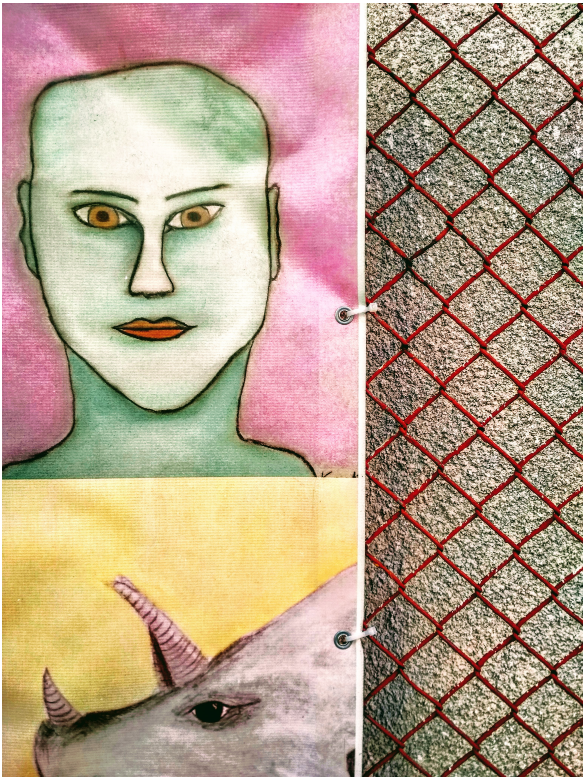
Gonio-meditace

Součet dvou sinusoid stejných frekvencí

Žán Pól Kastról



23. ledna 2022

1 Motivace

Ve fysice potřebujeme vědět, jak mathematicky popsat skládání dvou dvou *kmitů*, resp. dvou *vln* se **stejnými frekvencemi** a amplitudami A_1, A_2 (kladná čísla), které jsou vzájemně fázově posunuty o p.

$$y_1 = A_1 \sin x \qquad y_2 = A_2 \sin(x+p)$$

Sinusoidy mají stejné frekvence (před x je v obou případech koef. 1) a druhá je vůči první posunuta o posun p. Zajímá nás jejich součet

$$\boxed{y = y_1 + y_2 = A_1 \sin x + A_2 \sin(x+p)}$$

Stačí uvažovat posun $p \in (-\pi; \pi\rangle$

2 Případ $A_1 = A_2$

Uvažujme nejprve jednodušší případ stejných amplitud $A_1 = A_2$.

2.1 Odvození pomocí goniom. vzorců

To je snadné, vytkneme A_1

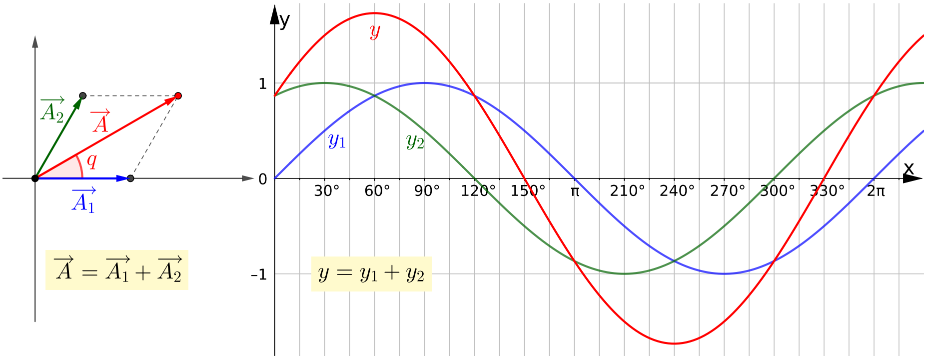
$$A_1 \sin x + A_1 \sin(x+p) = A_1[\sin x + \sin(x+p)]$$

a použijeme známý goniometrický vztah

$$\boxed{\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Dostáváme

$$y = 2A_1 \sin\frac{2x+p}{2}\cos\frac{-p}{2}$$



Obr. 1: $A_1 = A_2$

https://www.geogebra.org/m/ccagvvur

$$y = 2A_1 \cos\frac{p}{2} \cdot \sin\left(x + \frac{p}{2}\right)$$

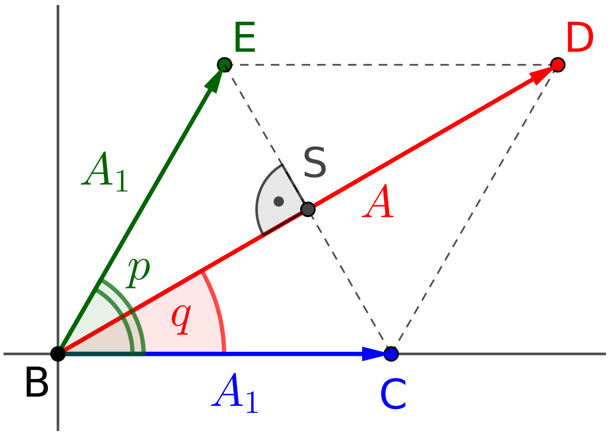
tedy vznikla opět sinusoida (obr.1) s amplitudou A rovnou konstantě $2A_1 \cos\frac{p}{2}$ a s posunem q polovičním než p.

$$\boxed{y = A \cdot \sin(x + q)} \tag{1}$$

$$\boxed{A = 2A_1 \cos\frac{p}{2} \quad ; \quad q = \frac{p}{2}} \tag{2}$$

2.2 Odvození pomocí fázorů

Skládání sinusoid je možné pojímat názorně také jako skládání **fázorů** (viz odkaz na aplet v GeoGebře u obr.1). Potom vztah (2) snadno odvodíme z obr.2.



Obr. 2: $ABCD$ je kosý čtverec!

Pač $A_1 = A_2$, tvoří fázory kosočtverec $BCDE$. Úhlopříčka BD potom půlí úhel p, pročež $\varphi = \frac{p}{2}$. Tedy posun výsledného průběhu y je vskutku $\frac{p}{2}$.

Dále víme, že S je střed AD, takže $BS = \frac{A}{2}$. Ale z pravoúhlého ΔBSE máme $BS = A_1 \cos\frac{p}{2}$. Proto vskutku $A = 2A_1 \cos\frac{p}{2}$.

2.3 Sinus plus kosinus

Speciálním případem součtu dvou sinusoid se stejnými amplitudami je

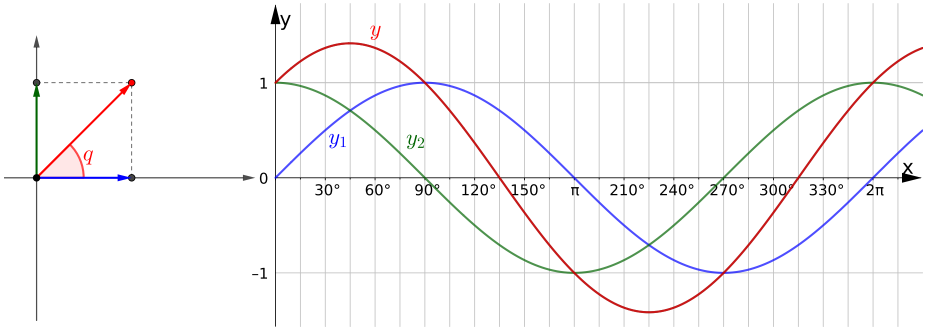
$$\sin x + \cos x$$

Přepíšeme na

$$\sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Do (2) dosadíme tedy $p = \frac{\pi}{2}$, $A_1 = 1$ a máme

$$\sin x + \cos x = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$



Obr. 3: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$\boxed{\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \tag{3}$$

Tento výsledek je krástně zřejmý také z konfigurace fázorů (obr.3), které jsou na sebe kolmé, takže tvoří jednotkový čtverec. Pročež amplituda je jeho úhlopříčka $\sqrt{2}$ a posun je zřejmě 45 stupňů, tedy $q = \frac{\pi}{4}$.

3 Případ $A_1 \neq A_2$

3.1 Odvození pomocí fázorů

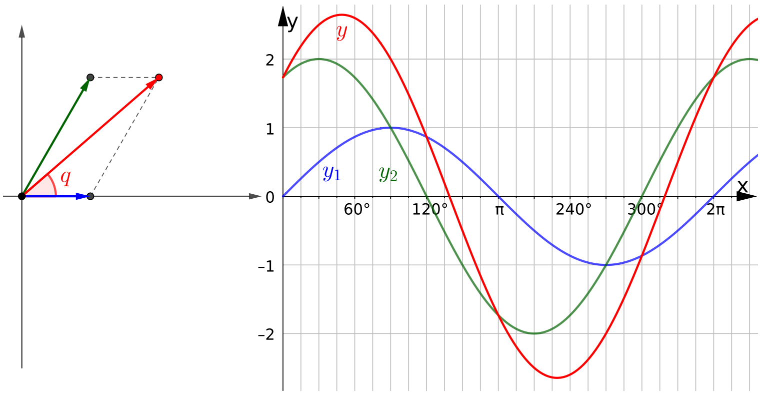
Hledáme součet dvou sinusoid:

$$y_1 + y_2 = A_1 \sin x + A_2 \sin(x + p)$$

Sinusoidy y_1 a y_2 jsou v obrázcích 4 a 5 reprezentovány fázory $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$. Součtem těchto fázorů je fázor $\overrightarrow{A}$, který reprezentuje zřejmě sinusoidu

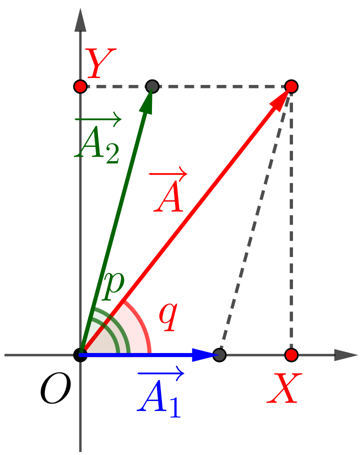
$$y = A\sin(x + q)$$

s amplitudou A a fázovým posuvem q, která je součtem sinusoid y_1 a y_2.



Obr. 4: $A_1 \neq A_2$

https://www.geogebra.org/m/dvqjddx8



Obr. 5

Souřadnice fázorů zřejmě jsou:

$$\overrightarrow{A_1} = (A_1; 0)$$
$$\overrightarrow{A_2} = (A_2 \cos p; A_2 \sin p)$$
$$\overrightarrow{A} = (A \cos q; A \sin q)$$

Protože

$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{A_1} + \overrightarrow{A_2}$$

platí pro souřadnice fázoru $\overrightarrow{A} = [X; Y]$[1]:

$$\boxed{A \cos q = \underbrace{A_1 + A_2 \cos p}_{X}} \tag{4}$$

$$\boxed{A \sin q = \underbrace{A_2 \sin p}_{Y}} \tag{5}$$

Naším cílem je najít neznámé A a q, tedy vyřešit soustavu rovnic (4) a (5). Přitom pravé strany rovnic X a Y známe, pač známe A_1, A_2, p.

Poznámka: Všimněme si, že vlastně známe *kartézské souřadnice* X a Y vektoru $\overrightarrow{A}$ a hledáme jeho *polární souřadnice* A a q.

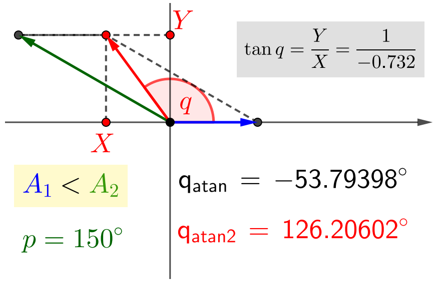
Výpočet A: Amplituda A je zřejmě velikostí vektoru $\overrightarrow{A} = [X; Y]$:

$$A = \sqrt{X^2 + Y^2}$$
$$A = \sqrt{(A_1 + A_2 \cos p)^2 + (A_2 \sin p)^2}$$

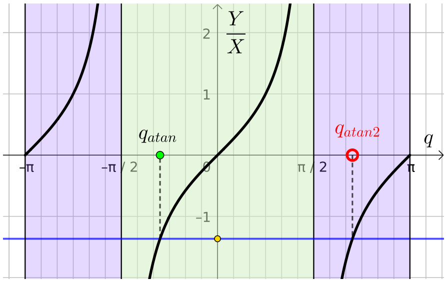
Po pár úpravách dostáváme:

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + 2A_1A_2 \cos p + A_2^2}} \tag{6}$$

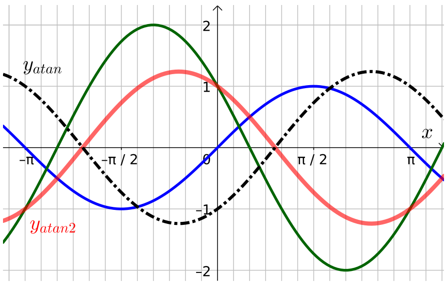
[1] Použijeme velká písmena, pač y již označuje hledanou sinusoidu.



(a) Pro $X < 0$ by dala funkce atan(x) chybnou hodnotu q.



(b) Správnou hodnotu dostaneme v případě $Y \geq 0$ přičtením π. Pro $Y \leq 0$ odečtením π.



(c) Správný (červeně) a chybný průběh (čerchovaně) funkce y.

Obr. 6: Použití funkce atan $2(y, x)$ pro výpočet q.

https://www.geogebra.org/m/uvs7v7wr

Výpočet q: Vydělením rovnice (5) rovnicí (4) dostáváme

$$\boxed{\operatorname{tg} q = \frac{Y}{X}} \tag{7}$$

Nyní stačí vyřešit goniometrickou rovnici (7). Je to vlastně rovnice pro výpočet *polární úhlové souřadnice* ze známých souřadnic *kartézských*.

V apletu, na který je odkaz v popisu k obrázku 4, se můžeme přesvědčit, že pro $A_1 > A_2$ spadá q do intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Zde můžeme bez obav použít k vyřešení rovnice (7) funkci $\arctan(x)$, která dává rovněž hodnoty z intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ale pro $A_1 < A_2$ vychází pro $X < 0$ hodnota q mimo interval $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ a správnou hodnotu q je potřeba dopočítat přičtením nebo odečtením π. (Pro $X = 0$ není sice zlomek $\frac{Y}{X}$ definován, ale např. GeoGebra dá správnou limitní hodnotu q jako $\pm\frac{\pi}{2}$.)

Funkce $\operatorname{atan2}(y, x)$: Pro obecné řešení rovnice (7) bez dopočítávání s ohledem na znaménka X a Y je výhodné místo funkce $\operatorname{atan}(x)$ použít funkci $\operatorname{atan2}(y, x)$, která byla zavedena v různých programovacích jazycích[2], aby usnadnila právě převod kartézských souřadnic na polární, a je dostupná také v GeoGebře. Tato funkce sama vybere správnou hodnotu q na základě analýzy znamének X a Y. Je totiž chytře definovaná takto:

$$\operatorname{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{pro } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{pro } x < 0 \wedge y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{pro } x < 0 \wedge y < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & \text{pro } x = 0 \wedge y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{pro } x = 0 \wedge y < 0 \\ \text{nedef.} & \text{pro } x = 0 \wedge y = 0 \end{cases}$$

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Atan2

Řešením rovnice (7) je tedy

$$\boxed{q = \operatorname{atan} 2\,(Y, X)} \tag{8}$$

Pokud bychom pro vykreslení součtu $y_1 + y_2$ použili v GeoGebře funkci $\operatorname{atan}(x)$ a nikoli správnou $\operatorname{atan} 2(y, x)$, dostali bychom pro $X < 0$ chybný průběh (viz obr.(6c)).

3.2 Odvození pomocí goniom. vzorců

Máme najít součet

$$y = y_1 + y_2 = A_1 \sin x + A_2 \sin(x + p)$$

Problém je v tom, že nemůžeme vytknout amplitudu, pač je každá jiná. Místo toho použijeme na druhý člen vztah pro sinus součtu.

$$\begin{aligned}
y &= A_1 \sin x + A_2(\sin x \cos p + \cos x \sin p) \\
y &= A_1 \sin x + A_2 \sin x \cos p + A_2 \cos x \sin p \\
y &= \underbrace{(A_1 + A_2 \cos p)}_{A \cos q} \sin x + \underbrace{A_2 \sin p}_{A \sin q} \cos x
\end{aligned}$$

Udělali jsme šílenou fintu s označením:

$$\boxed{A \cos q = A_1 + A_2 \cos p} \tag{9}$$

$$\boxed{A \sin q = A_2 \sin p} \tag{10}$$

Máme tedy

$$\begin{aligned}
y &= A \cos q \sin x + A \sin q \cos x \\
y &= A(\cos q \cdot \sin x + \sin q \cdot \cos x)
\end{aligned}$$

Nyní na součet v závoře použijeme vzorec pro sinus součtu a dostáváme

$$\boxed{y = A\sin(x+q)} \tag{11}$$

Součet dvou sinusoid jsme tedy vyjádřili jako jedinou sinusoidu s amplitudou A a posunutím q.

Zbývá určit A a q. K tomu nám poslouží rovnice (9) a (10). Je to totiž soustava dvou rovnic právě pro naše hledané neznámé.

Určení amplitudy A: umocněním a sečtením těchto rovnic dostáváme:

$$\begin{aligned} A^2\cos^2 q + A^2\sin^2 q &= (A_1 + A_2\cos p)^2 + A_2^2\sin^2 p \\ A^2(\cos^2 q + \sin^2 q) &= A_1^2 + 2A_1A_2\cos p + A_2^2\cos^2 p + A_2^2\sin^2 p \\ A^2 &= A_1^2 + 2A_1A_2\cos p + A_2^2 \end{aligned}$$

Odtud máme pro amplitudu

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + 2A_1A_2\cos p + A_2^2}} \tag{12}$$

Určení posunutí q: Opět použijeme funkci $\operatorname{atan} 2(y, x)$.