de incidencia, orden y congruencia**. Todos estos términos evocan una idea intuitiva; sin embargo, su fundamentación se desarrolla con base en ideas muy complejas.

Cuando queremos definir lo que es una *línea recta*, es fácil imaginarla, pero ¿cómo podemos conceptualizarla? Parece haber una respuesta sencilla, la sabemos, pero nos cuesta trabajo formularla, por lo que simplemente terminamos trazando la recta.

El concepto matemático de la línea recta establece que es "una sucesión continua de puntos en una misma dirección". En la literatura de la geometría analítica encontramos que "la recta es el lugar geométrico de los puntos tales que, tomados dos cualesquiera del lugar geométrico, el valor de la pendiente siempre resulta constante".

Para comprender la definición de línea recta necesitamos conocer varios conceptos, como *lugar geométrico* y *pendiente*.

- **Lugar geométrico**: Es el conjunto de los puntos, y solamente de aquellos puntos, cuyas coordenadas satisfagan una ecuación. Se llama *gráfica de la ecuación* o bien, su *lugar geométrico*.
- **Pendiente de una recta**: Es la inclinación de una recta con respecto a la horizontal.

A lo largo de la historia muchos otros pensadores han dado su definición:

- Es la línea cuyos puntos intermedios hacen sombra a sus extremos. (Platón, 427-347)
- Es el conjunto de puntos que permanecen invariantes cuando un cuerpo gira alrededor de dos de sus puntos. (Leibniz, 1646-1716)

- Es el camino más corto entre dos puntos. (Legendre, 1752-1833)
- Es la línea que, trazada de un punto a otro, no se vuelve ni a la derecha ni a la izquierda, y es la más corta que puede trazarse entre esos dos puntos. (Simpson, 11710-1761)
- La recta es una serie de puntos, cada uno de los cuales equidista de tres puntos dados. (Fourier, 1768-1830)
- Es una línea homogénea, es decir, cuyas partes, tomadas indiferentemente, son semejantes entre sí y no difieren más que en su longitud. (Delboeuf, 1831-1896)
- Es una línea indefinida tal que por dos puntos dados no se puede hacer pasar más que una. (Duhamel, 1797-1872)

Referencias

[1] Taller interactivo de Matemáticas. Campus virtual UAM- Cuajimalpa. Disponible en: http://campusvirtual.cua.uam.mx/material/tallerm/12_Pendiente_De_Una_Recta_html/index.html

[2] Taller interactivo de Matemáticas. Campus virtual UAM- Cuajimalpa. Disponible en: http://campusvirtual.cua.uam.mx/material/tallerm/13_Ecuacion_De_La_Recta_html/index.html

[3] Olvera, R. Plano cartesiano y la recta. UAM Cuajimalpa.