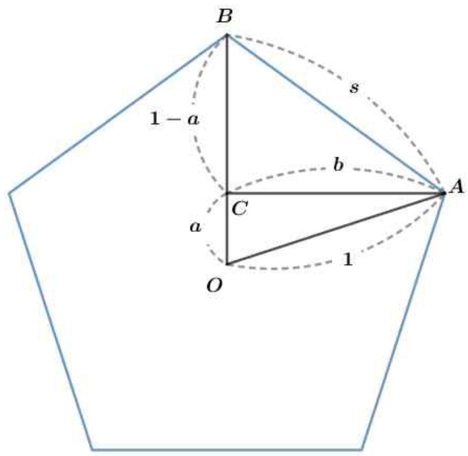
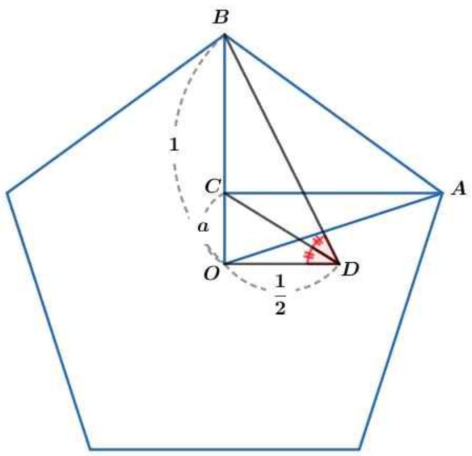
원 모양 종이로 정오각형 접기에 대한 해설

1. 외접원의 반지름이 1일 때, 정오각형 한 변의 길이 s





해결 순서 :

① $\triangle DOC$에서 a값을 구한다. → ② $\triangle AOC$에서 b값을 구한다. → ③ $\triangle ABC$에서 s를 구한다.

계산

① $\triangle BOD$에서 $\overline{BD}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$이다. $\angle CDO=\theta$라 하면 $\triangle BDO$를 통해 $\cos 2\theta=\dfrac{\overline{OD}}{\overline{BD}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$$\tan\theta=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}{1+\frac{1}{\sqrt{5}}}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

(※ 참고 $\overline{OC}:\overline{OD}=1:\phi$, $\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$)

$$\therefore\ a=\frac{1}{2}\tan\theta=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

② $\triangle AOC$에서

$$\therefore\ 1^2-a^2=b^2$$

(※ 참고 $b=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}=\sqrt{1-\dfrac{6-2\sqrt{5}}{16}}=\sqrt{\dfrac{10+2\sqrt{5}}{16}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$)

③ $\triangle ABC$에서

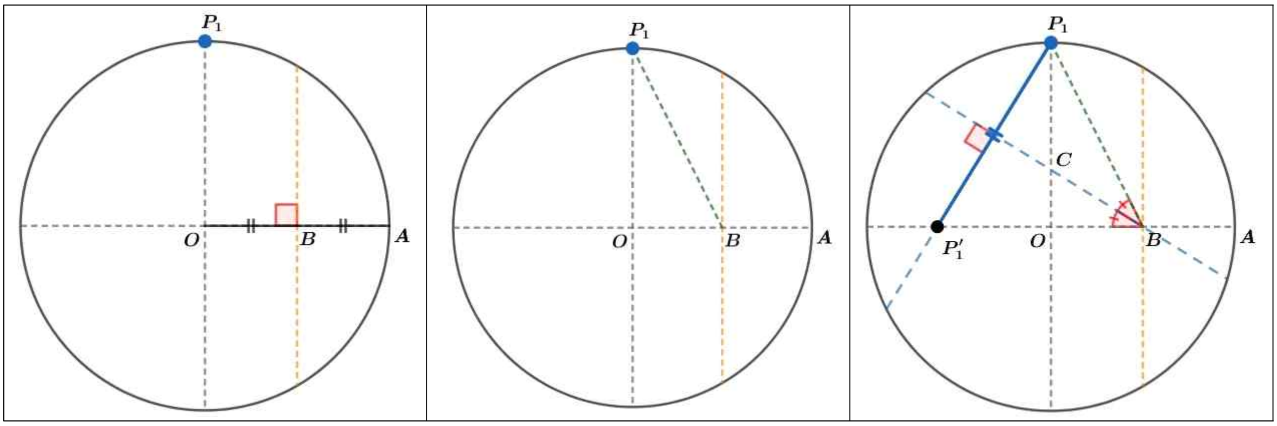
$$s^2=(1-a)^2+b^2=(1-a)^2+(1-a^2)=2-2a=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore\ s=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

※ 참고 $s=\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\dfrac{10-2\sqrt{5}}{4}}=\sqrt{\dfrac{6-2\sqrt{5}}{4}+\dfrac{4}{4}}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+1}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{\phi}\right)^2+1^2}$

→ s는 황금비 역수의 길이$\left(\dfrac{1}{\phi}\right)$와 1의 길이를 갖는 직각삼각형의 빗변의 길이로도 해석된다.

2. 원모양 종이접기에서 나타난 길이 설명



① $\overline{OB}=\dfrac{1}{2}$

② $\overline{BP_1}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

③ $\triangle CBO$에서 $\angle CBO=\theta$라고 하면 $\triangle P_1BO$를 통해 $\cos 2\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

위 1-①에서 $\overline{OC}:\overline{OB}=1:\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 임을 계산해두었다.

④ $\triangle P_1P_1'O \sim \triangle CBO$ 이므로 $\overline{P_1'O}:\overline{P_1O}=1:\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$의 비율을 갖는다.

⑤ $\overline{P_1O}=1$ 이므로 $\overline{P_1'O}=\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ $\left(=\dfrac{1}{\phi}\right)$

⑥ $\overline{P_1P_1'}=\sqrt{\overline{P_1'O}^2+\overline{P_1O}^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+1}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{\phi}\right)^2+1}=\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}=s$

따라서 **P_1을 지나고** 길이가 $s=\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}$ 인 선분을 만들었다.

※ **종이접기**이기 때문에 **P_1을 지나는 조건을 만족**시키는 것이 매우 중요하다. **오차가 적으면서도** 편하게 정오각형의 한 변($\overline{P_1P_2}$)을 찾을 수 있기 때문이다.