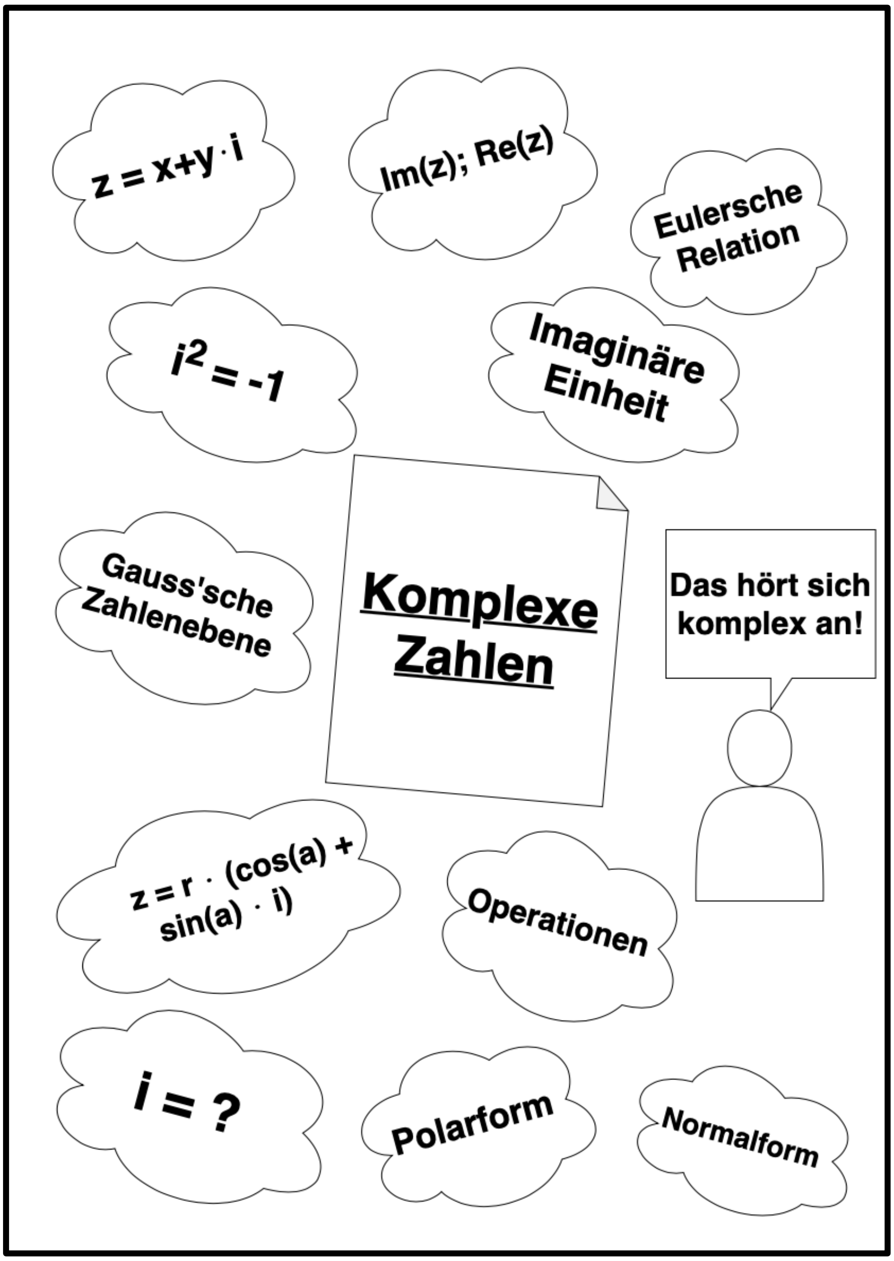
Mathematik für BYOD-Klassen

Einführung in die Komplexen Zahlen



Titelbild: Komplexe Zahlen

inspiriert vom Leitprogramm zu den Komplexen Zahlen der ETH Zürich (siehe Quellenverzeichnis), vom Skript zu den Komplexen Zahlen von den Mathematiklehrpersonen Hansruedi Aeschbach und Theo Zahno-Kressig sowie von der Formelsammlung von Adrian Wetzel (siehe Quellenverzeichnis)

Inhaltsverzeichnis

1. Arbeitsanleitung 4
2. Fachliches Vorwissen / Repetition 6
  2.1 Zahlenmengen 6
  2.2 Quadratische Gleichungen 7
  2.3 Trigonometrische Funktionen 8
  2.4 Gradmass und Bogenmass 8
  2.5 Vektorgeometrie 11
  2.6 Die Eulersche Zahl e (Bonus) 12
3. Einleitung 14
  3.1 Zahlenbereichserweiterung 14
  3.2 Die imaginäre Einheit i 15
  3.3 Vorsicht mit neuen Zahlen 16
  3.4 $i \neq \sqrt{-1}$ 17
  3.5 Ist i positiv oder negativ? 17
  3.6 Komplexe Zahlen in Normalform 18
4. Operationen von Komplexen Zahlen 21
  4.1 Addition zweier Komplexen Zahlen 21
  4.2 Subtraktion zweier Komplexen Zahlen 22
  4.3 Multiplikation zweier Komplexen Zahlen 24
  4.4 Konjugiert Komplexe Zahl 25
  4.5 Division zweier Komplexer Zahlen 28
5. Geometrische Darstellung in kartesischer Form 30
  5.1 Gauss'sche Zahlenebene 30
  5.2 Operationen 37
    5.2.1 Addition 37
    5.2.2 Subtraktion 40
    5.2.3 Betrag 43
    5.2.4 Multiplikation und Division 44

6. Geometrische Darstellung in polarer Form **48**
  6.1 Komplexe Zahlen in Polarform **48**
  6.2 Eulersche Relation **53**
  6.3 Operationen **60**
    6.3.1 Multiplikation **60**
    6.3.2 Division **64**
7. Formelsammlung: Komplexe Zahlen **68**
8. Quellen- und Abbildungsverzeichnis **70**
  8.1 Quellenverzeichnis **70**
  8.2 Abbildungsverzeichnis **70**

1. Arbeitsanleitung

Das vorliegende Vermittlungsskript dient dazu, den Erwerb von neuen Informationen möglichst effizient, visuell und persönlich zu gestalten. Das Ziel wird dadurch erreicht, indem von A bis Z alles durchdacht wurde. Mit interaktiven Elementen, visuellen Darstellungen, akustisch und visuell aufgezeigten Materialien sowie mit Transparenz soll das Vermittlungsskript Freude beim Lernen zubereiten. Die technisch möglichen Mittel, welche das ganze Vermittlungsskript hinüber benutzt wurden, sollen das Erlernen vereinfachen. Dabei war es mir wichtig, dass jede Person, ob vorwissend oder nicht, eine Chance hat, das Vermittlungsskript durchzuarbeiten. Hierbei kann man sich dem eigenen Tempo anpassen.

Das ist auch der Grund, weshalb im ersten Schritt mit einer Repetition gestartet wird. Diesbezüglich ist jede Person grundsätzlich frei, ob die Repetition ganz, teilweise oder gar nicht durchgearbeitet wird. Bei Schwierigkeiten mit den erforderten fachlichen Vorkenntnissen ist es empfehlenswert, die einzelnen Themen zu repetieren. Dies hat den Hintergrund, dass die in Kapitel 2 vermittelten Themen den Grundbaustein darstellen, um daraufhin das Wissen zu den Komplexen Zahlen aufbauen zu können.

In einem nächsten Schritt geht es darum, das Thema "Komplexe Zahlen" einzuleiten. Was genau sind überhaupt "Komplexe Zahlen"? Der Beantwortung dieser Frage widmet sich Kapitel 3.

In Kapitel 4 geht es um Rechenregeln für Komplexe Zahlen. Hierbei ist das Ziel, Komplexe Zahlen addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren zu können.

Kapitel 5 dient dazu, der Addition und Subtraktion von Komplexen Zahlen einen geometrischen Sinn zu geben. Hierbei sehen wir uns Komplexe Zahlen in der Komplexen Zahlenebene an und stellen Komplexe Zahlen visuell in der Normalform dar. Aufgrund dessen können wir die Addition wie auch die Subtraktion geometrisch interpretieren.

Schlussendlich geht es in Kapitel 6 um eine andere Schreibweise der Komplexen Zahlen, der sogenannten Polarform. Die Polarform ermöglicht es, der Multiplikation wie auch der Division zweier Komplexer Zahlen einen geometrischen Sinn zu geben und schildert dies visuell. Mithilfe der Polarform entstehen neue Möglichkeiten, die Komplexen Zahlen auf eine andere Art und Weise zu verstehen und somit unser Wissen zu vertiefen.

Als Zusatz dient Kapitel 7, da darin die von mir erstellte Formelsammlung abgebildet ist und jederzeit für einen Überblick dient wie auch als Hilfestellung beim Lösen von Aufgaben.

Kapitel 8 beinhaltet sowohl das Quellenverzeichnis als auch das Abbildungsverzeichnis.

Am Anfang habe ich darüber gesprochen, dass Technologien weiterbringen und Prozesse vereinfachen sollen. Mein Vermittlungsskript soll dafür einen Lösungsansatz darstellen.

Das Besondere an diesem Vermittlungsskript ist, dass es sich nicht um ein übliches mathematisches Skript handelt. Das vorliegende Skript ist mit interaktiven Elementen versehen, welche im Laufe des Skripts - meist am Ende eines Unterthemas oder eines Kapitels - auftauchen werden. Aber wie? Mithilfe von QR-Codes kann zu meiner Website auf GeoGebra gelangt werden. Das soeben Gelernte visuell dargestellt zu bekommen und selber umstellen zu können, ist das Ziel der QR-Codes und fördert somit die Art, dem Gelernten auf einer persönlichen Ebene zu begegnen. Nicht nur interaktive Elemente werden mittels QR-Codes auffindbar, sondern auch Kurztests, die am Ende eines Kapitels eingebaut sind. Das Ziel dieser Kurztests ist, das Gelernte anzuwenden und somit sich selber zu überprüfen. Zusätzlich gibt es einige akustisch und visuell dargestellte Videos in Form von kurzen Bildschirmaufnahmen mit beigefügtem Ton, welche auf YouTube hochgeladen und in GeoGebra eingefügt worden sind. Diese sollen helfen, das Gelernte visuell und akustisch mit mir zusammen zu repetieren und hilft wiederum dabei, dem Vermittlungsskript - auch wenn keine Lehrperson dabei sein sollte - eine persönliche Eigenschaft zu verleihen.

Aber was ist mit jenen, die keine Chance haben, die QR-Codes einzuscannen? Noch ein spezieller Punkt dieses Vermittlungsskripts ist, dass von A bis Z alles durchdacht wurde. Dies wurde folgendermassen ermöglicht:

Jene Personen, die lieber analog arbeiten, benötigen zum Scannen von den QR-Codes ein funktionsfähiges und mit dem Internet verbundenes Smartphone.

Jene Personen, die an einem Laptop, Tablet oder Convertible arbeiten, benötigen entweder ein Smartphone zum Scannen von den QR-Codes oder können durch einen Klick auf die QR-Codes auf die von mir gewünschte Website gelangen.

Falls keines der Vorgänge aus jeglichen Gründen funktionieren sollte, steht oberhalb der QR-Codes der Link ausgeschrieben. Zusätzlich ist der Inhalt der QR-Codes aufgeführt, sodass es möglichst übersichtlich bleibt.

Da das Scannen von QR-Codes meist eine spezifische Applikation benötigt, empfehle ich für iOS-Nutzer empfehle ich die Applikation "QR Code Scanner" von *TinyLab* und für Android-Nutzer die Applikation "kostenloser QR-Codeleser" von *TWMobile*.

Im folgenden QR-Code befindet sich das von mir erstellte Skript auf GeoGebra.

Inhalt: Skript zur Einführung in die Komplexen Zahlen
Link: https://www.geogebra.org/m/rhbsr8x9

Abb. 1: QR-Code 01

2. Fachliches Vorwissen / Repetition

Um die Komplexen Zahlen verstehen zu können, ist es wichtig, fachliches Vorwissen zu haben, zu repetieren und/oder zu erwerben. Dies hat den Hintergrund, die Sachverhalte im Bereich der Komplexen Zahlen einfacher nachvollziehen zu können.

Für die Repetition wie auch das ganze Skript über werden oft Formeln benutzt, die aus meiner eigenkreierten Formelsammlung stammen. Einerseits können die Formeln für das Lösen der Aufgaben nützlich sein, andererseits dienen sie auch als Überblick für das im Skript behandelte Thema. In der Formelsammlung sind lediglich die Formeln zu den Komplexen Zahlen aufgeführt und nicht jene Formeln, die in der Repetition in Kapitel 2 benutzt werden. Es ist empfehlenswert, Zugriff auf die Formelsammlung haben zu können. Aus Sicherheitsgründen ist die Formelsammlung auch in Kapitel 7 aufgeführt.

Inhalt: Formelsammlung zu den Komplexen Zahlen
Link: https://www.geogebra.org/m/pvngs3rx

Abb. 2: QR-Code 02

Hinweis: Diejenigen Personen, die die in Kapitel 2 behandelten Themen bereits kennen und beherrschen, können direkt zu Kapitel 3 übergehen.

2.1 Zahlenmengen

Zahlenmengen ist jener Bereich der Mathematik, welcher für grundsätzlich alle Berechnungen rund um die Mathematik gebraucht wird. Sie enthalten alle die in der Mathematik vorkommenden Zahlenbereiche und helfen uns, die von uns gebrauchten Zahlen zu verstehen und einzuordnen. Folgende Abbildung dient als Veranschaulichung.

Zahlenbereich	**Beispiele**
Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$	$\mathbb{N} = \{\boldsymbol{1, 2, 3, \dots}\}$
Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} = \{\boldsymbol{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots}\}$
Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q} = \left\{\boldsymbol{\frac{m}{n}} \mid \boldsymbol{m, n} \in \mathbb{Z},\ \boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0}\right\} = \left\{\boldsymbol{\frac{1}{2}, \frac{-5}{7}, \dots}\right\}$
Irrationale Zahlen $\mathbb{I}$	$\mathbb{I} = \{\boldsymbol{\pi, e, \sqrt{2}, \dots}\}$
Reelle Zahlen $\mathbb{R}$	$\mathbb{R} = \left\{\boldsymbol{\pi, \frac{3}{4}, \dots}\right\}$

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass es sich bei den Natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ um die uns am bekanntesten und am "normalsten" vorkommenden Zahlen handelt. Bei den Ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ kommt noch der negative Bereich dazu. Die Rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind die Menge aller Brüche. Es handelt sich hierbei um Zahlen mit abbrechender oder periodischer Dezimalentwicklung. Im Bereich der Irrationalen Zahlen $\mathbb{I}$ geht es um Zahlen mit unendlicher, nichtabbrechender und nichtperiodischer Dezimalentwicklung. Abschliessend kommen die Reellen Zahlen $\mathbb{R}$ dazu, welche die Vereinigung der Rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ wie auch der Irrationalen Zahlen $\mathbb{I}$ darstellt.

Mit jedem dazukommenden Bereich wird es möglich, neue Bereiche der Mathematik zu entdecken. Beispielsweise kämen Brüche in den Natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und/oder in den Ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ nicht in Frage. Die Subtraktion ist im Bereich der Natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ unvorstellbar.

Eine Erweiterung des Zahlenbereichs bringt somit immer neue Möglichkeiten, die Mathematik anders und erweitert anwenden zu können. Das werden wir auch im Bereich der Komplexen Zahlen sehen.

2.2 Quadratische Gleichungen

Das Lösen von Quadratischen Gleichungen im Reellen wird wichtig, da wir die Vorstellung und die Berechnung der Quadratischen Gleichungen durch die Komplexen Zahlen erweitern werden.

Die Formeln zur Berechnung von Quadratischen Gleichung:

Allgemeine Formel: $\boldsymbol{a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \quad | a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0}$

Formel für Quadratische Gleichungen: $\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

Term unter der Wurzel: Diskriminante D: $\boldsymbol{D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c,\ D \geq 0}$

Die Bedeutung der Formel für Quadratische Gleichungen:

$\boldsymbol{a}$: Öffnung

$\boldsymbol{a < 0}$ → nach unten gerichtet
$\boldsymbol{a > 0}$ → nach oben gerichtet
$\boldsymbol{a = 1}$ → Normalparabel

$\boldsymbol{b}$: linearer Term

$\boldsymbol{c}$: y-Achsenabschnitt

2.3 Trigonometrische Funktionen

Die Trigonometrie wird uns bei den Komplexen Zahlen, insbesondere wenn es um eine andere Darstellungsweise der Komplexen Zahlen geht, behilflich sein.

Das Ziel dieses Unterkapitels ist es, die allgemeinen Formeln zu verstehen wie auch diese visuell darzustellen. Um dies bewerkstelligen zu können, verwende ich eine von mir erstellte Abbildung (mithilfe von GeoGebra) im Bereich der Trigonometrischen Funktionen.

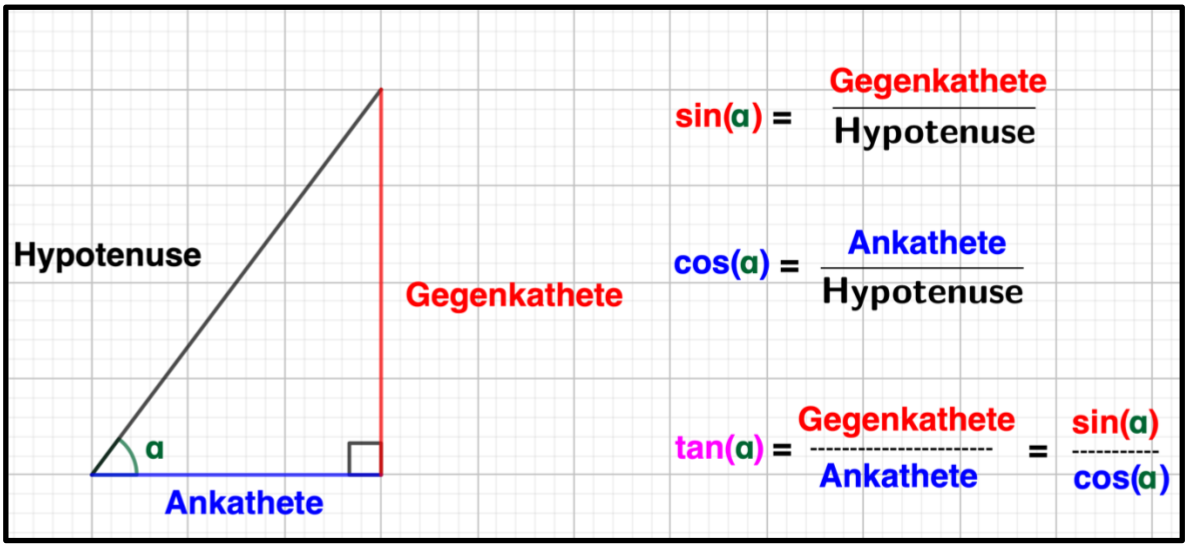


Abb. 3: Trigonometrische Funktionen

Die Abbildung veranschaulicht die drei wichtigsten Formeln zur Berechnung von Winkeln und Seitenlängen von rechtwinkligen Dreiecken.

2.4 Gradmass und Bogenmass

Direkt anknüpfend an das Thema "Trigonometrische Funktionen" handelt es sich im Folgenden um die Winkel im Gradmass (DEG für "degrees") wie auch im Bogenmass (RAD für "radiant").

Auf die Frage, wie viel Grad ein rechter Winkel misst, antworten wir oft mit **90°**.
Diese Aussage ist korrekt: Jedoch nur im Gradmass.

Winkel im Bogenmass beziehen sich auf die Winkel im Gradmass. Um dies visuell zu veranschaulichen, werden wir im Folgenden eine von mir erstellte Abbildung (mithilfe von GeoGebra) zum Grad- und Bogenmass betrachten.

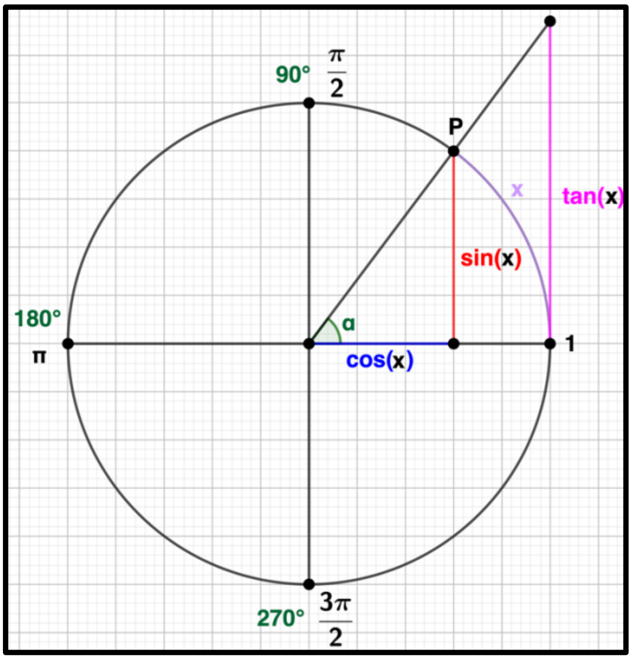


Abb. 4: Einheitskreis

Der Einheitskreis vereinfacht das Verständnis der Winkel im Bogenmass. Der Grundsatz beim Einheitskreis ist derjenige, dass es jenen Kreis in der Mathematik darstellt, dessen Radius den Wert 1 hat. Zusätzlich stellt es eine andere Darstellungsweise für Winkel dar, da das es mit dem Bogenmass einhergeht. Dieser Kreis misst $\mathbf{360°}$ im Gradmass und $\boldsymbol{2\pi}$ im Bogenmass. Bei den Winkeln im Bogenmass handelt es sich somit um eine andere Schreibweise von Winkeln.

Beispiel: Viertelperiode des Kreises: $\mathbf{90°} = \frac{1}{4} \cdot \boldsymbol{2\pi} = \frac{\pi}{2}$

Nun stellt sich die Frage, wie genau damit das Bogenmass ausgerechnet werden kann.

Zur Antwort sehen wir uns die Formel zur Berechnung der Bogenlänge $\boldsymbol{x}$ an:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \frac{\pi}{180°}$$

Der Wert $\boldsymbol{x}$ ist hierbei die zum Winkel $\boldsymbol{a}$ gehörende Bogenlänge im Einheitskreis.

Das Interessante dabei ist, dass die Bogenlänge $\boldsymbol{x}$ dem Winkel $\boldsymbol{\alpha}$ im Bogenmass entspricht. Somit kann die Bogenlänge $\boldsymbol{x}$ ausgerechnet und auf den Wert des Winkels $\boldsymbol{\alpha}$ im Bogenmass gekommen werden. Aber warum ist das so? Liegt das daran, dass der Radius $\boldsymbol{r}$ des Einheitskreises den Wert $\mathbf{1}$ besitzt? Gilt somit die oben genannte Formel nur für den Einheitskreis?

Hierfür sehen wir uns Formeln zur spezifischen Berechnung von Bogenlängen an:

$\boldsymbol{x} = \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{r} \cdot \frac{\alpha}{360°}$, $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{r}$ seien gegeben

Gegeben: $\boldsymbol{\alpha = 45°}$ (im Gradmass) und $\boldsymbol{r = 1.41}$ (Hinweis: $\boldsymbol{r \neq 1}$)

Gesucht: Bogenlänge $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{x = 2 \cdot \pi \cdot 1.41 \cdot \frac{45°}{360°} = 1.10741}$$

Um damit weiterrechnen zu können und somit den Winkel $\boldsymbol{\alpha}$ im Bogenmass herauszufinden, sehen wir uns den nächsten Schritt an.

$$\boldsymbol{x = r \cdot \alpha}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\alpha = \frac{x}{r} = \frac{1.10741}{1.41} = 0.785398}$$

Als Vergleich: $\boldsymbol{x = \alpha \cdot \frac{\pi}{180°} = 45° \cdot \frac{\pi}{180°} = 0.785398}$

Frage: Wie kann das sein? Wir haben eine Rechnung in einem Schritt und eine in zwei Schritten angesehen. Einerseits ging es um den Radius $\boldsymbol{r}$ mit dem Wert $\mathbf{1}$ und andererseits um den Radius $\boldsymbol{r}$ mit dem Wert $\mathbf{1.41}$. Also spielt der Wert des Radius $\boldsymbol{r}$ respektive die Berechnungsart keine Rolle?

Antwort: Genau, somit haben wir bewiesen, dass unabhängig vom Radius $\boldsymbol{r}$ und unabhängig von der Art der Berechnung, ob in zwei Schritten oder vereinfacht in einem einfachen Schritt, die gleichen Endergebnisse geliefert werden. Es ging lediglich darum, den gleichen Winkel $\boldsymbol{\alpha}$ bei beiden Berechnungsarten zu benutzen. Hierbei ging es darum, einen anderen Radius $\boldsymbol{r}$ zu benutzen, sodass aufgezeigt werden kann, dass der Wert des Radius $\boldsymbol{r}$ irrelevant ist.

Zusätzlich macht es in der spezifischen Berechnung zur Bogenlänge $\boldsymbol{x}$ gar keinen Sinn, an erster Stelle mit dem Radius $\boldsymbol{r}$ zu multiplizieren, um danach die Lösung wieder mit dem Radius $\boldsymbol{r}$ zu dividieren. Deswegen vereinfachen wir das Ganze und sehen uns an, warum die Berechnung zur Bogenlänge $\boldsymbol{x}$ dem Winkel $\boldsymbol{\alpha}$ im Bogenmass entspricht.

Dafür sehen wir uns die spezifische Formel zur Berechnung der Bogenlänge x an:

$$\boldsymbol{x = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360°}}$$

Gedanke: Der Radius $\boldsymbol{r}$ kann auf Grund der vorher überlegten Idee von der Gleichung gekürzt werden, sodass die Gleichung wie folgt aussieht:

$$\boldsymbol{x = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360°}}$$

$$\boldsymbol{x = a \cdot \frac{2 \cdot \pi}{360°} = x = a \cdot \frac{\pi}{180°}}$$

Somit haben wir bewiesen, dass die Anfangsformel korrekt ist. Der vorhin von uns angesehene Einheitskreis (siehe Abbildung 3) hat uns somit nur für die visuelle Vorstellung der Bogenlänge $\boldsymbol{x}$ helfen können wie auch für die Vorstellung, dass folgende speziellen Werte für das Bogenmass gelten:

Winkelmass	Spezielle Werte						Umrechnungsformel
Gradmass	$\mathbf{360°}$	$\mathbf{180°}$	$\mathbf{90°}$	$\mathbf{60°}$	$\mathbf{45°}$	$\mathbf{30°}$	$\boldsymbol{a}$
Bogenmass	$\boldsymbol{2\pi}$	$\boldsymbol{\pi}$	$\boldsymbol{\pi/2}$	$\boldsymbol{\pi/3}$	$\boldsymbol{\pi/4}$	$\boldsymbol{\pi/6}$	$\boldsymbol{a \cdot \frac{\pi}{180°}}$

Das bedeutet, dass - unabhängig vom gegebenen Radius $\boldsymbol{r}$ - die Umrechnung vom Gradmass eines Winkels zum Bogenmass mithilfe von der Formel $\boldsymbol{x = a \cdot \frac{\pi}{180°}}$, also mit der Formel zur Berechnung der Bogenlänge $\boldsymbol{x}$, erfolgreich vollendet werden kann.

Die Anwendung kann so aufgezeigt werden, dass wir uns den Funktionsgraphen $\mathbf{tan}(\boldsymbol{x})$ ansehen und den Winkel $\mathbf{45°}$ (Bogenmass) und wie vorher berechnet $\mathbf{0.785398}$ (Gradmass) in die Funktion einsetzen.

$\boldsymbol{tan(45°) = 1 = tan(0.785398\,) = 1}$

Somit spielt dieser Themenbereich der Mathematik im Bereich der "Trigonometrischen Funktionen" eine grosse Rolle. Dieses Wissen wird uns im Bereich der Komplexen Zahlen weiterhelfen.

2.5 Vektorgeometrie

Das Verständnis der Vektoren wird bei den Operationen respektive Berechnungen der Komplexen Zahlen von Bedeutung sein.

Frage: Was ist überhaupt ein Vektor?

Definition: Ein Vektor beschreibt eine Verschiebung. Vektoren besitzen eine Länge wie auch eine Richtung und ausserdem haben sie keinen fixen Anfangspunkt.

Im Folgenden sehen wir uns die Grundlagen der Vektoren in einer zweidimensionalen Ebene an:

Wir starten mit dem Ursprung $\boldsymbol{O}$. Dieser wird den sogenannten Ortsvektor bilden. Dies funktioniert nur, wenn ein zweiter Punkt existiert. Wir nehmen an, dass der Punkt $\boldsymbol{A}$ existiert. Um den sogenannten Ortsvektor zu bilden (Vektor vom Ursprung $\boldsymbol{O}$ zum Punkt $\boldsymbol{A}$) müssen wir folgende Schreibweise anwenden:

$\boldsymbol{\overrightarrow{r_A} = \overrightarrow{OA} = \binom{x}{y}}$

Dadurch haben wir den Ortsvektor vom Punkt $\boldsymbol{A}$ aufgestellt.

Nach dem Verständnis, Vektoren zu bilden, wenden wir uns zur Addition wie auch zur Subtraktion zweier Vektoren.

Addition zweier Vektoren: $\overrightarrow{\boldsymbol{r_A}} + \overrightarrow{\boldsymbol{r_B}} = \begin{pmatrix} x_A + x_B \\ y_A + y_B \end{pmatrix}$

Subtraktion zweier Vektoren: $\overrightarrow{\boldsymbol{r_A}} - \overrightarrow{\boldsymbol{r_B}} = \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix}$

Zum Schluss sehen wir uns den Betrag eines Vektors an. Dieses Wissen wird in der Darstellung von Komplexen Zahlen nützlich sein.

Betrag eines Vektors: $\overrightarrow{|\boldsymbol{r_A}|} = \boldsymbol{r_A} = \overline{\boldsymbol{OA}} = \sqrt{\boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{y^2}}$ = Betrag [LE]

2.6 Die Eulersche Zahl $\boldsymbol{e}$ (Bonus)

Zum Schluss dieser Repetition beschäftigen wir uns mit einer interessanten Zahl: Die Eulersche Zahl $\boldsymbol{e}$.

Zahl? Was wird überhaupt unter diesem Buchstaben verstanden?

In diesem Unterkapitel werde ich nicht auf alle Details eingehen. Sondern nur auf diejenigen, die für das grundsätzliche Verständnis hilfreich sind. Auch wenn wir nicht das ganze Wissen der Eulerschen Zahl $\boldsymbol{e}$ für die Komplexen Zahlen brauchen werden, ist es sinnvoll, eine gewisse Ahnung davon zu haben.

Die Eulersche Zahl $\boldsymbol{e}$ ist wie $\boldsymbol{\pi}$ eine irrationale Zahl, deren Wert wir uns jetzt ansehen.

$\boldsymbol{e := 2.718281828459..}$

Aber wie kam man auf diesen Wert und wo wird $\boldsymbol{e}$ benutzt?

Der Ursprung hängt mit den Exponentialfunktionen ab, beispielsweise $\boldsymbol{a^x}$. Danach ging es hauptsächlich darum, Exponentialfunktionen abzuleiten. Man kam zum Schluss, dass die Ableitungen von Exponentialfunktionen immer zum gleichen Resultat kamen: Die Exponentialfunktion multipliziert mit einem Limes-Wert. Der Erfinder der Eulerschen Zahl e, Leonhard Euler, fragte sich, ob der Limes-Wert auf den Wert $\mathbf{1}$ gebracht werden könnte. Dies mit dem Ziel, dass die Ableitung einer Exponentialfunktion den gleichen Wert wie vor der Ableitung hat. Nach zahlreichem Rechnen kam er auf die folgende Formel, deren Herleitung wir nicht betrachten werden:

$$\boldsymbol{e := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718281828459..}$$

Die folgende Darstellung veranschaulicht die Formel auf mathematischer Ebene:

$\boldsymbol{n}$	$\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n}}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$
$\mathbf{2}$	$\mathbf{2.25}$
$\mathbf{10}$	$\mathbf{2.593742..}$
$\mathbf{100}$	$\mathbf{2.704813..}$
$\mathbf{1'000}$	$\mathbf{2.716923..}$
$\mathbf{100'000}$	$\mathbf{2.718268..}$
$\mathbf{10'000'000}$	$\mathbf{2.718281..}$

Die angegebene Formel zur Eulerschen Zahl $\boldsymbol{e}$ kann dadurch bewiesen werden. Die Zahlen $\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n}}$ nähern sich für $\boldsymbol{n} \to \infty$ immer mehr der Zahl $\mathbf{2.718281828459..}$

Demzufolge spielt die Eulersche Zahl $\boldsymbol{e}$ in der Differentialrechnung und in den Exponentialfunktionen eine grosse Rolle, wie sie das auch im Bereich der Komplexen Zahlen tut.

3. Einleitung

Nun haben wir das nötige fachliche Vorwissen repetiert und/oder angeeignet, sodass wir bestens für die Komplexe Zahlen gerüstet sind. Aber, was sind Komplexe Zahlen? Bei den Komplexen Zahlen geht es weder um mysteriöse noch um schwierig verständliche Gebilde. Demzufolge sind Komplexe Zahlen weitaus mehr als bestimmte definierte Zahlen.

Um eine Ahnung von den Komplexen Zahlen zu erhalten, sehen wir uns in einem ersten Schritt die Zahlenbereichserweiterung an. Hierbei geht es um das grundsätzliche Verständnis von Komplexen Zahlen. Im Anschluss werden wir uns mit den für die Komplexen Zahlen relevanten Themenbereiche wenden. Das Ziel ist, die durch das Entstehen der Komplexen Zahlen hervorgerufenen neuen Möglichkeiten der Mathematik anzusehen, indem wir neue Begriffe kennenlernen und sie hinterfragen.

3.1 Zahlenbereichserweiterung

Bei den Komplexen Zahlen geht es grundsätzlich darum, eine Erweiterung zu machen. Aber von was? Komplexe Zahlen stellen eine sinnvolle Erweiterung der Reellen Zahlen $\mathbb{R}$ dar. Das ist aber nicht etwas Neues. In der Mathematik wurden oft Erweiterungen von Zahlenbereichen durchgeführt. Beispielsweise stellen die Reellen Zahlen $\mathbb{R}$ eine Erweiterung der Rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ dar, im Umkehrschluss stellen die Rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ eine Erweiterung von den Ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ dar und die Ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ eine Erweiterung von den Natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.

Aber warum werden Zahlenbereiche überhaupt erweitert?

Probleme, die im Bereich der Reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nicht lösbar waren, werden mithilfe der Komplexen Zahlen lösbar. Somit stellen die Komplexen Zahlen eine natürliche und sinnvolle Erweiterung der Reellen Zahlen $\mathbb{R}$ dar. Dies ist auch der Grund, warum überhaupt die Erweiterung von den Rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ entstanden ist. Demnach konnten Probleme, die in jenem Zahlenbereich nicht lösbar waren, durch die Erweiterung zu den Reellen Zahlen $\mathbb{R}$ lösbar gemacht.

Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass im Bereich der Reellen Zahlen $\mathbb{R}$ auf unlösbare Probleme getroffen wird. Hierfür sehen wir uns eine quadratische Gleichung der Gestalt $\boldsymbol{x^2 = -1}$ an. Diese Gleichung ist in $\mathbb{R}$ unlösbar, da es keine Reelle Zahl $\mathbb{R}$ gibt, deren Quadrat dem Wert $\mathbf{1}$ entspricht. Somit sind quadratische Gleichungen manchmal lösbar, manchmal aber stösst man durch diese Limitierung auf Grenzen der Reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Wie wirkt die Mathematik diesem Dilemma entgegen?

Man führe eine neue Zahl ein, welche genau dieses Problem zu lösen weiss.

Im Beispiel der Rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, welche Brüche mit abbrechender und periodischer Dezimalentwicklung darstellen, sehen wir uns das folgende Problem an:

$\boldsymbol{x^2 = 2}$ → unlösbar in $\mathbb{Q}$

Dies liegt daran, dass keine Bruchzahl existiert, deren Quadrat dem Wert $\mathbf{2}$ entspricht. Somit führen wir eine neue Zahl ein, welche die Eigenschaft hat, mit sich selbst multipliziert dem Wert **2** zu entsprechen und somit die oben genannte unlösbare Gleichung lösbar macht.

Die neu eingeführte Zahl hat den Wert $\boldsymbol{\sqrt{2}}$.

$\boldsymbol{x^2 = 2 \rightarrow \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2}$ → lösbar in $\mathbb{R}$

Somit wurde bewiesen, dass die Erweiterung von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$ einem sinnvollen Ausbau des Zahlenbereichs entspricht.

Jedoch gibt es einige Regeln, die bei einer Zahlenbereichserweiterung zu beachten sind:

Alle bis anhin bekannten Zahlen stellen einen Teil der neu eingeführten Zahlen dar. Somit ist $\mathbb{Q}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Mathematisch symbolisiert sieht das wie folgt aus: $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{Q}$ ist Element von $\mathbb{R}$).

Alle Rechenoperationen sind auch mit den neu eingeführten Zahlen möglich, sodass keine Einschränkungen vorhanden sind. Die Einführung von $\mathbb{R}$ erzeugt keine Schwierigkeiten.

Für die neu eingeführten Zahlen gelten dieselben Rechenregeln, sodass mit Reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gleich wie mit Rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ gerechnet werden kann.

Diese aufgezählten Regeln stellen das sogenannte Permanenzprinzip (permanere = bleiben) dar und sorgen dafür, dass eine Erweiterung von Zahlenbereichen sorglos funktionieren kann.

3.2 Die imaginäre Einheit $\boldsymbol{i}$

Um auf die Komplexen Zahlen zurückzukommen und unser unlösbares Problem in $\mathbb{R}$ aufzugreifen, sehen wir uns das folgende Problem genauer an:

$\boldsymbol{x^2 = -1}$

Nun wissen wir aber, dass das Quadrat einer Reellen Zahl, welche nicht den Wert **0** hat, immer positiv ist.

Nun führen wir eine Zahl ein, die das unlösbare Problem löst.

Die neue Zahl heisst: Imaginäre Einheit $\boldsymbol{i}$

Es gilt: $\boldsymbol{i^2 = -1}$

Demnach entspricht die imaginäre Einheit $\boldsymbol{i}$ nicht einer Reelle Zahl ℝ, da in ℝ keine Zahl im Quadrat dem Wert $\boldsymbol{-1}$ entsprechen kann. Nichtsdestotrotz ist noch nicht geklärt, wie die imaginäre Einheit $\boldsymbol{i}$ aussieht. Trotzdem sind wir in der Lage, mit $\boldsymbol{i}$ im Folgenden Rechnungen durchzuführen:

Hinweis: Das Permanenzprinzip muss gelten!

Aufgabe 1: $\boldsymbol{i^3 = i \cdot i^2 = i \cdot (-1) = -i}$

Aufgabe 2: $\boldsymbol{i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1}$

Schliesslich haben wir eine neue Zahl $\boldsymbol{i}$ eingeführt, welche die Gleichung $\boldsymbol{x^2 = -1}$ löst, sodass für die imaginäre Einheit $\boldsymbol{i^2 = -1}$ gilt.

3.3 Vorsicht mit neuen Zahlen

Wir haben gesehen, dass die Einführung von der imaginären Einheit *i* funktioniert. Aber kann man wirklich einfach neue Zahlen einführen, ohne dass dies zu Problemen führt?

Dafür sehen wir uns das Folgende an:

Für eine Gleichung die in ℝ keine Lösung besitzt, haben wir eine neue Zahl $\boldsymbol{i}$ eingeführt, für welche gilt: $\boldsymbol{i^2 = -1}$

Dann sehen wir uns eine weitere Gleichung an, die in ℝ keine Lösung besitzt:

$\boldsymbol{x \cdot 0 = 1}$ → unlösbar in ℝ

Das Problem liegt darin, dass die Multiplikation einer Reellen Zahl ℝ mit $\boldsymbol{0}$ immer auf das Produkt mit dem Wert $\boldsymbol{0}$ hinausläuft.

Nun führen wir eine Zahl $\boldsymbol{j}$ ein, die dieses unlösbare Problem lösbar macht.

Es gilt: $\boldsymbol{j \cdot 0 = 1}$

oder: $\boldsymbol{(0 + 0) \cdot j = 0 \cdot j = 1}$

aber auch: $\boldsymbol{(0 + 0) \cdot j = j = 0 \cdot j + 0 \cdot j = 1 + 1 = 2}$

Die Gleichung $\mathbf{1} = \mathbf{2}$ führt zu einem Widerspruch. Somit stellt dies keine sinnvolle Erweiterung von ℝ dar. Wir haben Glück, dass dieses Verfahren mit der imaginären Einheit $\boldsymbol{i}$ so gut und unproblematisch funktioniert.

3.4 $\boldsymbol{i} \neq \sqrt{-\mathbf{1}}$

In vielen Lehrmitteln wird die imaginäre Einheit $\boldsymbol{i}$ als Wurzel von $-\mathbf{1}$ definiert. Aber die Wurzelrechnung ist im Komplexen Zahlenbereich anspruchsvoller:

$$\boldsymbol{i} = \sqrt{-\mathbf{1}} \rightarrow \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \sqrt{-\mathbf{1}} \cdot \sqrt{-\mathbf{1}} = \sqrt{(-\mathbf{1}) \cdot (-\mathbf{1})} = \sqrt{\mathbf{1}} = \mathbf{1}$$

Es gilt aber: $\boldsymbol{i}^2 = -\mathbf{1}$ und nicht $\boldsymbol{i}^2 = \mathbf{1}$

Die Gleichung $-\mathbf{1} = \mathbf{1}$ führt zu einem Widerspruch.

Das ist der Grund, warum wir im ganzen Skript den Ausdruck $\boldsymbol{i} = \sqrt{-\mathbf{1}}$ nicht verwenden werden! Ansonsten geraten wir in Versuchung, die Rechenregeln für Wurzeln von ℝ auf die Komplexen Zahlen zu übertragen.

3.5 Ist $\boldsymbol{i}$ positiv oder negativ?

Wir wissen, dass eine uns bekannte reelle Zahl entweder den Wert $\mathbf{0}$ hat, einer positiven Zahl oder einer negativen Zahl entspricht.

Aber was ist denn die neu eingeführte Zahl $\boldsymbol{i}$?

Dem Wert $\mathbf{0}$ kann sie nicht entsprechen. Diese Annehme beruht auf Folgendem:

$\mathbf{0}^2 = \mathbf{0}$
$\boldsymbol{i}^2 = -\mathbf{1}$

Schlussfolgerung: $\boldsymbol{i} \neq \mathbf{0}$

Annahme 1: $\boldsymbol{i} > \mathbf{0}$

Mit $\boldsymbol{i}$ multipliziert: $\boldsymbol{i}^2 > \mathbf{0} \cdot \boldsymbol{i}$

oder: $-\mathbf{1} > \mathbf{0} \rightarrow$ sinnlos in ℝ

Schlussfolgerung: $\boldsymbol{i} > \mathbf{0}$ ist in ℝ nicht möglich

Annahme 2: $\boldsymbol{i < 0}$

Hinweis: Das "Grösser-Zeichen" verändert sich, da eine Multiplikation zweier negativen Zahlen zu einem positiven Wert wird und die Multiplikation von $\mathbf{0}$ mit einem negativen Wert zum Wert $\mathbf{0}$ führt. Da auf der linken Seite der Ungleichung ein positiver Wert entsteht, ändert sich das "Grösser-Zeichen".

Mit $\boldsymbol{i}$ multipliziert: $\boldsymbol{i^2 > 0 \cdot i}$

oder: $\boldsymbol{-1 > 0}$ → sinnlos in ℝ

Schlussfolgerung: $\boldsymbol{i < 0}$ ist in ℝ nicht möglich

Somit kann gesagt werden, dass die imaginäre Einheit $\boldsymbol{i}$ weder positiv noch negativ ist und auch nicht dem Wert $\mathbf{0}$ entspricht.

3.6 Komplexe Zahlen in Normalform

Wir haben uns bis anhin mit der imaginären Einheit $\boldsymbol{i}$ beschäftigt und werden nun sehen, dass dieses Wissen uns bei der Bildung von Komplexen Zahlen helfen wird.

Dies aus dem Grund, da der nächste Schritt darin besteht, die imaginäre Einheit $\boldsymbol{i}$ mit den Reellen Zahlen ℝ zu verknüpfen. Letzteres hat die Erstellung von Komplexen Zahlen zur Folge. Komplexe Zahlen sind dementsprechend ein Zusammenschluss der imaginären Einheit $\boldsymbol{i}$ und den Reellen Zahlen ℝ. Deren Namengebung geht mit dem Zusammenschluss einher (komplex = zusammengesetzt).

Eine Komplexe Zahl bilden wir wie folgt:

Normalform: $\boldsymbol{z = x + y \cdot i}$

Dabei sind $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y} \in$ ℝ ($\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ sind Elemente von den Reellen Zahlen ℝ)

Insofern gilt, dass eine Zahl $\boldsymbol{z}$ der Form $\boldsymbol{z = x + y \cdot i}$ eine Komplexe Zahl ist und $\boldsymbol{x}$ wie auch $\boldsymbol{y}$ dabei Reellen Zahlen entsprechen. $\boldsymbol{i}$ steht in diesem Kontext für die imaginäre Einheit $\boldsymbol{i}$. Dieser Schreibweise liegt die Namengebung "Normalform" zugrunde.

Jede Komplexe Zahl ist dementsprechend durch die Reellen Zahlen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ festgelegt. Für das Verständnis führen wir zwei neue Begriffe ein und benutzen dafür die Komplexe Zahl der Form $\boldsymbol{z = 2 + 5 \cdot i}$.

$$\boldsymbol{z = 2 + 5 \cdot i \begin{cases} \textbf{\textit{Realteil}}: 2 \\ \textbf{\textit{Imaginärteil}}: 5 \end{cases}}$$

Demzufolge kann gesagt werden, dass die $\boldsymbol{x}$-Komponente der Komplexen Zahl $\boldsymbol{z}$ den Realteil und die $\boldsymbol{y}$-Komponente der Komplexen Zahl $\boldsymbol{z}$ den Imaginärteil darstellt.

Hierfür verwenden wird folgende Schreibweisen:

$$\boldsymbol{Re(z) = Re(2 + 5 \cdot i) = 2}$$

$$\boldsymbol{Im(z) = Im(2 + 5 \cdot i) = 5}$$

Hierbei steht $\boldsymbol{Re(z)}$ für den Realteil der Komplexen Zahl $\boldsymbol{z}$ und $\boldsymbol{Im(z)}$ für den Imaginärteil der Komplexen Zahl $\boldsymbol{z}$.

Wenn wir nun die Komplexe Zahl $\boldsymbol{z}$ der Form $\boldsymbol{z = 0 + y \cdot i}$ in Betracht ziehen, entstehen neue Möglichkeiten, Komplexe Zahlen zu beschreiben:

$\boldsymbol{z = 0 + y \cdot i \rightarrow z = y \cdot i \rightarrow y\ reell\ \rightarrow rein\ imagin}$**äre** Komplexe Zahl $\boldsymbol{z}$

Dieses Beispiel zeigt eine Komplexe Zahl $\boldsymbol{z}$ auf, deren Realteil den Wert $\boldsymbol{0}$ hat und diesbezüglich wird dieser Art der Komplexen Zahl die Namengebung $\boldsymbol{rein\ imagin}$**är** respektive $\boldsymbol{y\ reell}$ zugeordnet.

Im Umkehrschluss nennt man Komplexe Zahlen $\boldsymbol{z}$ der Form $\boldsymbol{z = x + 0 \cdot i}$, also jene Komplexe Zahl $\boldsymbol{z}$, deren Imaginärteil den Wert $\boldsymbol{0}$ besitzt, $\boldsymbol{x\ reell}$.

Jetzt wollen wir uns zusammen einigen Aufgaben widmen, um das Gelernte anzuwenden.

<u>Aufgabe 1:</u>

Bestimmte den Real- und Imaginärteil der folgenden Komplexen Zahl $\boldsymbol{z}$: $\boldsymbol{z = \sqrt{5} \cdot i}$

Ausgeschrieben: $\boldsymbol{z = 0 + \sqrt{5} \cdot i}$ ($\boldsymbol{y\ reell}$)

Realteil: $\boldsymbol{0}$
Imaginärteil: $\boldsymbol{5}$

<u>Aufgabe 2:</u>

Bestimmte den Real- und Imaginärteil der folgenden Komplexen Zahl $\boldsymbol{z}$: $\boldsymbol{z = -\frac{1}{3}}$

Ausgeschrieben: $\boldsymbol{z = -\frac{1}{3} + 0 \cdot i}$ ($\boldsymbol{x\ reell}$)

Realteil: $\boldsymbol{-\frac{1}{3}}$
Imaginärteil: $\boldsymbol{0}$

Wir halten fest:

Eine Zahl der Gestalt $\boldsymbol{z = x + y \cdot i}$ ist eine Komplexe Zahl, wobei $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ reell sind. Die $\boldsymbol{x}$-Komponente wird ***Realteil*** von $\boldsymbol{z}$ ($\boldsymbol{x = Re(z)}$) genannt. Wohingegen die $\boldsymbol{y}$-Komponente dem ***Imaginärteil*** von $\boldsymbol{z}$ entspricht ($\boldsymbol{y = Im(z)}$). Eine Komplexe Zahlen der Form $\boldsymbol{z = 0 \cdot x + y \cdot i}$ wird ***rein imaginär*** genannt. Zu beachten ist, dass sowohl der ***Realteil*** als auch der ***Imaginärteil*** reelle Zahlen sind.

Den letzten Satz möchte ich im Folgenden genauer analysieren und dies mit einem Beispiel einleiten.

Eine Komplexe Zahl z mit der Gestalt $\boldsymbol{z = -\frac{1}{3} + 0 \cdot i}$ kürzen wir und schreiben $\boldsymbol{z = -\frac{1}{3}}$. Dieser Wert ist uns als Reelle Zahl bekannt. Das deutet darauf hin, dass Reelle Zahlen auch Komplexe Zahlen sind. Die Menge von $\mathbb{R}$ ist die Teilmenge von $\mathbb{C}$ (Menge aller Komplexen Zahlen). Mathematisch symbolisiert sieht das folgendermassen aus:

$\mathbb{R} \in \mathbb{C}$

Demzufolge lässt sich Folgendes daraus schliessen: Die Menge aller Reellen Zahlen, also $\mathbb{R}$, stellt eine Teilmenge der Menge aller Komplexen Zahlen, also $\mathbb{C}$, dar.

Somit ist nun Punkt 1 des Permanenzprinzips erfüllt. Im nächsten Kapitel werden wir Rechnungen mit Komplexen Zahlen durchführen und demzufolge die anderen Punkte des Permanenzprinzips zur Erfüllung bringen.

Wie an jedem Ende des jeweiligen Kapitels, ist es Zeit, den Kurztest durchzuführen.

Inhalt: Kurztest Kapitel 3
Link: https://www.geogebra.org/m/zhtptyam

Abb. 5: QR-Code 03

4. Operationen von Komplexen Zahlen

Nachdem wir ein Verständnis dafür haben, was überhaupt Komplexe Zahlen sind, können wir damit anfangen, diese auch anzuwenden. Es geht darum, dass wir mit ihnen Rechnungen durchführen werden und diesbezüglich die beiden uns fehlenden Punkte des Permanenzprinzips erfüllen können. Infolgedessen können wir aufzeigen, dass die Zahlenbereichserweiterung erfolgreich stattgefunden hat. Hierbei gehen wir wie Folgt vor:

In einem ersten Schritt sehen wir uns die Addition zweier Komplexen Zahlen an und darauf folgenden deren Subtraktion. Um das Ganze ausführlicher zu gestalten, sehen wir uns einerseits die Multiplikation und andererseits die Division an. Letzteres hängt mit den konjugiert Komplexen Zahlen zusammen. Demzufolge ist das Ziel des Kapitels, alle mit den Komplexen Zahlen möglichen Rechnungen aufzuzeigen.

4.1 Addition zweier Komplexen Zahlen

Folgendes Beispiel ist zur Veranschaulichung der Addition hilfreich:

Hinweis: Die Vorzeichen müssen beachtet werden!

$$\boldsymbol{z_1 + z_2 = (3 + i) + (1 - 2 \cdot i) = z_3}$$

Hierbei steht $\boldsymbol{z_1}$ für die erste Komplexe Zahl und demnach für den ersten Summand und $\boldsymbol{z_2}$ für die zweite Komplexe Zahl, also für den zweiten Summand. Diese werden die Summe $\boldsymbol{z_3}$ ergeben.

Ich weise darauf hin, dass nach dem Permanenzprinzip alle Rechenregeln von $\mathbb{R}$ weiterhin gültig sein müssen.

Dementsprechend wir Folgendes klar: In Berechnungen in $\mathbb{R}$ entspricht $\boldsymbol{i}$ einer Variablen. Folglich würden wir grundsätzlich beide reellen Zahlen zusammenfassen und die rein imaginären Ausdrücke ebenso. Entsprechend gelangen wir auf folgendes Ergebnis:

$$\boldsymbol{z_1 + z_2 = 3 + i + 1 + (-2 \cdot i) = 3 + i + 1 - 2 \cdot i = 4 - i = z_3}$$

Sehen wir uns noch ein Beispiel an:

$$\boldsymbol{z_1 + z_2 = (i) + (8 - 2 \cdot i) = z_3}$$

Wir sehen, dass die erste Komplexe Zahl $\boldsymbol{z}$, also der erste Summand, eine $\boldsymbol{rein\ imaginäre\ Komplexe\ Zahl\ z}$ darstellt. Das spielt für die Berechnung absolut keine Rolle. Hier kommt folgendes Ergebnis zustande:

$$\boldsymbol{z_1 + z_2 = (i) + (8 - 2 \cdot i) = (0 + i) + (8 - 2 \cdot i) = 0 + i + 8 - 2 \cdot i = 8 - i = z_3}$$

Folgendes Rechengesetz gilt für die Addition zweier Komplexen Zahlen:

$$\boldsymbol{z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i}$$

Dieses Rechengesetz stellt eine andere Darstellungsweise respektive Berechnungsweise der Addition zweier Komplexen Zahlen dar.

Das Rechengesetz verlangt, dass wir die $\boldsymbol{x}$-Komponenten der beiden Komplexen Zahlen addieren und diese mit der Summe der $\boldsymbol{y}$-Komponenten beider Komplexen Zahlen addieren und die imaginäre Einheit $\boldsymbol{i}$ bestehen lassen. Demzufolge wird Folgendes zum Ausdruck gebracht: Um die Addition zweier Komplexen Zahlen zu bestimmen addiere man deren $\boldsymbol{Realteile}$ und $\boldsymbol{Imagin}$ä$\boldsymbol{rteile}$ separat.

Sehen wir uns dafür das vorher benutzte Beispiel mit dem Rechengesetz an:

Ohne Rechengesetz: $\boldsymbol{z_1 + z_2 = (3 + i) + (1 - 2 \cdot i) = 3 + i + 1 + (-2 \cdot i) = 3 + i + 1 - 2 \cdot i = 4 - i = z_3}$

Mit Rechengesetz: $\boldsymbol{z_1 + z_2 = (3 + 1) + (1 + (-2))i = (3 + 1) + (1 - 2)i = 4 - i = z_3}$

Hiermit ist bewiesen, dass in beiden Arten der Berechnung die gleiche Lösung zustattenkommt. Da die Lösung bei beiden Arten gleich sein wird, können beide Varianten frei gewählt werden.

Zum Schluss noch einige Aufgaben zu der Addition zweier Komplexen Zahlen:

<u>Aufgaben:</u>

1) $\boldsymbol{(4 + 3 \cdot i) + (2 + i)}$ = ?
2) $\boldsymbol{(\sqrt{5} + 3 \cdot i) + (-2 + i)}$ = ?
3) $\boldsymbol{Re((-2 + i)) + (-2 - 3 \cdot i))}$ = ?

<u>Lösungen:</u>

1) $\boldsymbol{4 + 3 \cdot i + 2 + i = 6 + 4 \cdot i}$
2) $\boldsymbol{\sqrt{5} + 3 \cdot i - 2 + i = \sqrt{5} - 2 + 4 \cdot i = 0.236068 + 4 \cdot i}$
3) $\boldsymbol{(-2 + i) + (-2 - 3 \cdot i) = -2 + i - 2 - 3 \cdot i = -4 - 2 \cdot i}$
→ $\boldsymbol{Re(-4 - 2 \cdot i) = -4}$

4.2 Subtraktion zweier Komplexen Zahlen

Die Subtraktion zweier Komplexen Zahlen unterscheidet sich von der Addition zweier Komplexen Zahlen durch das benutzte Vorzeichen. Sehen wir uns dafür ein Beispiel an. Auch hier ist es von Wichtigkeit, den Vorzeichen Beachtung zu schenken.

$\boldsymbol{z_1 - z_2 = (3 + i) - (1 - 2 \cdot i) = z_3}$

Nach dem Permanenzprinzip gehen wir wie Folgt vor:

$\boldsymbol{z_1 - z_2 = 3 + i - (+1) - (-2 \cdot i) = 3 + i - 1 + 2 \cdot i = 2 + 3 \cdot i = z_3}$

Folgendes Rechengesetz gilt für die Subtraktion zweier Komplexen Zahlen:

$\boldsymbol{z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i}$

Das Rechengesetz besagt, dass die Subtraktion zweier Komplexen Zahlen folgendermassen funktioniert: Beide $\boldsymbol{x}$-Komponenten der beiden Komplexen Zahlen werden subtrahiert und mit der Differenz der beiden $\boldsymbol{y}$-Komponenten beider Komplexen Zahlen addiert. Dabei bleibt die imaginäre Einheit $\boldsymbol{i}$ bestehen. Daraus lässt sich schliessen, dass wenn die Differenz zweier Komplexen Zahlen zu bestimmen ist, deren $\boldsymbol{Realteile}$ und $\boldsymbol{Imagin}$ä$\boldsymbol{rteile}$ separat zu addieren sind.

Sehen wir uns das vorher benutzte Beispiel mit dem Rechengesetz an:

ohne Rechengesetz: $\boldsymbol{z_1 - z_2 = (3 + i) - (1 - 2 \cdot i) = 3 + i - (+1) - (-2 \cdot i) = 3 + i - 1 + 2 \cdot i = 2 + 3 \cdot i = z_3}$

mit Rechengesetz: $\boldsymbol{z_1 - z_2 = (3 - 1) + (i - (-2 \cdot i)) = (3 - 1) + (i + 2 \cdot i) = 2 + 3 \cdot i = z_3}$

Dementsprechend werden beide Arten der Berechnung mit der gleichen Lösung einhergehen. Beide Varianten können frei gewählt werden, denn die Lösung wird dieselbe sein.

Zum Schluss noch einigen Aufgaben zu der Subtraktion zweier Komplexen Zahlen:

<u>Aufgaben:</u>

1) $\boldsymbol{z_1 = 6 - i}$; $\boldsymbol{z_2 = 4}$; $\boldsymbol{z_3 = 5 \cdot i}$ $\rightarrow$ $\boldsymbol{z_1 - z_2 - z_3} = ?$
2) $\boldsymbol{Im(z_1 - z_2)} = ?$

<u>Lösungen:</u>

1) $\boldsymbol{z_1 = 6 - i}$; $\boldsymbol{z_2 = 4 + 0 \cdot i}$; $\boldsymbol{z_3 = 0 + 5 \cdot i}$
$\rightarrow$ $\boldsymbol{(6 - i) - (4 + 0 \cdot i) - (0 + 5 \cdot i) = 6 - i - 4 - 5 \cdot i = 2 - 6 \cdot i}$
2) $\boldsymbol{z_1 - z_2 = (6 - i) - (4 + 0 \cdot i) = 6 - i - 4 = 2 - i}$
$\rightarrow$ $\boldsymbol{Im(2 - i) = -1}$

4.3 Multiplikation zweier Komplexen Zahlen

Nun sehen wir uns an, wie wir zwei Komplexe Zahlen miteinander multiplizieren. Wir beachten, dass das Permanenzprinzip gültig ist. Dementsprechend können die Klammern ausmultipliziert werden. Hierfür sehen wir uns das folgende Beispiel an:

$$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = (3 + 2 \cdot i) \cdot (1 - 8 \cdot i) = 3 - 24 \cdot i + 2 \cdot i - 16 \cdot i^2 = z_3}$$

Es gilt: $\boldsymbol{i^2 = -1}$

$$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = (3 + 2 \cdot i) \cdot (1 - 8 \cdot i) = 3 - 24 \cdot i + 2 \cdot i - 16 \cdot (-1) = z_3}$$

$$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = (3 + 2 \cdot i) \cdot (1 - 8 \cdot i) = 3 - 24 \cdot i + 2 \cdot i + 16 = 19 - 22 \cdot i = z_3}$$

Um die Multiplikation besser zu verstehen, sehen wir uns noch eine Aufgabe an.

$\boldsymbol{z_1 = 1 + 2 \cdot i}$; $\boldsymbol{z_2 = 2 - 9 \cdot i; z_3} = ?$

$$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = (1 + 2 \cdot i) \cdot (2 - 9 \cdot i) = 2 - 9 \cdot i + 4 \cdot i - 18 \cdot i^2 = z_3}$$

$$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = (1 + 2 \cdot i) \cdot (2 - 9 \cdot i) = 2 - 9 \cdot i + 4 \cdot i - 18 \cdot (-1) = z_3}$$

$$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = (1 + 2 \cdot i) \cdot (2 - 9 \cdot i) = 2 - 9 \cdot i + 4 \cdot i + 18 = z_3}$$

$$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = (1 + 2 \cdot i) \cdot (2 - 9 \cdot i) = 20 - 5 \cdot i = z_3}$$

Folgendes Rechengesetz gilt für die Multiplikation zweier Komplexen Zahlen:

$$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)i}$$

Sehen wir uns das vorher benutzte Beispiel mit dem Rechengesetz an:

ohne Rechengesetz:

$$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = (1 + 2 \cdot i) \cdot (2 - 9 \cdot i) = 2 - 9 \cdot i + 4 \cdot i - 18 \cdot i^2 = z_3}$$

$$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = (1 + 2 \cdot i) \cdot (2 - 9 \cdot i) = 2 - 9 \cdot i + 4 \cdot i - 18 \cdot (-1) = z_3}$$

$$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = (1 + 2 \cdot i) \cdot (2 - 9 \cdot i) = 2 - 9 \cdot i + 4 \cdot i + 18 = z_3}$$

$$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = (1 + 2 \cdot i) \cdot (2 - 9 \cdot i) = 20 - 5 \cdot i = z_3}$$

mit Rechengesetz:

$$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = (1 \cdot 2 - (+2) \cdot (-9)) + (1 \cdot (-9) + 2 \cdot 2)i = (20) + (-5)i = 20 - 5 \cdot i = z_3}$$

Bei alle dem erhalten wir in beiden Arten der Berechnung die gleiche Lösung. Entweder die eine oder die andere Variante kann gewählt werden, die Lösungen sind übereinstimmend.

Zum Schluss noch einigen Aufgaben zu der Multiplikation zweier Komplexen Zahlen:

Aufgaben:

1) $\boldsymbol{z_1 = 1 + 7 \cdot i}$; $\boldsymbol{z_2 = 4 \cdot i}$; $\boldsymbol{z_3} = ? \rightarrow \boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = z_3} = ?$
2) $\boldsymbol{Re(z_1 \cdot z_2)} = ?$
3) Wenn eine Komplexe Zahl der Form $\boldsymbol{z = 1 + i}$ mit $\boldsymbol{-i}$ multipliziert wird, tauschen $\boldsymbol{Re}$ und $\boldsymbol{Im}$. Stimmt das? Die Aufgabe ist mathematisch aufzuzeigen!

Lösungen:

1) $\boldsymbol{z_1 = 1 + 7 \cdot i}$; $\boldsymbol{z_2 = 0 + 4 \cdot i}$; $\boldsymbol{z_3} =?$
$\rightarrow \boldsymbol{(1 + 7 \cdot i) \cdot (0 + 4 \cdot i) = 0 + 4 \cdot i + 0 + 28 \cdot i^2 = 4 \cdot i + 28 \cdot (-1) = -28 + 4 \cdot i}$
2) $\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = -28 + 4 \cdot i = z_3}$
$\rightarrow \boldsymbol{Re(z_3) = -28}$
3) $\boldsymbol{(-i) \cdot (1 + i) = -i - i^2 = -i - 1 \cdot (-1) = -i + 1 = 1 - 1 \cdot i}$
Vorher: $\boldsymbol{1 + 1 \cdot i \rightarrow Re(1 + 1 \cdot i) = 1;\ Im(1 + 1 \cdot i) = 1}$
Nachher: $\boldsymbol{1 - 1 \cdot i \rightarrow Re(1 - 1 \cdot i) = 1;\ Im(1 - 1 \cdot i) = -1}$

→ Der neue Realteil entspricht tatsächlich dem alten Imaginärteil. Aber der neue Imaginärteil hat das entgegengesetzte Vorzeichen des alten Realteils. Somit ist die Aussage falsch!

4.4 Konjugiert Komplexe Zahl

Bevor wir uns mit der Division beschäftigen, müssen wir die konjugiert Komplexen Zahlen verstehen.

Jede Komplexe Zahl $\boldsymbol{z}$ besitzt eine konjugiert Komplexe Zahl.

Für die Veranschaulichung sehen wir uns folgendes Beispiel an:

$\boldsymbol{z = 5 + 7 \cdot i}$

Die zu $\boldsymbol{z = 5 + 7 \cdot i}$ konjugiert Komplexe Zahl ist:

$\boldsymbol{\bar{z} = 5 - 7 \cdot i}$ (als "z quer" zu lesen)

Demzufolge lässt sich Folgendes daraus schliessen: Im Imaginärteil findet ein Vorzeichenwechsel statt. Demnach wird der Imaginärteil entgegengesetzt gleich dargestellt.

Dieses Wissen wird für Folgendes von Bedeutung sein:

Die wohl wichtigste Eigenschaft der konjugiert Komplexen Zahlen ist der, dass das Produkt der Komplexen Zahl $\boldsymbol{z}$ und der zu $\boldsymbol{z}$ konjugiert Komplexen Zahl $\bar{\boldsymbol{z}}$ einen speziellen und wie wir später feststellen werden, einen nützlichen Hintergrund hat. Dies sehen wir uns im Folgenden an:

Annahme: Man multipliziere die Komplexe Zahl $\boldsymbol{z}$ mit der zu ihr gehörenden konjugiert Komplexen Zahl $\bar{\boldsymbol{z}}$.

$\boldsymbol{z = 5 + 7 \cdot i}$
$\boldsymbol{\bar{z} = 5 - 7 \cdot i}$

Die Multiplikation zweier Komplexen Zahlen unter Einhaltung des Permanenzprinzips funktioniert wie folgt:

$$\boldsymbol{z \cdot \bar{z} = (5 + 7 \cdot i) \cdot (5 - 7 \cdot i) = 25 - 35 \cdot i + 35 \cdot i - 49 \cdot i^2}$$

$$\boldsymbol{z \cdot \bar{z} = 25 - 49 \cdot (-1)}$$

$$\boldsymbol{z \cdot \bar{z} = 25 + 49 = 74}$$

Das Produkt ist reell!

Wir halten fest:

Jede Komplexe Zahl $\boldsymbol{z}$ in der Form $\boldsymbol{z = x + y \cdot i}$ hat eine zu ihr konjugiert Komplexe Zahl $\bar{\boldsymbol{z}}$, deren Form $\boldsymbol{\bar{z} = x - y \cdot i}$ ist.

Hierfür sehen wir uns gemeinsam eine Aufgabe an, welche die Umrechnung von $\boldsymbol{z}$ zu $\bar{\boldsymbol{z}}$ aufzeigt:

Wir nehmen an, wir hätten eine Komplexe Zahl $\boldsymbol{z}$ in der Form $\boldsymbol{z = 7 \cdot i}$. Wir suchen die zu $\boldsymbol{z}$ konjugiert Komplexe Zahl $\bar{\boldsymbol{z}}$.

$$\boldsymbol{z = 7 \cdot i \rightarrow z = 0 + 7 \cdot i \rightarrow \bar{z} = 0 - 7 \cdot i}$$

Das war aber noch nicht alles. Die konjugiert Komplexen Zahlen besitzen andere bedeutende Eigenschaften, die wir uns im Folgenden ansehen:

$$\boldsymbol{\bar{\bar{z}} = z}$$

$$\boldsymbol{z = 0.5 + 2 \cdot i \rightarrow \bar{z} = 0.5 - 2 \cdot i \rightarrow \bar{\bar{z}} = 0.5 + 2 \cdot i}$$

Die zu $\boldsymbol{z}$ doppelt konjugiert Komplexe Zahl ist $\boldsymbol{z}$ selber!

$\boldsymbol{z + \bar{z} = 2 \cdot Re(z); z = 0.5 + 2 \cdot i}$

wobei $\boldsymbol{Re(z)} = \mathbf{0.5}$

$\boldsymbol{z = 0.5 + 2 \cdot i \rightarrow \bar{z} = 0.5 - 2 \cdot i}$

$\boldsymbol{z + \bar{z} = (0.5 + 2 \cdot i) + (0.5 + (-2 \cdot i)) = 0.5 + 2 \cdot i + 0.5 - 2 \cdot i = 1}$
$\boldsymbol{\rightarrow 1 = 2 \cdot Re(z) = 2 \cdot 0.5}$

Die Addition einer Komplexen Zahl $\boldsymbol{z}$ mit der zu ihr konjugiert Komplexen Zahl $\boldsymbol{\bar{z}}$ sorgt dafür, dass der Realteil der Komplexen Zahl $\boldsymbol{z}$ sich verdoppelt!

$\boldsymbol{z \cdot \bar{z} = Re(z)^2 + Im(z)^2; z = 0.5 + 2 \cdot i}$

wobei $\boldsymbol{Re(z)} = \mathbf{0.5}$ und $\boldsymbol{Im(z)} = \mathbf{2}$

$\boldsymbol{z = 0.5 + 2 \cdot i \rightarrow \bar{z} = 0.5 - 2 \cdot i}$

$\boldsymbol{z \cdot \bar{z} = (0.5 + 2 \cdot i) \cdot (0.5 - 2 \cdot i) = 0.025 - i + i - 4 \cdot i^2 = 0.025 - 4 \cdot (-1)}$
$\boldsymbol{= 0.025 + 4}$

Überprüfung: $\boldsymbol{Re(z)^2 + Im(z)^2 = Re(0.5)^2 + Im(2)^2 = 0.025 + 4 = z \cdot \bar{z} =}$
$\boldsymbol{0.025 + 4}$

Die Aussage ist demzufolge bewiesen und korrekt!

Nun stehen Aufgaben zur Verfügung, die zum Verständnis von den konjugiert Komplexen Zahlen dienen sollen:

Aufgaben:

1) $\boldsymbol{z = 0.3 + 28 \cdot i \rightarrow \bar{z}} = ?$
2) $\boldsymbol{z = 0.3 + 28 \cdot i \rightarrow \bar{\bar{z}}} = ?$
3) $\boldsymbol{z_1 = 0.5 + 6 \cdot i;\ z_2 = 3 + 4 \cdot i \rightarrow \overline{z_1 + z_2}} = ?$

Lösungen:

1) $\boldsymbol{z = 0.3 + 28 \cdot i \rightarrow \bar{z} = 0.3 - 28 \cdot i}$
2) $\boldsymbol{z = 0.3 + 28 \cdot i \rightarrow \bar{\bar{z}} = z = 0.3 + 28 \cdot i}$
3) $\boldsymbol{z_1 + z_2 = (0.5 + 6 \cdot i) + (3 + 4 \cdot i) = 0.5 + 6 \cdot i + 3 + 4 \cdot i = 3.5 + 10 \cdot i}$
$\boldsymbol{\overline{z_1 + z_2} = \overline{3.5 + 10 \cdot i} = 3.5 - 10 \cdot i}$

4.5 Division zweier Komplexer Zahlen

Wir haben herausgefunden, dass jede Komplexe Zahl eine konjugiert Komplexe Zahl besitzt. Nun sehen wir uns im Folgenden die Division zweier Komplexer Zahlen genau an:

$\boldsymbol{z_1 = 1.25 + 4 \cdot i;\ z_2 = 3 + 4 \cdot i}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1.25 + 4 \cdot i}{3 + 4 \cdot i} = z_3$$

Wie dividieren wir aber zwei Komplexe Zahlen? Uns stört, dass im Nenner die Variable $\boldsymbol{i}$ vorkommt. Eine Division der folgenden Art wäre für uns einfacher:

$$\frac{z_1}{8} = \frac{1.25 + 4 \cdot i}{8} = \frac{1.25}{8} + \frac{4}{8} i = z_3$$

Dementsprechend ist eine Division einer Komplexen Zahl mit einer reellen Zahl unproblematisch. Wie könnten wir den Nenner dazu bringen, eine reelle Zahl zu werden?

Ja, genau! Mithilfe der konjugiert Komplexen Zahlen. Dies aus dem Grund, da das Produkt einer Komplexen Zahl, mit der zu ihr konjugiert Komplexen Zahl reell ist.

Deswegen wäre es hilfreich, den Bruch mit der konjugiert Komplexen Zahl zur Komplexen Zahl $\boldsymbol{z_2 = 3 + 4 \cdot i}$ zu erweitern. Diese hat den Wert $\boldsymbol{\bar{z}_2 = 3 - 4 \cdot i}$. Dadurch wird der Nenner reell und demzufolge verschwindet die Variable $\boldsymbol{i}$ im Nenner. Dies ermöglicht uns, die Division zweier Komplexen Zahlen durchzuführen:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1.25 + 4 \cdot i) \cdot (3 - 4 \cdot i)}{(3 + 4 \cdot i) \cdot (3 - 4 \cdot i)} = \frac{3.75 - 5 \cdot i + 12 \cdot i - 16 \cdot i^2}{9 - 12 \cdot i + 12 \cdot i - 16 \cdot i^2}$$

$$= \frac{3.75 + 7 \cdot i - 16 \cdot (-1)}{9 - 16 \cdot (-1)} = \frac{3.75 + 7 \cdot i + 16}{9 + 16}$$

$$= \frac{19.75 + 7 \cdot i}{25} = \frac{19.75}{25} + \frac{7}{25} i = z_3$$

Hinweis: Zu beachten ist, dass der Bruch mit der zu $\boldsymbol{z_2}$ konjugiert Komplexen Zahl $\boldsymbol{\bar{z}_2}$ erweitert wird und nicht mit dem der zu $\boldsymbol{z_1}$ konjugiert Komplexen Zahl $\boldsymbol{\bar{z}_1}$.

Zur Repetition führen wir nun einige Aufgaben durch:

Aufgaben:

1) $\boldsymbol{z_1 = 3 + 2 \cdot i;\ z_2 = 7 - i} \rightarrow \frac{z_1}{z_2} = z_3 = ?$

2) $\boldsymbol{z_1 = 1;\ z_2 = i \rightarrow \frac{z_1}{z_2} = z_3} = ?$

<u>Lösungen:</u>

1) $\boldsymbol{\bar{z}_2 = 7 + i}$

$$\boldsymbol{\rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{(3 + 2 \cdot i) \cdot (7 + i)}{(7 - i) \cdot (7 + i)} = \frac{21 + 3 \cdot i + 14 \cdot i + 2 \cdot i^2}{49 + 7 \cdot i - 7 \cdot i - i^2}}$$

$$\boldsymbol{= \frac{21 + 17 \cdot i + 2 \cdot (-1)}{49 - 1 \cdot (-1)} = \frac{19 + 17 \cdot i}{49 + 1}}$$

$$\boldsymbol{= \frac{19 + 17 \cdot i}{50} = \frac{19}{50} + \frac{17}{50} i = z_3}$$

2) $\boldsymbol{\bar{z}_2 = -i}$

$$\boldsymbol{\rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{(1) \cdot (-i)}{(i) \cdot (-i)} = \frac{-i}{-i^2}}$$

$$\boldsymbol{= \frac{-1 \cdot i}{-1 \cdot (-1)} = \frac{-1 \cdot i}{1}}$$

$$\boldsymbol{= -\frac{1}{1} i = -i = z_3}$$

Wie an jedem Ende des jeweiligen Kapitels, ist es Zeit, den Kurztest durchzuführen.

Inhalt: Kurztest Kapitel 4
Link: https://www.geogebra.org/m/fgqrfjzp

Abb. 6: QR-Code 04

5. Geometrische Darstellung in kartesischer Form

Wir haben im letzten Kapitel gesehen, wie sich Komplexe Zahlen addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren lassen. Bei der Division sind wir zusätzlich auf die konjugiert Komplexen Zahlen gestossen. Aber war das wirklich alles? Wir führen eine neue Zahlenebene ein und sehen sie uns nicht geometrisch an? Natürlich nicht! Das Ziel dieses Kapitels ist, die Komplexen Zahlen auf eine geometrische und visuelle Art darzustellen wie auch deren Berechnungen in diesem Kontext aufzuzeigen. Hierbei werden der Addition wie auch der Subtraktion eine geometrische Bedeutung zugeordnet.

5.1 Gauss'sche Zahlenebene

Um unser Ziel zu erreichen repetieren wir in einem ersten Schritt die uns bekannten Informationen.

Wir wissen, dass eine Zahl der Form $\boldsymbol{z = x + y \cdot i}$ eine Komplexe Zahl ist. Hierbei stellt $\boldsymbol{i}$ die imaginäre Einheit dar. Die Variablen $\boldsymbol{x}$ wie auch $\boldsymbol{y}$ sind Elemente der Reellen Zahlen.

Demzufolge lässt sich daraus schliessen, dass jede Komplexe Zahl $\boldsymbol{z}$ durch ein reelles Zahlenpaar $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ festgelegt ist. Umgekehrt wird auch zu jeder Komplexen Zahl $\boldsymbol{z}$ ein reelles Zahlenpaar $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ zugeordnet.

Wie lässt sich nun eine Komplexe Zahl geometrisch darstellen?

Hierfür sehen wir uns folgende Beispiele an:

Ich fange mit einer simplen Quadratischen Gleichung an und werde sie anschliessend geometrisch darstellen.

$$\boldsymbol{x^2 = 9}$$

Die Quadratische Gleichung besitzt zwei Lösungen, $\boldsymbol{x_1}$ und $\boldsymbol{x_2}$.

$$\boldsymbol{x_1 = 3 \rightarrow 3^2 = 3 \cdot 3 = 9}$$

$$\boldsymbol{x_2 = -3 \rightarrow (-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9}$$

Dies kann anhand eines Zahlenstrahls geometrisch wie folgt aufgezeigt werden:

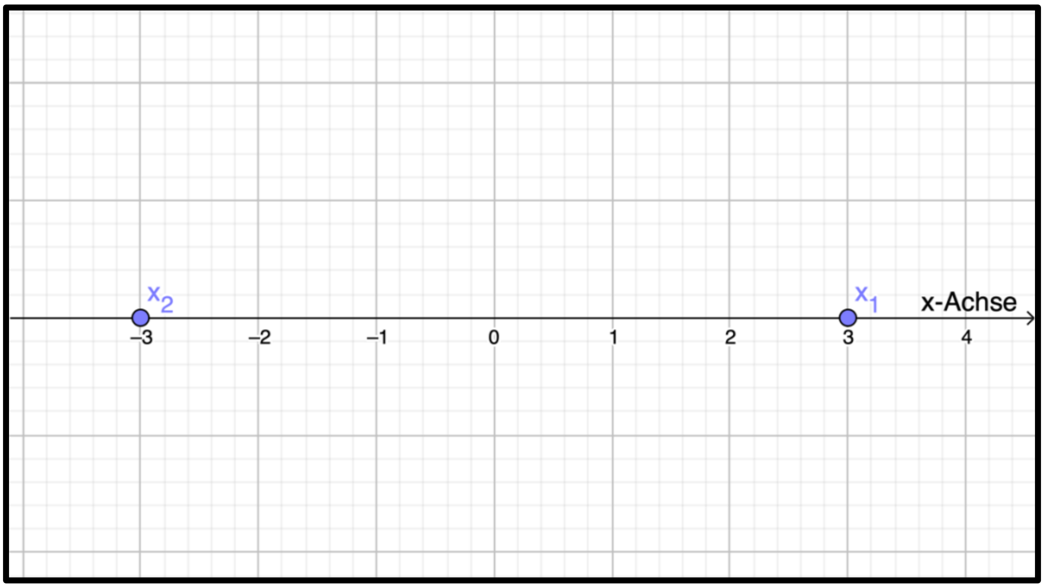


Abb. 7: Reeller Zahlenstrahl

Bemerkenswert ist, dass die x-Achse, also der Zahlenstrahl, Reelle Zahlen beinhaltet. Das heisst, dass die Lösungen von Quadratischen Gleichungen auf dem Zahlenstrahl geometrisch dargestellt werden können.

Um nun das Verständnis zu erweitern, sehen wir uns eine ähnliche Aufgabe an:

$$\boldsymbol{x^2 = -9}$$

Auch wenn sich die aufgeführte Quadratische Gleichung nur mit dem Vorzeichen vom vorherigen Beispiel unterscheidet, werden wir im Folgenden feststellen, dass dies einen grossen Einfluss haben wird.

Es existiert keine reelle Zahl, deren Quadrat eine negative Zahl ergibt. Hier kommen die Komplexen Zahlen zum Vorschein.

Vereinfacht sieht die Gleichung nun folgendermassen aus:

$$\boldsymbol{x^2 = (-1) \cdot 9}$$

$$\boldsymbol{x^2 = (-1) \cdot 9 = i^2 \cdot 9 = 9 \cdot i^2}$$

Die Quadratische Gleichung besitzt zwei Lösungen, $\boldsymbol{x_1}$ und $\boldsymbol{x_2}$.

$$\boldsymbol{x_1 = 3 \cdot i = z_1 = 0 + 3 \cdot i \rightarrow (3 \cdot i)^2 = 9 \cdot i^2}$$

$$\boldsymbol{x_2 = -3 \cdot i = z_2 = 0 - 3 \cdot i \rightarrow (-3 \cdot i)^2 = 9 \cdot i^2}$$

Nun stellt sich natürlich die Frage, wie beide Lösungen, welche zwei rein imaginäre Komplexe Zahlen darstellen, in einem Zahlenstrahl eingetragen werden sollen. Auf einem einfachen Zahlenstrahl mit reeller Eigenschaft ginge dies nicht, da sich die Lösung um eine Komplexe Zahl handelt.

Die Lösung liegt darin, eine neue Zahlenebene einzuführen. Hierbei geht es um die Einführung der sogenannten "Komplexen Zahlenebene" respektive "Gauss'schen Zahlenebene". Visuell dargestellt sieht das wie Folgt aus:

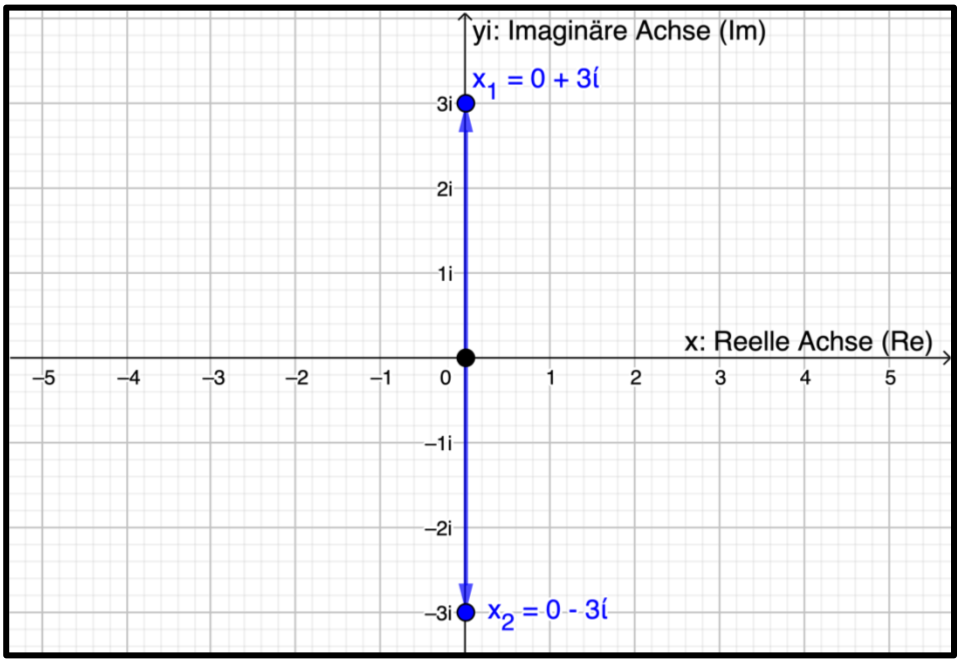


Abb. 8: Gauss'sche Zahlenebene

Hinweis: Der Grund, warum ich die beiden Lösungen, also die beiden Komplexen Zahlen, als Vektor dargestellt habe, wird in Kapitel 5.2 erläutert. Im Moment dient der Vektor nur zur visuellen Veranschaulichung von Komplexen Zahlen in der Gauss'schen Zahlenebene und dementsprechend als visuelles Mittel.

Jeder Komplexen Zahl $\boldsymbol{z = x + y \cdot i}$ wird der Punkt $(\boldsymbol{x, y})$ zugeordnet. Die Zahlenebene nennen wir die Gauss'sche Zahlenebene. Im Grunde genommen ist also die Gaus'ssche Zahlenebene die xy-Ebene für Komplexe Zahlen.

Informationen zur Gauss'schen Zahlenebene:

Die waagrechte Achse wird "Reelle Achse" genannt. Letztere wird benutzt, um den $\boldsymbol{Realteil}$ einer Komplexen Zahl darzustellen. Ihre Eigenschaft besteht darin, Reelle Zahlen darzustellen. Dies ist auch der Grund, weshalb die Reelle Achse mit der Bezeichnung $\mathbb{R}$ identifiziert wird - die Reelle Achse entspricht allen Reellen Zahlen. Die in Klammern aufgeführte Bezeichnung "(Re)" ist die Abkürzung von der Reellen Achse.

Im Gegensatz zur Reellen Achse wird die senkrechte Achse die "Imaginäre Achse" genannt. Sie wird benutzt, um den $\boldsymbol{Rein - Imaginärteil}$ einer Komplexen Zahl darzustellen. Ihre Aufgabe besteht darin, reell-imaginäre Zahlen darzustellen. Dies ist auch der Grund, warum die Imaginäre Achse mit der Bezeichnung $\mathbb{R}i$ oder $i\mathbb{R}$ identifiziert wird - die Imaginäre Achse entspricht allen rein imaginären Zahlen.

Hinweis: Der Grund, weshalb Kapitel 5 "Geometrische Darstellung in kartesischer Form" genannt wird, liegt daran, dass wir Komplexe Zahlen mithilfe der Gauss'schen Zahlenebene geometrisch darstellen können. Es gibt für die geometrische Darstellung von Komplexen Zahlen in der Gauss'schen Zahlenebene zwei Darstellungsweisen.
In Kapitel 5 wird die erste - kartesische - Darstellungsweise aufgezeigt. Durch die verschiedene geometrische Darstellungsweise von Komplexen Zahlen in der Gauss'schen Zahlenebene, entstehen Möglichkeiten, verschiedene geometrische Interpretationen innerhalb der Darstellungsweisen durchzuführen. Konkret heisst dies, dass in der ersten Darstellungsweise geometrische Interpretationen ermöglicht werden und in der zweiten Darstellungsweise genauso. Das ist der Grund, warum nicht nur ein einziges Kapitel zu der geometrischen Darstellung Komplexer Zahlen geschrieben wurde, sondern zwei.

Das hört sich vielleicht komplizierter an, als es tatsächlich ist. Aus diesem Grund sehen wir uns das folgende Beispiel an:

$\boldsymbol{z = 3 + 2 \cdot i}$

x: Reelle Achse → $\boldsymbol{Realteil\ von\ z \rightarrow 3}$

yi: Imaginäre Achse → $\boldsymbol{Rein - Imaginärteil\ von\ z \rightarrow 2 \cdot i}$

In der Gauss'schen Zahlenebene sieht das folgendermassen aus:

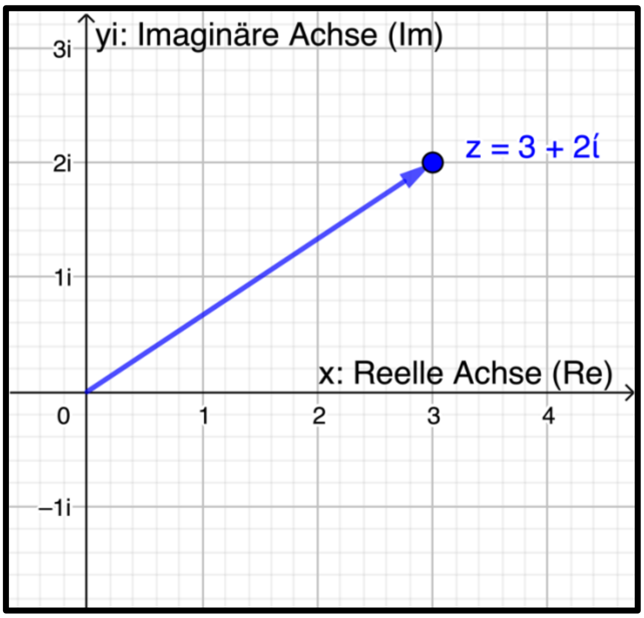


Abb. 9: Gauss'sche Zahlenebene

Nun haben wir eine Vorstellung, wie Komplexe Zahlen in der Gauss'schen Zahlenebene darzustellen sind. Hierbei ist es wichtig, Komplexe Zahlen selber in der Gauss'schen Zahlenebene darzustellen und zu sehen, wie und was sich abspielt. Um das bewerkstelligen zu können, gibt es im Folgenden ein interaktiv und visuell nutzbares Element. Mithilfe dessen entsteht ein persönlicher Bezug zu den Komplexen Zahlen in der Gauss'schen Zahlenebene und fördert somit das Verständnis.

Inhalt: Komplexe Zahlen in der Gauss'schen Zahlenebene
Link: https://www.geogebra.org/m/dtwwgf4y

Abb. 10: QR-Code 05

Um das Wissen nun zu repetieren, führen wir einige Aufgaben durch:

Aufgaben:

1) Stelle die Komplexe Zahl $\boldsymbol{z = 4 \cdot i}$ in der Gauss'schen Zahlenebene dar.
2) Stelle die Komplexe Zahl $\boldsymbol{z}$ mit $\boldsymbol{Re(z) = 3\,;\; Im(z) = -1}$ in der Gauss'schen Zahlenebene dar.

Lösungen:

1) $\boldsymbol{z = 4 \cdot i = 0 + 4 \cdot i}$

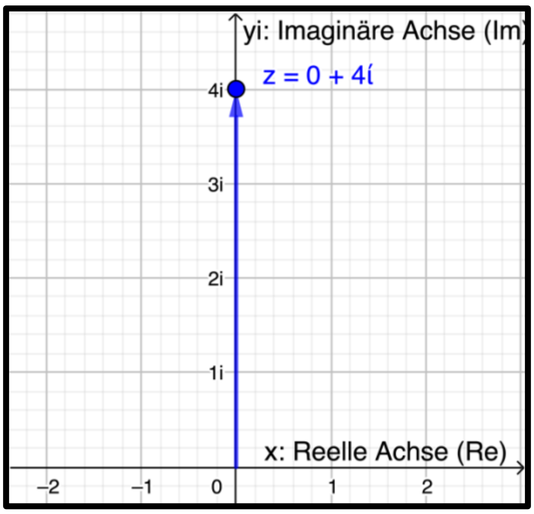


Abb. 11: Gauss'sche Zahlenebene

2) $\boldsymbol{z = 3 - 1 \cdot i}$

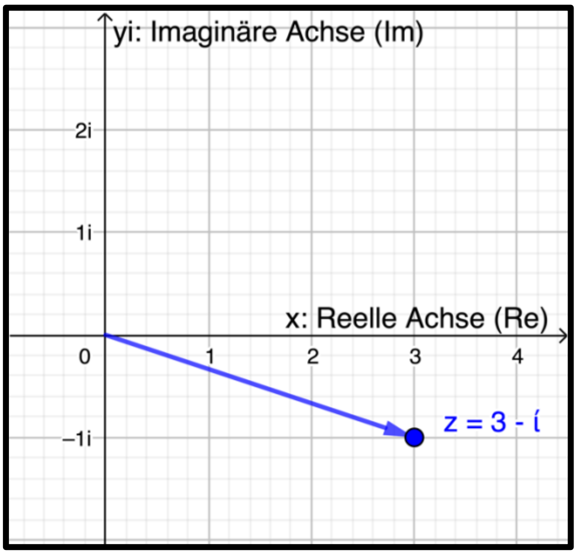


Abb. 12: Gauss'sche Zahlenebene

Im Folgenden sehen wir uns einige interessante Beispiele in der geometrischen Darstellung von Komplexen Zahlen an:

Aussage: $\boldsymbol{\bar{z} = -z}$

Annahme: $\boldsymbol{z = -2 + i}$

Überprüfung: $\boldsymbol{\bar{z} = -2 - i}$

$$\boldsymbol{-z = -(-2 + i) = +2 - i}$$

$$\boldsymbol{\rightarrow \bar{z} \neq -z}$$

Demnach ist die Falschheit der Aussage erwiesen. Nun stellt sich aber trotzdem die Frage, wie die konjugiert Komplexe Zahl sowie die entgegengesetzte Komplexe Zahl geometrisch aussehen würde. Hierfür sehen wir uns Folgendes an:

$\boldsymbol{z = -2 + i}$
$\boldsymbol{\bar{z} = -2 - i}$
$\boldsymbol{-z = 2 - i}$

Geometrisch sieht das wie Folgt aus:

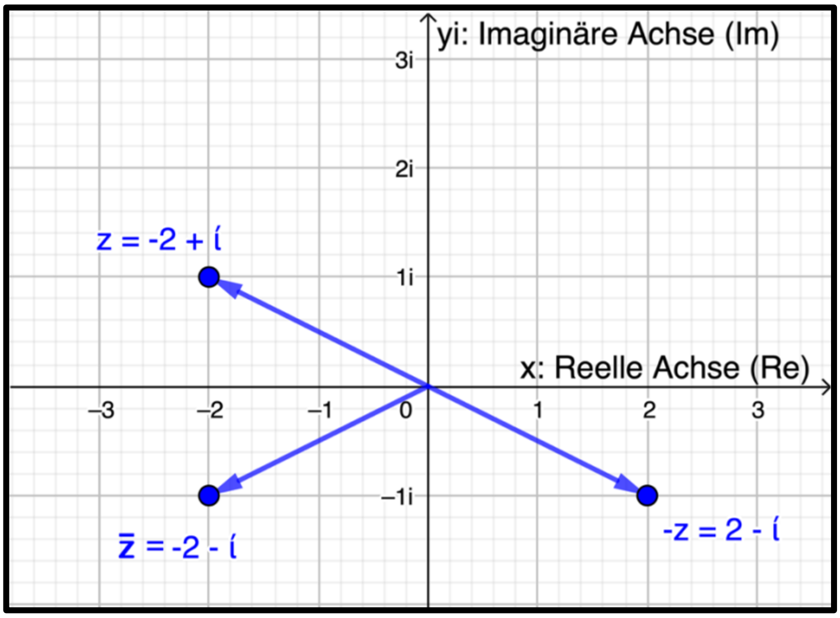


Abb. 13: Gauss'sche Zahlenebene

Demnach entspricht die Bildung der entgegengesetzten Komplexen Zahl zu $\boldsymbol{z}$ in der Gauss'schen Zahlenebene einer Spiegelung am Nullpunkt. Wohingegen die Bildung der konjugiert Komplexen Zahl zu $\boldsymbol{z}$ einer Achsenspiegelung an der Reellen Achse (Re) entspricht.

Zum Schluss gibt es noch eine interessante Aufgabe, welche wir zusammen lösen werden:

Markiere alle Punkte $\boldsymbol{z}$, für die $\boldsymbol{Re(z) \leq 3;\ Im(z) > 1}$ gilt.

→ Somit gilt, dass der Realteil kleiner gleich 3 und der Imaginärteil grösser als 1 sein müssen. Geometrisch dargestellt sieht das folgendermassen aus:

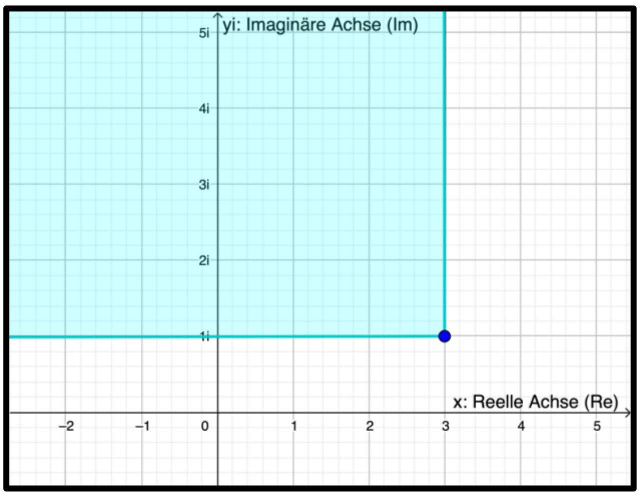


Abb. 14: Gauss'sche Zahlenebene

5.2 Operationen

Nun haben wir ein Verständnis dafür, wie Komplexe Zahlen geometrisch dargestellt werden. Dies funktioniert in der Gauss'schen Zahlenebene. Da wir in Kapitel 4 die Berechnungen mit Komplexen Zahlen angeschaut haben, stellt sich nun folgende Frage: Wie genau stelle ich dies in der Gauss'schen Zahlenebene dar. Deswegen sehen wir uns im Folgenden alle Rechenoperationen im Detail an und werden dabei auf eine interessante geometrische Interpretation stossen.

5.2.1 Addition

In Kapitel 5.1 wurde beschrieben, dass die Darstellung von Komplexen Zahlen in der Gauss'schen Zahlenebene mithilfe eines Vektors visuell "besser" dargestellt werden kann. Der Vektor diente als visuelles Mittel. Nun ändert sich das.
Jede Komplexe Zahl $\boldsymbol{z = x + y \cdot i}$ ist durch ein Zahlenpaar $(\boldsymbol{x, y})$ beziehungsweise geometrisch gesehen durch einen Punkt in der Gauss'schen Zahlenebene festgelegt. Dem Zahlenpaar $(\boldsymbol{x, y})$ lässt sich der Vektor $\binom{x}{y}$ zuordnen. Wir können also jeder x-beliebigen Komplexen Zahl einen Vektor in der Gauss'schen Zahlenebene zuordnen.

Wie in der Repetition beschrieben, stellen wir einen Vektor wie Folgt auf:

Wir starten mit dem Ursprung $\boldsymbol{O}$. Dieser wird den sogenannten Ortsvektor bilden. Dies funktioniert nur, wenn ein zweiter Punkt existiert. Wir nehmen an, dass der Punkt $\boldsymbol{z}$ (Komplexe Zahl) existiert. Um den sogenannten Ortsvektor zu bilden (Vektor vom Ursprung $\boldsymbol{O}$ zum Punkt $\boldsymbol{z}$) müssen wir folgende Schreibweise anwenden:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{Oz}} = \binom{x}{y}$$

Das Interessante dabei ist, dass die Addition zweier Komplexen Zahlen (siehe Kapitel 4.1) der Vektoraddition der zu $\boldsymbol{z_1}$ und $\boldsymbol{z_2}$ dazugehörenden Vektoren entspricht.

Dabei geht es darum, zwei Ortvektoren zu bilden. Eine davon ist vom Ursprung $\boldsymbol{O}$ zur ersten Komplexen Zahl $\boldsymbol{z_1}$, welche vom Zahlenpaar $(\boldsymbol{x_1, y_1})$ festgelegt ist. Der andere Vektor ist der Ortsvektor vom Ursprung $\boldsymbol{O}$ zur zweiten Komplexen Zahl $\boldsymbol{z_2}$, welche wiederum vom Zahlenpaar $(\boldsymbol{x_2, y_2})$ festgelegt ist.

Sehen wir uns hierfür ein Beispiel an:

$$\boldsymbol{z_1 = 5 + i \rightarrow \binom{x_1}{y_1} \rightarrow \overrightarrow{Oz_1} = \binom{5}{1}}$$

$$\boldsymbol{z_2 = 2 + 2 \cdot i} \rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{Oz}_2} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{2} \end{pmatrix}$$

Um nun die Vektoraddition durchzuführen, sehen wir uns im Folgenden an, wie genau Vektoren addiert werden.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{Oz_1}} + \overrightarrow{\boldsymbol{Oz}_2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{5 + 2} \\ \boldsymbol{1 + 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{7} \\ \boldsymbol{3} \end{pmatrix} = \overrightarrow{\boldsymbol{Oz}_3}$$

Hiermit kann gesagt werden, dass durch die Addition der beiden Vektoren $\overrightarrow{\boldsymbol{Oz_1}}$ und $\overrightarrow{\boldsymbol{Oz}_2}$ eine Summe $\overrightarrow{\boldsymbol{Oz}_3}$ ergibt, welche eine x-Komponente wie auch eine y-Komponente besitzt. Die x-Komponente entspricht dem ***Realteil*** $(\boldsymbol{Re(z_3)})$ und die y-Komponente entspricht dem ***Imaginärteil*** $(\boldsymbol{Im(z_3)})$.

$\boldsymbol{Re(z_3) = 7}$ und $\mathbf{Im}(\boldsymbol{z_3}) \boldsymbol{= 3}$

$\rightarrow \boldsymbol{z_3 = 7 + 3 \cdot i}$

Zum Vergleich sehen wir uns die Addition zweier Komplexen Zahlen an:

$\boldsymbol{z_1 = 5 + i}$
$\boldsymbol{z_2 = 2 + 2 \cdot i}$
$\boldsymbol{z_1 + z_2 = (5 + i) + (2 + 2 \cdot i) = 5 + i + 2 + 2 \cdot i = 7 + 3 \cdot i = z_3}$

Bewiesen wurde hiermit, dass die Vektoraddition mit der Addition zweier Komplexen Zahlen korreliert.

Wie genau soll dies geometrisch dargestellt werden?

Im Folgenden sehen wir uns die Vektoraddition geometrisch und visuell an:

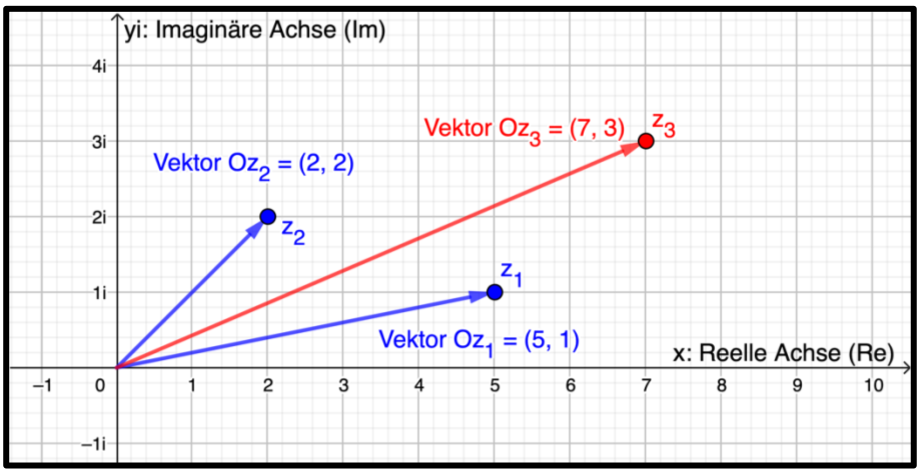


Abb. 15: Vektoraddition

Im Folgenden vergleichen wir die Summe der Vektoraddition, also $\overrightarrow{\boldsymbol{Oz_3}}$ mit der Summe der Addition zweier Komplexen Zahlen, also $\boldsymbol{z_3}$.

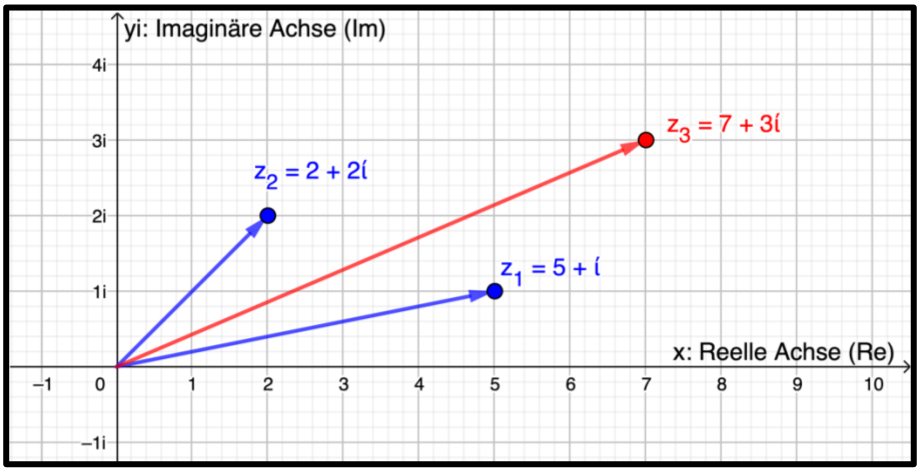


Abb. 16: Geometrische Addition zweier Komplexen Zahlen

Folglich konnte bewiesen werden, dass die x-Komponente der Summe der Vektoraddition dem Realteil der Summe beider Komplexen Zahlen entspricht. Bewiesen wurde zudem, dass die y-Komponente der Summe der Vektoraddition dem Imaginärteil der Summe beider Komplexen Zahlen entspricht. Anhand dessen konnte die Addition zweier Komplexen Zahlen in kartesischer Form geometrisch interpretieren werden.

Hierfür habe ich ein interaktiv und visuell benutzbares Element erstellt:

Inhalt: Addition zweier Komplexen Zahlen
Link: https://www.geogebra.org/m/uzggtxh2

Abb. 17: QR-Code 06

Zudem habe ich ein Kurzvideo zur geometrischen Interpretation der Addition zweier Komplexen Zahlen erstellt, welche eine von mir akustisch und visuell aufgezeigte Repetition darstellt.

Inhalt: Kurzvideo zur Addition zweier Komplexen Zahlen
Link: https://www.geogebra.org/m/cdqjp6qp

Abb. 18: QR-Code 07

5.2.2 Subtraktion

Auch die Subtraktion zweier Komplexen Zahlen kann geometrisch interpretiert werden. Hierbei gehen wir wie bei der Addition zweier Komplexen Zahlen vor. Als Erstes ist es von Wichtigkeit, die Vektorsubtraktion zu verstehen. Diese sieht folgendermassen aus:

$$\boldsymbol{z_1 = 5 + i \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{Oz_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{z_2 = 2 + 2 \cdot i \rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{Oz_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{Oz_1} - \overrightarrow{Oz_2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{Oz_3}}$$

Wie auch in der Addition zu sehen war, entspricht die x-Komponente der Differenz beider Vektoren dem $\boldsymbol{Realteil}$ ($\boldsymbol{Re(z_3)}$) der dazugehörenden Komplexen Zahl $\boldsymbol{z_3}$, wobei $\boldsymbol{z_3}$ der Differenz der Komplexen Zahlen $\boldsymbol{z_1}$ und $\boldsymbol{z_2}$ entspricht. Folglich stellt die y-Komponente der Differenz beider Vektoren den $\boldsymbol{Imaginärteil}$ ($\boldsymbol{Im(z_3)}$) der dazugehörenden Komplexen Zahl $\boldsymbol{z_3}$ dar.

Dementsprechend müsste die Subtraktion zweier Komplexen Zahlen die Differenz $\boldsymbol{z_3}$ ergeben. Wie vorhin ausgerechnet, besitzt $\boldsymbol{z_3}$ das Zahlenpaar $(3, -1)$, welches wir durch die Vektorsubtraktion ausrechnen konnten. Demzufolge müsste die Differenz der beiden Komplexen Zahlen wie folgendermassen aussehen:

$\boldsymbol{Re(z_3) = 3}$ und $\boldsymbol{Im(z_3) = -1 \rightarrow z_3 = 3 - 1 \cdot i}$

Zum Vergleich sehen wir uns die Subtraktion zweier Komplexen Zahlen an:

$\boldsymbol{z_1 = 5 + i}$
$\boldsymbol{z_2 = 2 + 2 \cdot i}$
$\boldsymbol{z_1 - z_2 = (5 + i) - (2 + 2 \cdot i) = 5 + i - 2 - 2 \cdot i = 3 - 1 \cdot i = z_3}$

Demgemäss wurde bewiesen, dass die Vektorsubtraktion mit der Subtraktion zweier Komplexen Zahlen einhergeht. Durch die Vektorsubtraktion kann das reelle Zahlenpaar für die Differenz beider Komplexen Zahlen ausgerechnet werden. Aufgrund dessen wird die Vektorsubtraktion für die Subtraktion zweier Komplexen Zahlen nutzbar. Dies ist auch der Grund, warum dies solch eine Relevanz mit sich trägt.

Wie wird das nun geometrisch aufgezeigt?

Im Folgenden sehen wir uns die Vektorsubtraktion geometrisch und visuell an:

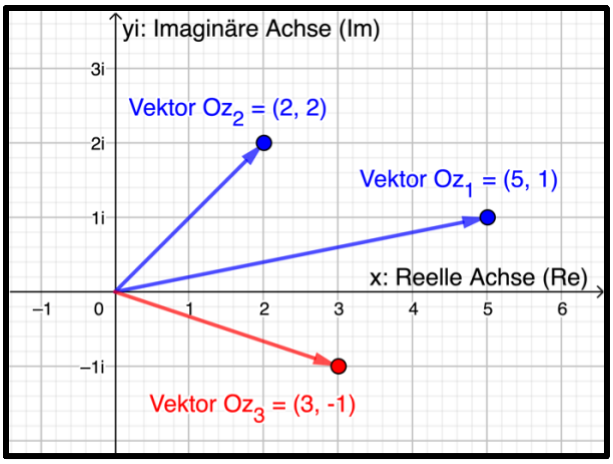


Abb. 19: Vektorsubtraktion

Im Folgenden vergleichen wir die Differenz der Vektorsubtraktion, also $\boldsymbol{\overrightarrow{Oz_3}}$, mit der Differenz der Subtraktion zweier Komplexen Zahlen, also $\boldsymbol{z_3}$.

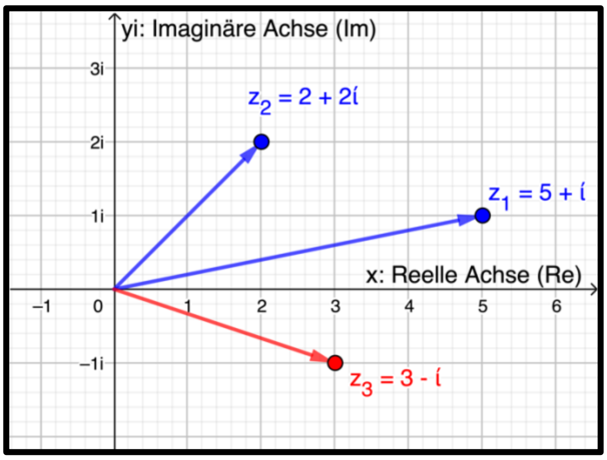


Abb. 20: Subtraktion zweier Komplexen Zahlen

Dementsprechend konnte bewiesen werden, dass die x-Komponente der Subtraktion der Vektorsubtraktion dem Realteil der Differenz beider Komplexen Zahlen entspricht. Sowie, dass die y-Komponente der Differenz der Vektorsubtraktion dem Imaginärteil der Differenz beider Komplexen Zahlen entspricht. Anhand dessen konnten wir die Subtraktion zweier Komplexen Zahlen in kartesischer Form geometrisch interpretieren.

Hierfür habe ich ein interaktiv und visuell benutzbares Element erstellt.

Inhalt: Subtraktion zweier Komplexen Zahlen
Link: https://www.geogebra.org/m/hztdmmmp

Abb. 21: QR-Code 08

Darüber hinaus habe ich ein Kurzvideo zur geometrischen Interpretation der Subtraktion zweier Komplexen Zahlen erstellt, welche eine von mir akustisch und visuell aufgezeigte Repetition darstellt.

Inhalt: Kurzvideo zur Subtraktion zweier Komplexen Zahlen
Link: https://www.geogebra.org/m/txnuzsx7

Abb. 22: QR-Code 09

Zum Schluss möchte ich noch eine interessante Rechenoperation der Differenz aufzeigen:

Uns ist bekannt, dass man zwei Komplexe Zahlen z_1 und z_2 subtrahieren kann. Im Folgenden möchte ich eine andere Darstellungsweise aufzeigen, die mit der Subtraktion beider Komplexen Zahlen einhergeht.

$$z_1 - z_2 = z_3$$
$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = z_3$$

$z_1 = 5 + i$
$z_2 = 2 + 2 \cdot i \rightarrow -z_2 = -2 - 2 \cdot i$
$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (5 + i) + (-2 - 2 \cdot i) = 5 + i - 2 - 2 \cdot i = 3 - 1 \cdot i = z_3$

Dies wird geometrisch folgendermassen ersichtlich:

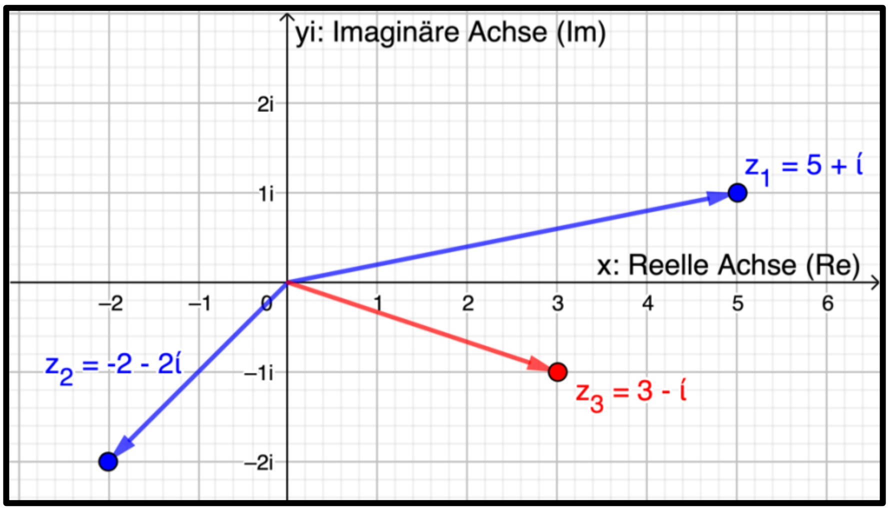


Abb. 23: Addition zweier Komplexen Zahlen innerhalb der Subtraktion

Das bedeutet, dass die Subtraktion zweier Komplexen Zahlen zu einer Addition wird, indem die zu subtrahierende Komplexe Zahl z_2 entgegengesetzt benutzt wird. Somit haben wir die Differenz der beiden Komplexen Zahlen z_1 und z_2 durch die Addition der Komplexen Zahl z_1 mit der entgegengesetzten Komplexen Zahl z_2 erhalten!

5.2.3 Betrag

Noch eine weitere geometrische Interpretation der Komplexen Zahlen hängt mit der Nutzung von Vektoren ab. Dieses Element habe ich in den Kurzvideos angesprochen, möchte es jedoch noch einmal aufgreifen. Dies geschieht wie folgt:

Wir nutzen Vektoren um einerseits die Addition wie auch die Subtraktion zweier Komplexen Zahlen geometrisch zu interpretieren. Andererseits dienen die Vektoren auch als visuelles Mittel zur Veranschaulichung. Wir haben uns jedoch noch keine Überlegungen über die Länge des Vektors gemacht. Diesbezüglich stellt sich die Frage, ob die Länge des Vektors mit der geometrischen Interpretation in Verbindung gesetzt werden kann.

Die Länge des Vektors entspricht dem Betrag der Komplexen Zahlen z.

Wir sehen uns das im Folgenden genauer an:

Es sei eine Zahl z gegeben, deren Wert $z = 3 + i$ ist.

Die Länge des zu $\boldsymbol{z}$ dazugehörenden Vektors, also der Abstand des Punktes $\boldsymbol{z}$ zum Nullpunkt/Ursprung, ist nach dem Satz von Pythagoras folgendermassen definiert:

$$|\boldsymbol{z}| = |\mathbf{3} + \boldsymbol{i}| = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2} = \sqrt{\mathbf{3}^2 + \mathbf{1}^2} = \sqrt{\mathbf{9} + \mathbf{1}} = \sqrt{\mathbf{10}}$$

Demzufolge kann gesagt werden, dass durch die Nutzung von Vektoren zum einen die geometrische Interpretation der Addition und Subtraktion durchführbar wird und zum anderen die Länge des zu $\boldsymbol{z}$ dazugehörenden Vektors dem Betrag der Komplexen Zahl $\boldsymbol{z}$ entspricht.

Um das Wissen nun zu repetieren, führen wir einige Aufgaben durch:

Aufgaben:

1) Berechne den Betrag der Komplexen Zahl $\boldsymbol{z}$ mit der Gleichung $\boldsymbol{z} = \mathbf{2} + \boldsymbol{i}$.

2) Berechne den Betrag der Komplexen Zahl $\boldsymbol{z}$ mit der Gleichung $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{i}$.

Lösungen:

1) $\boldsymbol{z} = \mathbf{2} + \boldsymbol{i} \rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{2};\ \boldsymbol{y} = \mathbf{1} \rightarrow |\boldsymbol{z}| = \sqrt{\mathbf{2}^2 + \mathbf{1}^2} = \sqrt{\mathbf{4} + \mathbf{1}} = \sqrt{\mathbf{5}}$

2) $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{i} = \boldsymbol{z} = \mathbf{0} + \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{i} \rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0};\ \boldsymbol{y} = \mathbf{1} \rightarrow |\boldsymbol{z}| = \sqrt{\mathbf{0}^2 + \mathbf{1}^2} = \sqrt{\mathbf{1}} = \mathbf{1}$

5.2.4 Multiplikation und Division

Wir haben bis anhin die geometrische Interpretation der Addition und Subtraktion anhand von Vektoren visuell dargestellt. Zusätzlich haben wir gesehen, dass die Länge des dazugehörenden Vektors dem Betrag der Komplexen Zahl $\boldsymbol{z}$ entspricht. Nun stellt sich diesbezüglich die Frage, wie es mit den anderen Arten der Operationen von Komplexen Zahlen aussieht. Konkret: Können die Multiplikation wie auch die Division sowohl visuell dargestellt werden als auch geometrisch interpretiert werden?

Um diese Fragen beantworten zu können, sehen wir im Folgenden ein Beispiel für eine Multiplikation zweier Komplexen Zahlen an:

$\boldsymbol{z}_1 = \mathbf{1} + \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{i};\ \boldsymbol{z}_2 = \mathbf{2} - \mathbf{9} \cdot \boldsymbol{i};\ \boldsymbol{z}_3 = ?$

$$\boldsymbol{z}_1 \cdot \boldsymbol{z}_2 = (\mathbf{1} + \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{i}) \cdot (\mathbf{2} - \mathbf{9} \cdot \boldsymbol{i}) = \mathbf{2} - \mathbf{9} \cdot \boldsymbol{i} + \mathbf{4} \cdot \boldsymbol{i} - \mathbf{18} \cdot \boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{z}_3$$

$$\boldsymbol{z}_1 \cdot \boldsymbol{z}_2 = (\mathbf{1} + \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{i}) \cdot (\mathbf{2} - \mathbf{9} \cdot \boldsymbol{i}) = \mathbf{2} - \mathbf{9} \cdot \boldsymbol{i} + \mathbf{4} \cdot \boldsymbol{i} - \mathbf{18} \cdot (-\mathbf{1}) = \boldsymbol{z}_3$$

$$\boldsymbol{z}_1 \cdot \boldsymbol{z}_2 = (\mathbf{1} + \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{i}) \cdot (\mathbf{2} - \mathbf{9} \cdot \boldsymbol{i}) = \mathbf{2} - \mathbf{9} \cdot \boldsymbol{i} + \mathbf{4} \cdot \boldsymbol{i} + \mathbf{18} = \mathbf{20} - \mathbf{5} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{z}_3$$

Visuell dargestellt sieht die Berechnung folgendermassen aus:

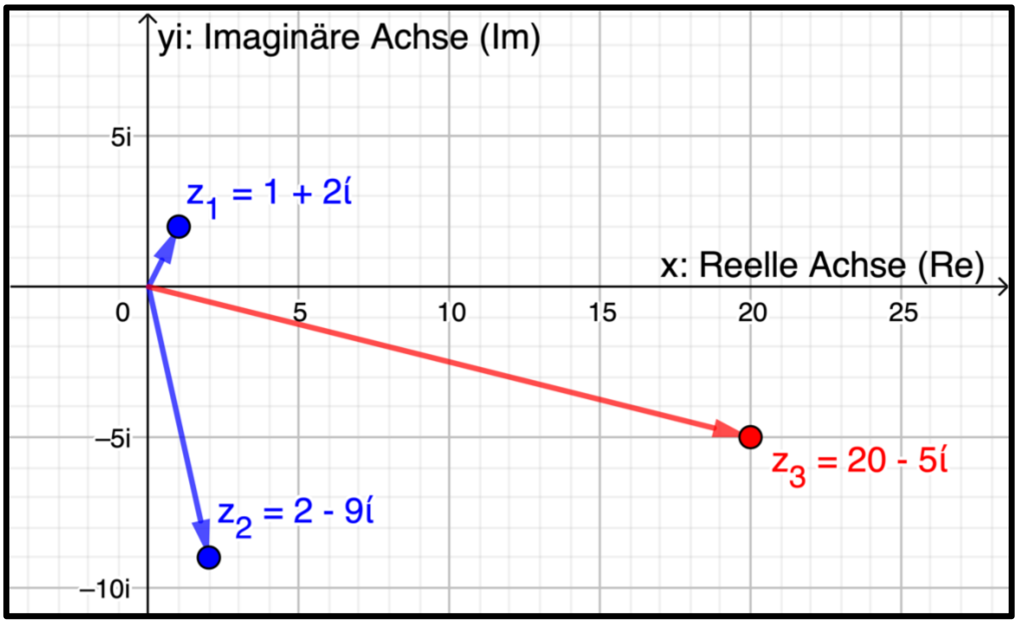


Abb. 24: Multiplikation zweier Komplexen Zahlen (kartesisch)

Durch die visuelle Darstellung haben wir eine Vorstellung, wie das Produkt zweier Komplexen Zahlen (in kartesischer Form) in der Gauss'schen Zahlenebene dargestellt ist. Also dient dies nur zur visuellen Veranschaulichung der Multiplikation. Geometrisch interpretiert wird die Multiplikation erst in Kapitel 6. Dies liegt daran, dass die Multiplikation zweier Komplexen Zahlen in kartesischer Form durchaus möglich ist, aber keinerlei geometrische Bedeutung hat. Es dient somit grundsätzlich der visuellen Veranschaulichung.

Nichtsdestotrotz kann es sinnvoll sein, die Multiplikation visuell dargestellt zu sehen. Hierfür dient das folgende visuell und interaktiv gestaltete Element:

Inhalt: Multiplikation zweier Komplexen Zahlen in kartesischer Form
Link: https://www.geogebra.org/m/knspjwrj

Abb. 25: QR-Code 10

Dies gilt nicht nur für die Multiplikation zweier Komplexen Zahlen in kartesischer Form, sondern auch für die Division zweier Komplexen Zahlen in kartesischer Form.

Zur Veranschaulichung sehen wir folgendes Beispiel an:

$$\boldsymbol{z_1 = 3 + 2 \cdot i;\ z_2 = 7 - i \rightarrow \frac{z_1}{z_2} = z_3} = ?$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\bar{z}_2 = 7 + i}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3 + 2 \cdot i) \cdot (7 + i)}{(7 - i) \cdot (7 + i)} = \frac{21 + 3 \cdot i + 14 \cdot i + 2 \cdot i^2}{49 + 7 \cdot i - 7 \cdot i - i^2}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{21 + 17 \cdot i + 2 \cdot (-1)}{49 - 1 \cdot (-1)} = \frac{19 + 17 \cdot i}{49 + 1}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{19 + 17 \cdot i}{50} = \frac{19}{50} + \frac{17}{50} i = 0.38 + 0.34 \cdot i = z_3}$$

Visuell dargestellt sieht die Berechnung folgendermassen aus:

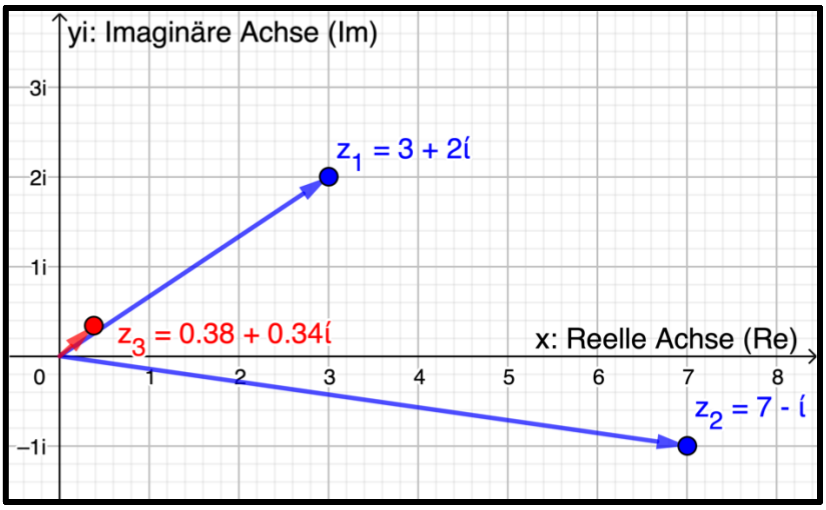


Abb. 26: Division zweier Komplexen Zahlen (kartesisch)

Auch bei der Division ging es hauptsächlich um die visuelle Veranschaulichung. Geometrisch interpretierbar wird es erst mithilfe einer anderen Darstellungsweise von Komplexen Zahlen, welche wir in Kapitel 6 genauer ansehen werden.

Ich hoffe, dass die visuelle Veranschaulichung das Verständnis verstärkt und habe deswegen auf der nächsten Seite ein interaktives und visuelles Element erstellt.

Inhalt: Division zweier Komplexen Zahlen in kartesischer Form
Link: https://www.geogebra.org/m/zkfu2nwe

Abb. 27: QR-Code 11

Wie an jedem Ende des Kapitels, ist es Zeit, den Kurztest zum jeweiligen Kapitel durchzuführen.

Inhalt: Kurztest Kapitel 5
Link: https://www.geogebra.org/m/mqscju4y

Abb. 28: QR-Code 12

6. Geometrische Darstellung in polarer Form

Die Polarform stellt die zweite Darstellungsform für Komplexe Zahlen in der Gauss'schen Zahlenebene dar. Hierbei werden wir sehen, dass der Multiplikation wie auch der Division eine Wichtigkeit auf Grund der Polarform zugeordnet wird. Dies geht mit folgendem Grund einher: Die Polarform führt dazu, dass die Multiplikation und Division zweier Komplexen Zahlen geometrisch interpretiert werden können. Die geometrische Interpretation der Multiplikation und der Division waren in der kartesischen Darstellungsweise nicht möglich. Nur die Addition und die Subtraktion waren vektoriell addierbar wie auch subtrahierbar. Die in der kartesischen Form benutzte Normalform war die Beschreibung von Komplexen Zahlen anhand der Real- und Imaginärteile. Dementsprechend konnten wir in der Gauss'schen Zahlenebene die kartesische Form vektoriell darstellen. Dieser Vektor hatte grundsätzlich den Sinn, dass er durch die Angabe des Real- und Imaginärteils der Komplexen Zahl eindeutig festgelegt war.

6.1 Komplexe Zahlen in Polarform

Was aber unterscheidet nun die Normalform mit der Polarform?

In der Polarform wird der Vektor als Zeiger aufgefasst. Dieser Zeiger ist durch dessen Länge $\boldsymbol{r}$ und dessen Winkel $\boldsymbol{\varphi}$ festgelegt.

Um dies visualisieren zu können, sehen wir uns folgendes Beispiel an:

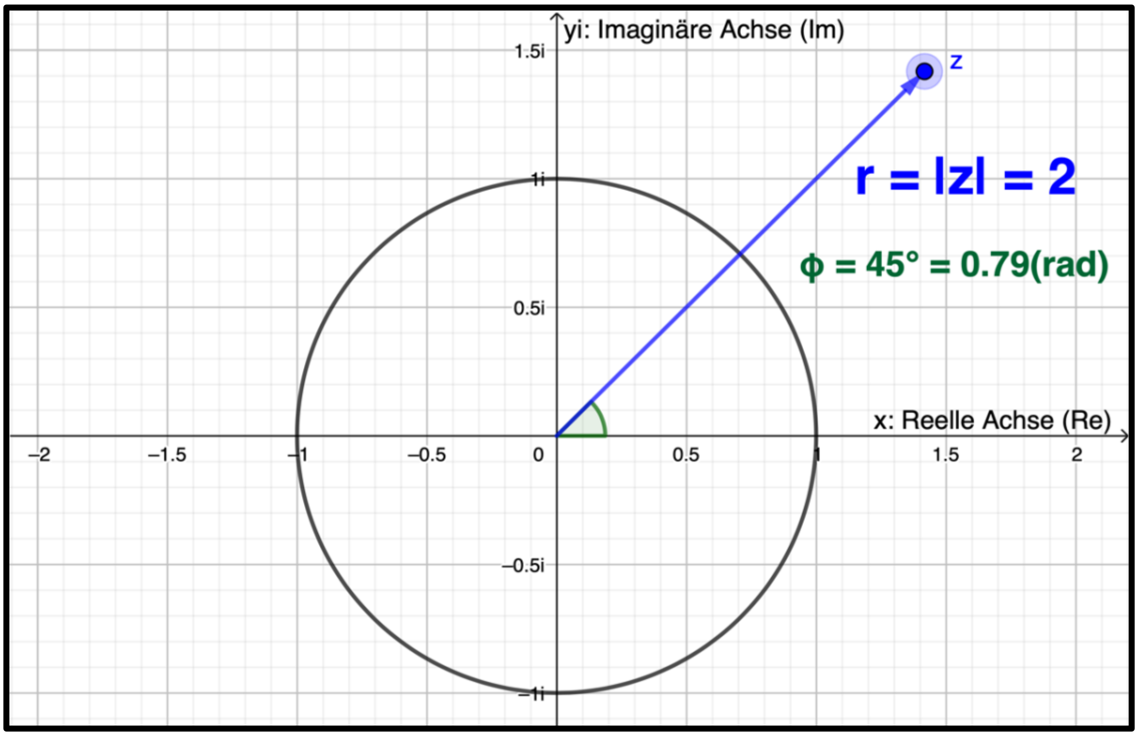


Abb. 29: Polarform

Hierbei entspricht der Winkel $\boldsymbol{\varphi}$ demjenigen Winkel, um den die positive Reelle Achse gedreht werden muss, bis sie auf die Länge $\boldsymbol{r}$ zu liegen kommt. Die Länge $\boldsymbol{r}$ entspricht dem Abstand von $\boldsymbol{z}$ zum Nullpunkt $\boldsymbol{O}$ und somit nichts Weiterem wie dem Betrag der Komplexen Zahl $\boldsymbol{z}$ respektive die zu $\boldsymbol{z}$ dazugehörende Länge des Vektors $\overrightarrow{\boldsymbol{Oz}}$.

Nun möchte ich auf einen interessanten Aspekt zu sprechen kommen:

Die Länge $\boldsymbol{r}$ entspricht dem Betrag der Komplexen Zahl $\boldsymbol{z}$ und somit auch der Länge des Vektors $\overrightarrow{\boldsymbol{Oz}}$. Beobachtet wird zudem, dass der Abstand von $\boldsymbol{z}$ zum Nullpunkt $\boldsymbol{O}$ der Länge $\boldsymbol{r}$ entspricht. Demzufolge entspricht die Länge $\boldsymbol{r}$ dem Radius.

Nun stellt sich die Frage, wieso die Länge $\boldsymbol{r}$ dem Radius entsprechen soll, wenn kein Kreis vorhanden ist.

Dies wird folgendermassen begründet: Es ist eben doch ein unsichtbarer Kreis vorhanden. Dies liegt daran, dass der Einheitskreis (siehe Kapitel 2.4) eingezeichnet ist. Der Einheitskreis ist jener Kreis, der einerseits den Radius $\boldsymbol{r = 1}$ besitzt und andererseits zur Umrechnung vom Gradmass in das Bogenmass genutzt wird. Aber was haben das Gradmass und das Bogenmass mit der Polarform zu tun?

Das Bogenmass entspricht einer anderen Darstellungsweise von Winkeln. Die Polarform stellt eine andere Darstellungsweise von Komplexen Zahlen in der Gauss'schen Zahlenebene dar. Beide Darstellungsweisen beruhen darauf, dass sie "geometrischer" respektive "trigonometrischer" wie die anderen Darstellungsweisen sind. Es ist auch kein Zufall, dass wir in beiden Fällen Definitionen wie auch Veranschaulichungen mithilfe des Einheitskreises durchführen werden. Wir werden im Folgenden auch sehen, dass in der Polarform grundsätzlich mit dem Bogenmass zu arbeiten ist. Daraus lässt sich schliessen, dass die Polarform mit dem Bogenmass in Zusammenhang steht.

Wenn wir uns nun die Abbildung 27 zur Polarform ansehen, bemerken wir, dass der Wert von $\boldsymbol{r}$ der Zahl 2 entspricht. Dies entspricht einer Verdopplung der Länge des dazugehörenden Einheitszeigers (siehe Einheitszeiger $\rightarrow$ $\boldsymbol{r = 1}$). Demnach wird folgendermassen geschrieben:

$\boldsymbol{2 \cdot \mathit{Einheitszeiger\ mit\ dem\ Winkel}\ 45°}$

Hinweis: $Einheitszeiger \rightarrow \boldsymbol{e^{i}}nheitszeiger$

Für eine Komplexe Zahl $\boldsymbol{z}$, die mit dem Zeiger der Länge $\boldsymbol{r = 2}$ und dem Winkel $\boldsymbol{\varphi = 45°}$ kohäriert, schreiben wir:

$$\boldsymbol{z = 2 \cdot e^{i \cdot 45°}}$$

Daraus lässt sich die allgemeine Polarform schliessen:

$$\boldsymbol{z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}}$$

Diese Schreibweise sieht womöglich schwierig und unverständlich aus. Für den Moment leiten wir nicht her, weshalb wir solch eine Schreibweise benutzen. Im Moment ist diese Schreibweise die Polarform für uns und in Kapitel 6.2 werden wir sehen, dass die allgemeine Polarform nur eine andere Darstellungsweise der Normalform ist.

Hinweis: Normalerweise steht $\boldsymbol{\varphi}$ im Bogenmass. Da ich nicht davon ausgehen kann, dass jede Person einen Taschenrechner mit der Bogenmassfunktion besitzt, werden für das Kapitel 6 beide Arten - Gradmass wie auch Bogenmass - aufgeführt. Hierfür werde ich die in der Repetition dargestellte Abbildung aufzeigen, welche auf der einen Seite die Umrechnung aufzeigt und auf der anderen Seite spezielle Werte aufführt.

Winkelmass	Spezielle Werte					Umrechnungsformel
Gradmass	$\mathbf{360°}$	$\mathbf{180°}$	$\mathbf{90°}$	$\mathbf{60°}$	$\mathbf{45°}$	$\mathbf{30°}$	$\boldsymbol{a}$
Bogenmass	$\boldsymbol{2\pi}$	$\boldsymbol{\pi}$	$\boldsymbol{\pi/2}$	$\boldsymbol{\pi/3}$	$\boldsymbol{\pi/4}$	$\boldsymbol{\pi/6}$	$\boldsymbol{a\cdot\frac{\pi}{180°}}$

Als Beispiel sehen wir uns die Umrechnung vom Winkel $\boldsymbol{\varphi = 45°}$ an, sodass wir sicherstellen können, dass jede Person die Umrechnung auch beherrscht.

Gradmass → $\boldsymbol{\varphi = 45°}$
Bogenmass → $\boldsymbol{\varphi = 45°\cdot\frac{\pi}{180°} = 0.785398}$

Das in der Einführung aufgeführte Beispiel im Gradmass $\boldsymbol{z = 2\cdot e^{i\cdot 45°}}$ wäre demnach im Bogenmass $\boldsymbol{z = 2\cdot e^{i\cdot 0.785398}}$.

Demzufolge haben wir gesehen, wie die Polarform aufgebaut ist (ohne Herleitung) und haben die Umrechnung vom Grad- zum Bogenmass repetiert. Nun sehen wir uns einige Aufgaben zur Polarform an:

Polarform: $\boldsymbol{z = r\cdot e^{i\cdot\varphi}}$

Beispiel: Gradmass → $\boldsymbol{z = 3\cdot e^{i\cdot 0°}}$
Bogenmass → $\boldsymbol{z = 3\cdot e^{i\cdot 0}}$

$\rightarrow \boldsymbol{3\ \cdot Einheitszeiger\ mit\ dem\ Winkel\ 0°\ respektive\ 0}$

Visuell dargestellt sieht das folgendermassen aus:

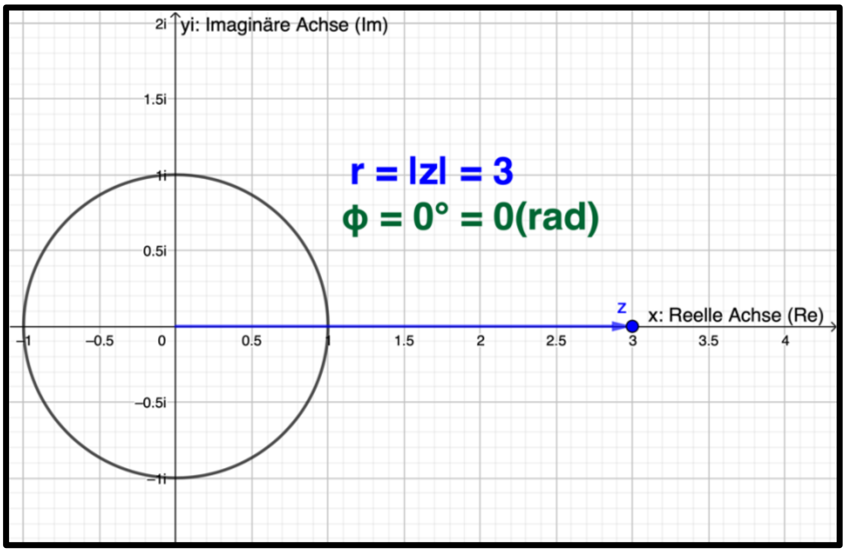


Abb. 30: Polarform

Demnach wird eine Komplexe Zahl $\boldsymbol{z}$ eindeutig durch die Angabe der Länge $\boldsymbol{r}$ und des Winkels $\boldsymbol{\varphi}$ beschrieben. Die Form $\boldsymbol{z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}}$ ($\boldsymbol{r}$-mal Einheitszeiger mit Winkel $\boldsymbol{\varphi}$) wird Polarform von $\boldsymbol{z}$ genannt und im Gegensatz dazu existiert die uns bekannte Normalform von $\boldsymbol{z}$ mit der Form $\boldsymbol{z = x + y \cdot i}$.

Der zu $\boldsymbol{z}$ gehörende Winkel $\boldsymbol{\varphi}$ ($\boldsymbol{0 \leq \varphi < 360° \,/\, 0 \leq \varphi < 2 \cdot \pi}$) wird als Argument von $\boldsymbol{z}$ bezeichnet. Dies wird wie folgt dargestellt:

$\boldsymbol{\varphi \rightarrow arg(z)}$

Sonderfall: $\boldsymbol{r = 0 \rightarrow z = 0 \cdot e^{i \cdot \varphi} = 0}$

$\boldsymbol{\rightarrow arg(0) = \varphi \rightarrow}$ frei wählbar!

Nun sehen wir uns zusammen einige spezielle Aufgaben an:

Beispiel: Gradmass $\boldsymbol{\rightarrow z = 4 \cdot e^{i \cdot 135°}}$

Bogenmass $\boldsymbol{\rightarrow z = 4 \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{4}}}$

<u>Aufgaben:</u>

1) Gib den Betrag der Komplexen Zahl $\boldsymbol{z}$ an.
2) Gib das Argument der Komplexen Zahl $\boldsymbol{z}$ an.
3) Gib das Argument der entgegengesetzten Komplexen Zahl $\boldsymbol{-z}$ an.
4) Gib das Argument der zu $\boldsymbol{z}$ konjugiert Komplexen Zahl $\boldsymbol{\bar{z}}$ an.

Lösungen:

1) $\boldsymbol{r = |z| = 4}$

2) Gradmass → $\boldsymbol{arg(z) = 135°}$
Bogenmass → $\boldsymbol{arg(z) = \frac{3\pi}{4}}$

3) Wir wissen, dass die entgegengesetzte Komplexe Zahl $\boldsymbol{-z}$ einer Spiegelung von $\boldsymbol{z}$ am Nullpunkt zur Folge hat. Visuell sieht das folgendermassen aus:

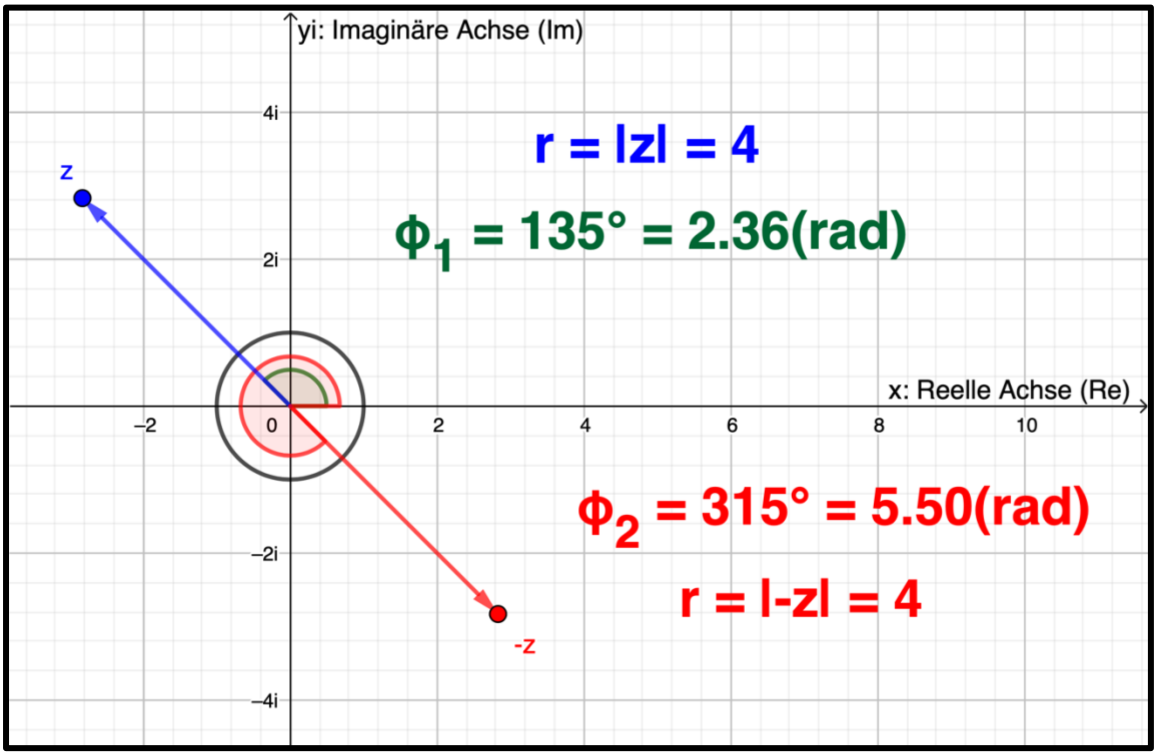


Abb. 31: Polarform

Demzufolge kann gesagt werden, dass durch die Spiegelung am Nullpunkt $\boldsymbol{180°}$ respektive $\boldsymbol{\pi}$ dazugerechnet werden muss.

Gradmass → $\boldsymbol{z = 4 \cdot e^{i \cdot 135°}} \rightarrow -z = \boldsymbol{4 \cdot e^{i \cdot 135° + 180°} = 4 \cdot e^{i \cdot 315°}}$
Bogenmass → $\boldsymbol{z = 4 \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{4}}} \rightarrow -z = \boldsymbol{4 \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{4} + \pi} = 4 \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{4} + \frac{4\pi}{4}} = 4 \cdot e^{i \cdot \frac{7\pi}{4}}}$

4) Wir wissen, dass die konjugiert Komplexe Zahl $\boldsymbol{\bar{z}}$ eine Achsenspiegelung von $\boldsymbol{z}$ an der Reellen Achse zur Folge hat. Somit muss durch die Achsenspiegelung an der Reellen Achse $\boldsymbol{90°}$ respektive $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$ dazugerechnet werden muss.

Gradmass → $\boldsymbol{z = 4 \cdot e^{i \cdot 135°} \rightarrow \bar{z} = 4 \cdot e^{i \cdot 135° + 90°} = 4 \cdot e^{i \cdot 225°}}$
Bogenmass → $\boldsymbol{z = 4 \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{4}} \rightarrow \bar{z} = 4 \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}} = 4 \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}} = 4 \cdot e^{i \cdot \frac{5\pi}{4}}}$

6.2 Eulersche Relation

Ich möchte nun die von uns am Anfang benutzte, aber nicht hergeleitete Polarform näher erläutern. Dafür stellen wir uns der Aufgabe, die Polarform und die Normalform ineinander umzurechnen. Demgemäss möchten wir von der Polarform $\boldsymbol{z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}}$ zur Normalform $\boldsymbol{z = x + y \cdot i}$ gelangen. Um dies bewerkstelligen zu können werden wir Trigonometrische Funktionen zur Hilfe nehmen. Dafür sehen wir uns die Polarform genauer an. Hierfür führen wir ein einfaches Beispiel auf, um die Umrechnung nachvollziehen zu können:

Da die Normalform $\boldsymbol{z = x + y \cdot i}$ eindeutig von der x-Komponente und der y-Komponente des reellen Zahlenpaars definiert ist, müssen wir diese beiden Komponenten ausrechnen. Um nun der Umrechnung einen Schritt näher zu kommen, sehen wir uns folgende Abbildung an:

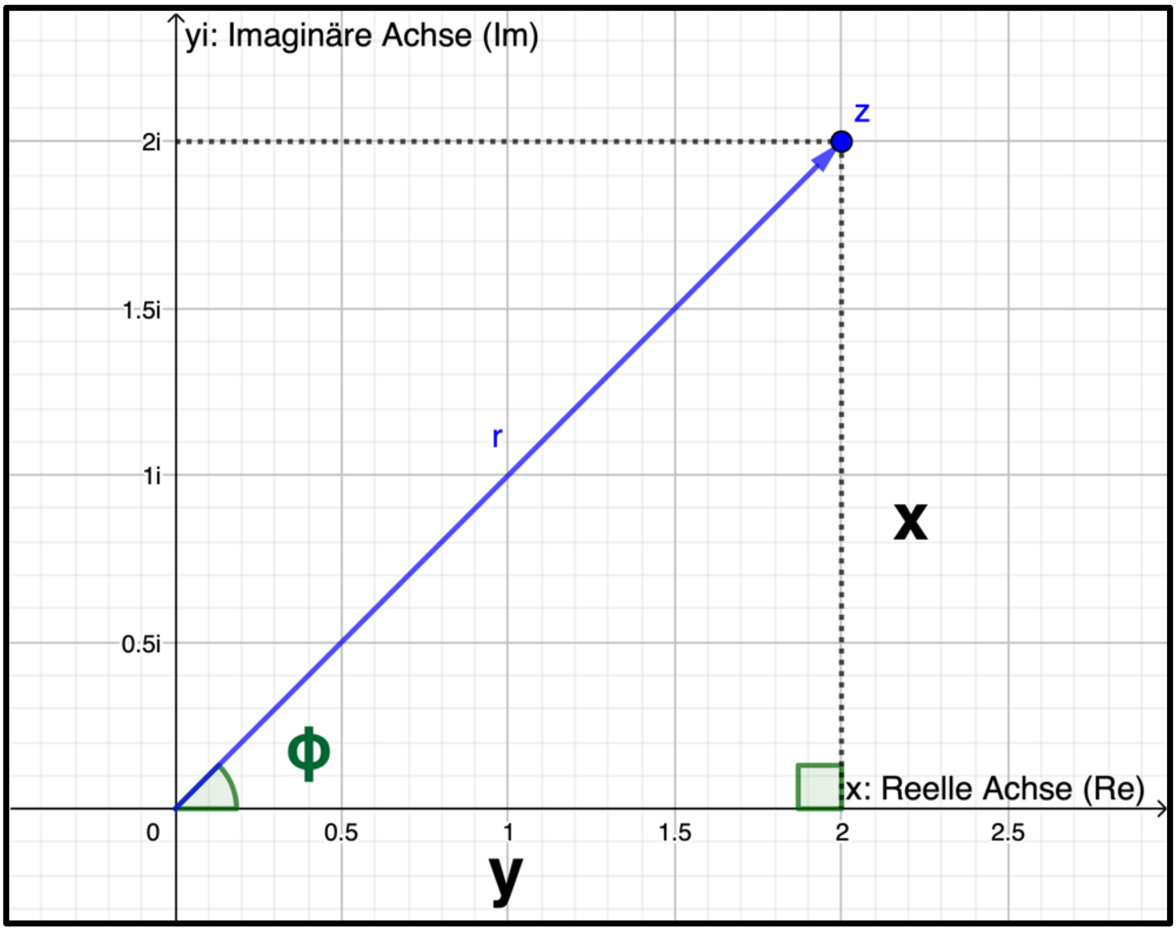


Abb. 32: Umrechnung Polar- in Normalform

Im Moment sehen wir uns lediglich die Umrechnung an und konzentrieren uns dabei nicht auf die in der Abbildung gegebenen Werte.

Mithilfe der Trigonometrischen Funktionen wissen wir Folgendes:

$$\boldsymbol{cos(\varphi) = \frac{x}{r} \rightarrow x = r \cdot \cos(\varphi)}$$

$$\boldsymbol{sin(\varphi) = \frac{y}{r} \rightarrow y = r \cdot sin(\varphi)}$$

Folglich:

Polarform: $\boldsymbol{z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}}$

Normalform: $\boldsymbol{z = x + y \cdot i = r \cdot cos(\varphi) + r \cdot sin(\varphi) \cdot i = r \cdot (cos(\varphi) + sin(\varphi) \cdot i)}$

Dabei wurde $\boldsymbol{e^{i \cdot \varphi}}$ mit $\boldsymbol{(cos(\varphi) + sin(\varphi) \cdot i)}$ ersetzt.

Infolgedessen bilden wir daraus die sogenannte Eulersche Formel respektive die Eulersche Relation:

$$\rightarrow \boldsymbol{e^{i \cdot \varphi} = (cos(\varphi) + sin(\varphi) \cdot i) = cis(\varphi)}$$

Nun möchte ich die Eulersche Relation auch mathematisch hinterfragen und beweisen:

Folgende Formeln gelten zur Potenzreihenentwicklung:

$$\boldsymbol{e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 + ..}$$

$$\boldsymbol{sin(x) = x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 + \frac{1}{7!} \cdot x^7 \pm ..}$$

$$\boldsymbol{cos(x) = 1 - \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 - \frac{1}{6!} \cdot x^6 \pm ..}$$

Nun ersetzen wir $\boldsymbol{x}$ durch $\boldsymbol{i \cdot \varphi}$. Dies sieht folgendermassen aus:

$$\boldsymbol{e^{i \cdot \varphi} = 1 + (i \cdot \varphi) + \frac{1}{2!} \cdot (i \cdot \varphi)^2 + \frac{1}{3!} \cdot (i \cdot \varphi)^3 + \frac{1}{4!} \cdot (i \cdot \varphi)^4 + \frac{1}{5!} \cdot (i \cdot \varphi)^5 + ..}$$

$$\boldsymbol{e^{i \cdot \varphi} = 1 + (i \cdot \varphi) + \frac{1}{2!} \cdot (i^2 \cdot \varphi^2) + \frac{1}{3!} \cdot i^2 \cdot i \cdot \varphi^3 + \frac{1}{4!} \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot \varphi^4 + \frac{1}{5!} \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i \cdot \varphi^5 + ..}$$

Es gilt: $\boldsymbol{i^2 = -1}$

$$e^{i\cdot\varphi} = 1 + (i\cdot\varphi) + \frac{1}{2!}\cdot(-1\cdot\varphi^2) + \frac{1}{3!}\cdot(-1)\cdot i\cdot\varphi^3 + \frac{1}{4!}\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot\varphi^4 + \frac{1}{5!}\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot i\cdot\varphi^5 + ..$$

$$e^{i\cdot\varphi} = 1 + (i\cdot\varphi) - \frac{1}{2!}\cdot\varphi^2 - \frac{1}{3!}\cdot i\cdot\varphi^3 + \frac{1}{4!}\cdot\varphi^4 + \frac{1}{5!}\cdot i\cdot\varphi^5 + ..$$

Demzufolge:

$$e^{i\cdot\varphi} = \left(1 - \frac{1}{2!}\cdot\varphi^2 + \frac{1}{4!}\cdot\varphi^4 \mp ..\right) + \left(\varphi - \frac{1}{3!}\cdot\varphi^3 + \frac{1}{5!}\cdot\varphi^5 \mp ..\right)\cdot i$$

$$e^{i\cdot\varphi} = cos(\varphi) + sin(\varphi)\cdot i = cis(\varphi)$$

Dadurch haben wir bewiesen, dass die Eulersche Relation mathematisch korrekt belegbar ist.

Nun möchten wir das uns bekannte Wissen anhand einer Aufgabe zusammen repetieren:

Gradmass → $z = 4\cdot e^{i\cdot 135°}$
Bogenmass → $z = 4\cdot e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}}$

→ $r = 4$

Gradmass → $arg(z) = 135°$
Bogenmass → $arg(z) = \frac{3\pi}{4}$

Gradmass → $z = 4\cdot(cos(135°) + sin(135°)\cdot i) = z = x + y\cdot i$
Bogenmass → $z = 4\cdot(cos(\frac{3\pi}{4}) + sin(\frac{3\pi}{4})\cdot i) = z = x + y\cdot i$

Folgende Frage taucht auf: Wie komme ich zurück? Wie mache ich die Umrechnung von der Normalform zur Polarform?

Um dies nachvollziehen zu können, sehen wir uns folgendes Beispiel an:

→ $z = \sqrt{3} + 1\cdot i$

→ $Re(z) = \sqrt{3}; Im(z) = 1$

→ $r = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

In einem nächsten Schritt müssen wir uns überlegen, wie wir den Winkel $\boldsymbol{\varphi}$ ausrechnen können. Hierfür benutzen wir folgende Überlegung:

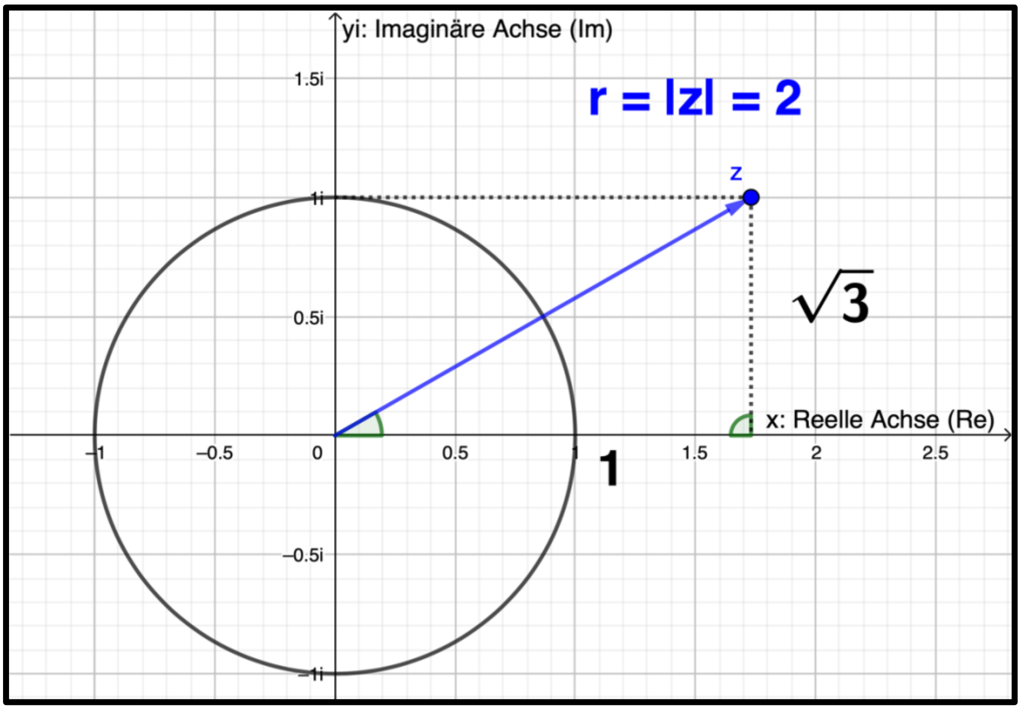


Abb. 33: Umrechnung Normal- in Polarform

Um nun den Winkel $\boldsymbol{\varphi}$ ausfindig machen zu können, benutzen wir hierfür wieder Trigonometrische Funktionen. Dies sieht wie folgendermassen aus:

Gradmass → $\boldsymbol{tan(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \varphi = arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 30°}$

Bogenmass → $\boldsymbol{tan(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \varphi = arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}}$

Folglich lautet die Polarform wie Folgt:

$\boldsymbol{r = 2}$

Gradmass → $\boldsymbol{\varphi = 30°}$

Bogenmass → $\boldsymbol{\varphi = \frac{\pi}{6}}$

Gradmass → $\boldsymbol{z = 2 \cdot e^{i \cdot 30°}}$

Bogenmass → $\boldsymbol{z = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}}}$

Im Folgenden sehen wir uns einen Fall an, welcher komplizierter zu bewältigen ist:

$\rightarrow \boldsymbol{z = -\sqrt{3} - 1 \cdot i}$

$\rightarrow \boldsymbol{Re(z) = -\sqrt{3}; Im(z) = 1}$

$\rightarrow \boldsymbol{r = |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2}$

Gradmass $\rightarrow \boldsymbol{tan(\varphi) = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \varphi = arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 30°}$

Bogenmass $\rightarrow$ $\boldsymbol{tan(\varphi) = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \varphi = arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}}$

Wenn wir uns das visuell dargestellt ansehen, bemerken wir, dass wir einen Fehler begangen haben:

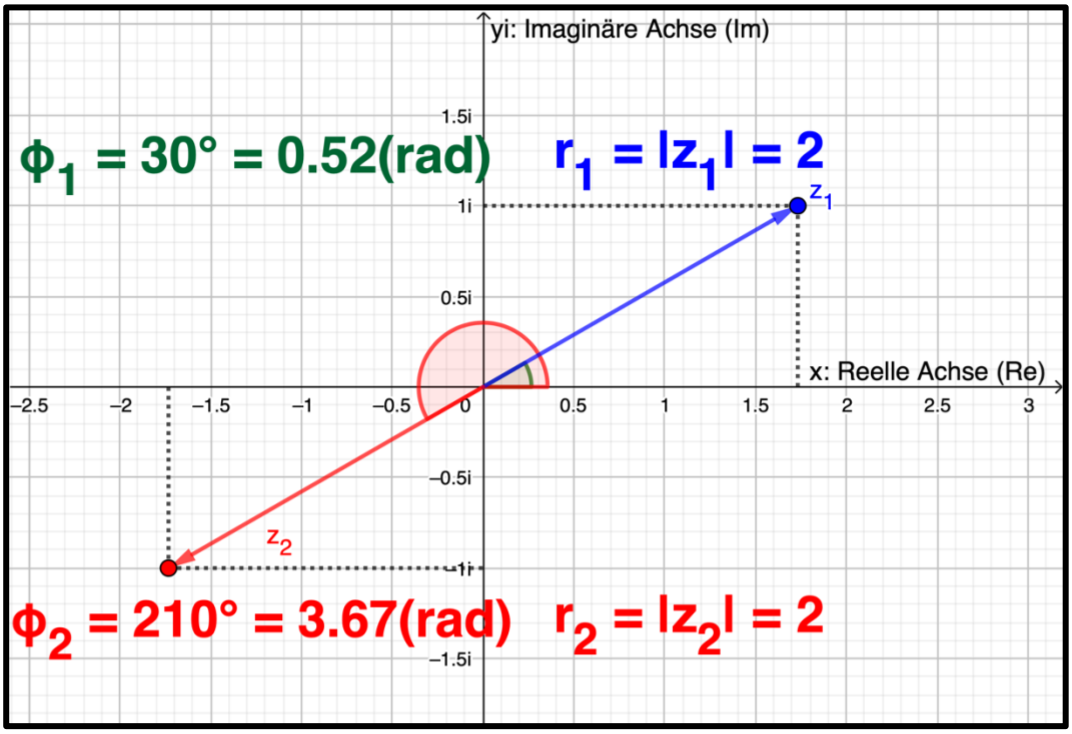


Abb. 34: Umrechnung Normal- in Polarform

Wie wir hier sehen, haben wir einerseits das vorher behandelte Beispiel $\boldsymbol{z_1 = \sqrt{3} + 1 \cdot i}$ und das komplizierte Beispiel $\boldsymbol{z_2 = -\sqrt{3} - 1 \cdot i}$.

Wir haben gesagt, dass der Winkel $\boldsymbol{\varphi_2}$ die folgenden Werte besitzt:

Gradmass $\rightarrow \boldsymbol{tan(\varphi) = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \varphi = arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 30°}$

Bogenmass $\rightarrow \boldsymbol{tan(\varphi) = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \varphi = arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}}$

Das Gradmass $\boldsymbol{\varphi_2}$ auf der visuellen Abbildung angesehen, wird schnell bemerkt, dass dies nicht korrekt ist. $\boldsymbol{z_2}$ entspricht hierbei der entgegengesetzten Komplexen Zahl $\boldsymbol{-z}$ von $\boldsymbol{z_1}$. Wie wir bereits gesehen haben, entspricht die entgegengesetzte Komplexe Zahl einer Achsenspiegelung der ursprünglichen Komplexen Zahl. In der Polarform heisst das für uns, einen Zuwachs von im Gradmass $\boldsymbol{180°}$ respektive im Bogenmass $\boldsymbol{\pi}$.

Das bedeutet Folgendes:

Gradmass $\rightarrow \boldsymbol{tan(\varphi_2) = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \varphi_2 = arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 30°}$

$\rightarrow \boldsymbol{30° + 180° = 210° = \varphi_2}$

Bogenmass $\rightarrow \boldsymbol{tan(\varphi_2) = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \varphi_2 = arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}}$

$$\rightarrow \boldsymbol{\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{\pi}{6} + \frac{6\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} = \varphi_2}$$

Gradmass $\rightarrow \boldsymbol{z_2 = 2 \cdot e^{i \cdot 210°}}$

Bogenmass $\rightarrow \boldsymbol{z_2 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{7\pi}{6}}}$

Dementsprechend wird es nötig, die Quadrantenbetrachtung nach Bestimmung des Winkels mit $\boldsymbol{arctan}$ respektive $\boldsymbol{tan^{-1}}$ durchzuführen. Die Quadranten werden folgendermassen dargestellt:

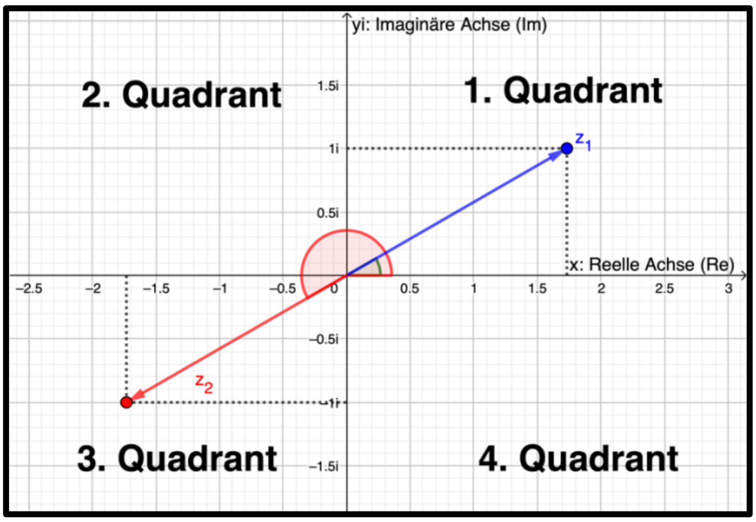


Abb. 35: Umrechnung Normal- in Polarform

Anhand dessen kann festgestellt werden, ob zum ursprünglich berechneten Winkel $\boldsymbol{\varphi}$ $\mathbf{180°}$ respektive $\boldsymbol{\pi}$ dazugerechnet werden muss, oder ob er bestehen bleiben kann.

Um dies zu verstehen, führen wir gemeinsam eine Aufgabe durch:

Normalform: $\boldsymbol{z = -5 + 3 \cdot i}$

Polarform: $\boldsymbol{z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}} = ?$

$\rightarrow \boldsymbol{Re(z) = -5; Im(z) = 3}$

$\rightarrow \boldsymbol{r = |z| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}}$

Gradmass $\rightarrow \boldsymbol{tan(\varphi) = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5} \rightarrow \varphi = arctan(-\frac{3}{5}) = \tan^{-1}(\frac{-3}{5}) = -\,30.9638°}$

Bogenmass $\rightarrow$ $\boldsymbol{tan(\varphi) = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5} \rightarrow \varphi = arctan(-\frac{3}{5}) = \tan^{-1}(-\frac{3}{5}) = -\,0.54042}$

Aufgrund von $\boldsymbol{tan(\varphi)} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$ entsteht ein Quadrantenwechsel, sodass:

Gradmass $\rightarrow$ $\boldsymbol{\varphi = -30.9639° + 180° = 149.036°}$

Bogenmass $\rightarrow$ $\boldsymbol{\varphi = -0.54042 + \pi = 2.6012}$

Demzufolge:

Gradmass $\rightarrow \boldsymbol{z = 2 \cdot e^{i \cdot 149.036°}}$

Bogenmass $\rightarrow$ $\boldsymbol{z = 2 \cdot e^{i \cdot 2.6012}}$

Zum Schluss noch ein von mir erstelltes interaktiv und visuell benutzbares Element, welches für eine Repetition für die von uns behandelten Themen dient.

Inhalt: Polarform
Link: https://www.geogebra.org/m/eybfyxcd

Abb. 36: QR-Code 13

6.3 Operationen

In der kartesischen Normalform haben wir gesehen, dass der Addition und Subtraktion zweier Komplexen Zahlen eine geometrische Interpretation zugeordnet werden kann. Dies funktioniert dadurch, dass wir die Addition zweier Komplexen Zahlen geometrisch als Vektoraddition und die Subtraktion zweier Komplexen Zahlen geometrisch als Vektorsubtraktion interpretiert haben.

Mithilfe der Polarform lässt sich nun auch die Multiplikation beziehungsweise die Division geometrisch deuten.

6.3.1 Multiplikation

Hierfür sehen wir uns folgendes Beispiel an:

Komplexe Zahl 1:

Gradmass → $\boldsymbol{z_1 = 3 \cdot e^{i \cdot 60^\circ} = 3 \cdot (cos(60^\circ) + sin(60^\circ) i) = 3 \cdot cis(60^\circ)}$

Bogenmass → $\boldsymbol{z_1 = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}} = 3 \cdot (cos(\frac{\pi}{3}) + sin(\frac{\pi}{3}) i) = 3 \cdot cis(\frac{\pi}{3})}$

→ $\boldsymbol{r_1 = 3}$

→ Gradmass → $\boldsymbol{arg(z_1) = 60^\circ}$

→ Bogenmass → $\boldsymbol{arg(z_1) = \frac{\pi}{3}}$

Komplexe Zahl 2:

Gradmass → $\boldsymbol{z_2 = 2 \cdot e^{i \cdot 30^\circ} = 2 \cdot (cos(30^\circ) + sin(30^\circ) i) = 2 \cdot cis(30^\circ)}$

Bogenmassmass → $\boldsymbol{z_2 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}} = 2 \cdot (cos(\frac{\pi}{6}) + sin(\frac{\pi}{6}) i) = 2 \cdot cis(\frac{\pi}{6})}$

→ $\boldsymbol{r_2 = 2}$

→ Gradmass → $\boldsymbol{arg(z_2) = 30^\circ}$

→ Bogenmass → $\boldsymbol{arg(z_2) = \frac{\pi}{6}}$

Dementsprechend gilt Folgendes:

$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = z_3}$

Gradmass → $\boldsymbol{z_3 = 6 \cdot e^{i \cdot 90°} = 6 \cdot (cos(90°) + sin(90°)i) = 6 \cdot cis(90°)}$

Bogenmass → $\boldsymbol{z_3 = 6 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} = 6 \cdot (cos(\frac{\pi}{2}) + sin(\frac{\pi}{2})i) = 6 \cdot cis(\frac{\pi}{2})}$

Folgende Formel für die Multiplikation zweier Komplexen Zahlen in der Polarform entsteht:

$\boldsymbol{z_1 = r_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1} = r_1 \cdot (cos(\varphi_1) + sin(\varphi_1)i) = r_1 \cdot cis(\varphi_1) \rightarrow arg(z_1) = \varphi_1}$

$\boldsymbol{z_2 = r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2} = r_2 \cdot (cos(\varphi_2) + sin(\varphi_2)i) = r_2 \cdot cis(\varphi_2) \rightarrow arg(z_2) = \varphi_2}$

$\boldsymbol{\rightarrow z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)} = r_1 \cdot r_2 \cdot (cos(\varphi_1 + \varphi_2) + sin(\varphi_1 + \varphi_2)i}$

$\boldsymbol{= r_1 \cdot r_2 \cdot cis(\varphi_1 + \varphi_2) = z_3}$

Man multipliziere die Beträge beider Komplexen Zahlen und addiere ihre Argumente!

Hierfür sehen wir uns ein weiteres Beispiel an:

Komplexe Zahl 1:

Gradmass → $\boldsymbol{z_1 = 3 \cdot e^{i \cdot 45°} = 3 \cdot (cos(45°) + sin(45°)i) = 3 \cdot cis(45°)}$

Bogenmass → $\boldsymbol{z_1 = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}} = 3 \cdot (cos(\frac{\pi}{4}) + sin(\frac{\pi}{4})i) = 3 \cdot cis(\frac{\pi}{4})}$

→ $\boldsymbol{r_1 = 3}$

→ Gradmass → $\boldsymbol{arg(z_1) = 45°}$

→ Bogenmass → $\boldsymbol{arg(z_1) = \frac{\pi}{4}}$

Komplexe Zahl 2:

Gradmass → $\boldsymbol{z_2 = 5 \cdot e^{i \cdot 60°} = 5 \cdot (cos(60°) + sin(60°)i) = 5 \cdot cis(60°)}$

Bogenmass → $\boldsymbol{z_2 = 5 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}} = 5 \cdot (cos(\frac{\pi}{3}) + sin(\frac{\pi}{3})i) = 5 \cdot cis(\frac{\pi}{3})}$

→ $\boldsymbol{r_2 = 5}$

→ Gradmass → $\boldsymbol{arg(z_2) = 60°}$

→ Bogenmass → $\boldsymbol{arg(z_2) = \frac{\pi}{3}}$

$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = z_3}$

Gradmass → $\boldsymbol{z_3 = 15 \cdot e^{i \cdot 105°} = 15 \cdot (cos(105°) + sin(105°)i) = 15 \cdot cis(105°)}$

Bogenmass → $\boldsymbol{z_3 = 15 \cdot e^{i \cdot \frac{7\pi}{12}} = 15 \cdot (cos(\frac{7\pi}{12}) + sin(\frac{7\pi}{12})i) = 15 \cdot cis(\frac{7\pi}{12})}$

Wir haben gesehen, dass wir Komplexe Zahlen auf verschiedenste Arten multiplizieren können. Nun stellt sich noch die Frage, wie wir nun das geometrisch interpretieren sollen.

Hierbei wird folgendes Beispiel benutzt:

Komplexe Zahl 1:

Gradmass → $\boldsymbol{z_1 = 3 \cdot e^{i \cdot 60°} = 3 \cdot (cos(60°) + sin(60°)i) = 3 \cdot cis(60°)}$

Bogenmass → $\boldsymbol{z_1 = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}} = 3 \cdot (cos(\frac{\pi}{3}) + sin(\frac{\pi}{3})i) = 3 \cdot cis(\frac{\pi}{3})}$

Komplexe Zahl 2:

Gradmass → $\boldsymbol{z_2 = 2 \cdot e^{i \cdot 30°} = 2 \cdot (cos(30°) + sin(30°)i) = 2 \cdot cis(30°)}$

Bogenmassmass → $\boldsymbol{z_2 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}} = 2 \cdot (cos(\frac{\pi}{6}) + sin(\frac{\pi}{6})i) = 2 \cdot cis(\frac{\pi}{6})}$

Produkt aus der Komplexen Zahl 1 und 2:

Gradmass → $\boldsymbol{z_3 = 6 \cdot e^{i \cdot 90°} = 6 \cdot (cos(90°) + sin(90°)i) = 6 \cdot cis(90°)}$

Bogenmass → $\boldsymbol{z_3 = 6 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} = 6 \cdot (cos(\frac{\pi}{2}) + sin(\frac{\pi}{2})i) = 6 \cdot cis(\frac{\pi}{2})}$

Folgende Abbildung beantwortet die von uns gestellte Frage:

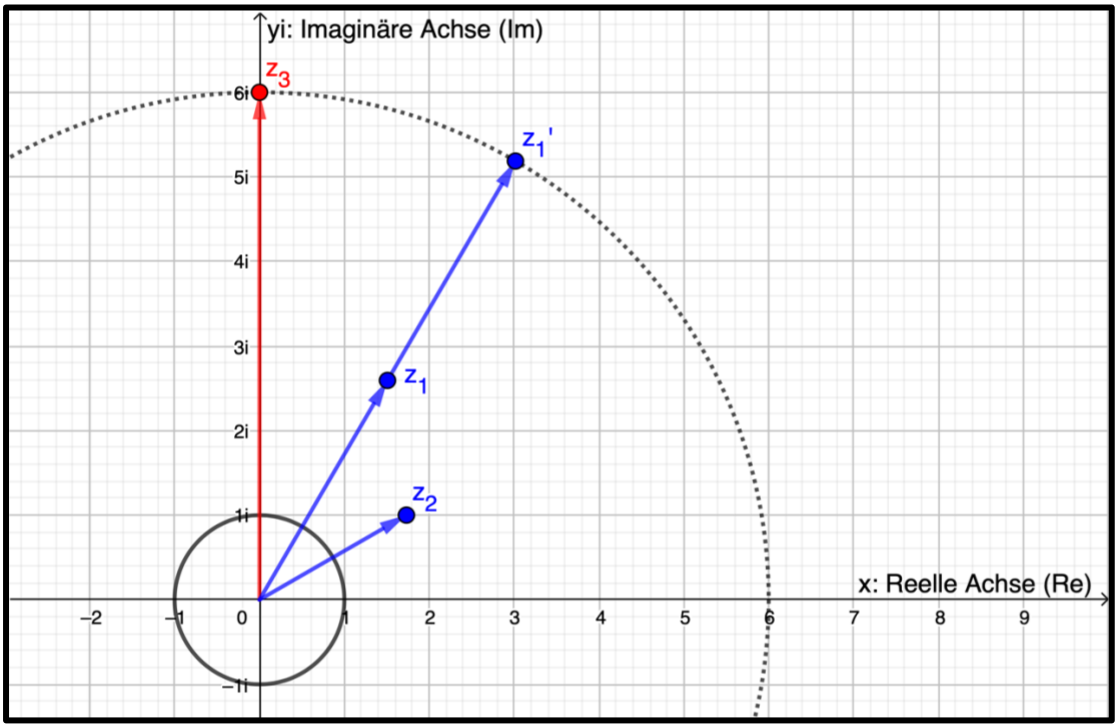


Abb. 37: Geometrische Interpretation der Multiplikation in Polarform

Somit können wir die Multiplikation folgendermassen interpretieren:

Dies funktioniert in zwei Schritten:

1) Streckung des Vektors $\overrightarrow{\boldsymbol{Oz_1}}$ mit dem Faktor $\boldsymbol{r_2}$. Daraus folgt der Vektor $\overrightarrow{\boldsymbol{Oz_{1'}}}$.

2) Drehung des Vektors $\overrightarrow{\boldsymbol{Oz_{1'}}}$ um den Winkel $\boldsymbol{\varphi_2}$ $(\boldsymbol{arg}(\boldsymbol{z_2}))$, sodass der Vektor $\overrightarrow{\boldsymbol{Oz_3}}$ entsteht.

In diesem Kontext habe ich ein interaktives und visuelles Element erstellt.

Inhalt: Multiplikation in der Polarform
Link: https://www.geogebra.org/m/ggayrftp

Abb. 38: QR-Code 14

Ein von mir akustisch und visuell erstelltes Video repetiert das Gelernte.

Inhalt: Kurzvideo zur Multiplikation in der Polarform
Link: https://www.geogebra.org/m/adbz8mrr

Abb. 39: QR-Code 15

6.3.2 Division

Hierfür sehen wir uns folgendes Beispiel an:

Komplexe Zahl 1:

Gradmass → $\boldsymbol{z_1 = 3 \cdot e^{i \cdot 60°} = 3 \cdot (cos(60°) + sin(60°)i) = 3 \cdot cis(60°)}$

Bogenmass → $\boldsymbol{z_1 = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}} = 3 \cdot (cos(\frac{\pi}{3}) + sin(\frac{\pi}{3})i) = 3 \cdot cis(\frac{\pi}{3})}$

→ $\boldsymbol{r_1 = 3}$

→ Gradmass → $\boldsymbol{arg(z_1) = 60°}$

→ Bogenmass → $\boldsymbol{arg(z_1) = \frac{\pi}{3}}$

Komplexe Zahl 2:

Gradmass → $\boldsymbol{z_2 = 2 \cdot e^{i \cdot 30°} = 2 \cdot (cos(30°) + sin(30°)i) = 2 \cdot cis(30°)}$

Bogenmassmass → $\boldsymbol{z_2 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}} = 2 \cdot (cos(\frac{\pi}{6}) + sin(\frac{\pi}{6})i) = 2 \cdot cis(\frac{\pi}{6})}$

→ $\boldsymbol{r_2 = 2}$

→ Gradmass → $\boldsymbol{arg(z_2) = 30°}$

→ Bogenmass → $\boldsymbol{arg(z_2) = \frac{\pi}{6}}$

Dadurch gilt Folgendes:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_3$$

Gradmass → $z_3 = 1.5 \cdot e^{i \cdot 30°} = 1.5 \cdot (cos(30°) + sin(30°)i) = 1.5 \cdot cis(30°)$

Bogenmass → $z_3 = 1.5 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}} = 1.5 \cdot (cos(\frac{\pi}{6}) + sin(\frac{\pi}{6})i) = 1.5 \cdot cis(\frac{\pi}{6})$

Demnach entsteht folgende Formel für die Multiplikation zweier Komplexen Zahlen in der Polarform:

$$z_1 = r_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1} = r_1 \cdot (cos(\varphi_1) + sin(\varphi_1)i) = r_1 \cdot cis(\varphi_1) \rightarrow arg(z_1) = \varphi_1$$

$$z_2 = r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2} = r_2 \cdot (cos(\varphi_2) + sin(\varphi_2)i) = r_2 \cdot cis(\varphi_2) \rightarrow arg(z_2) = \varphi_2$$

$$\rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (cos(\varphi_1 - \varphi_2) + sin(\varphi_1 - \varphi_2)i$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot cis(\varphi_1 - \varphi_2) = z_3$$

Man dividiere die Beträge beider Komplexen Zahlen und subtrahiere ihre Argumente!

Wir haben gesehen, dass wir Komplexe Zahlen auf verschiedenste Arten divideren können. Nun stellt sich noch die Frage, wie wir nun das geometrisch interpretieren sollen.

Hierbei wird folgendes Beispiel benutzt:

Komplexe Zahl 1:

Gradmass → $z_1 = 3 \cdot e^{i \cdot 90°} = 3 \cdot (cos(90°) + sin(90°)i) = 3 \cdot cis(90°)$

Bogenmass → $z_1 = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} = 3 \cdot (cos(\frac{\pi}{2}) + sin(\frac{\pi}{2})i) = 3 \cdot cis(\frac{\pi}{2})$

Komplexe Zahl 2:

Gradmass → $z_2 = 2 \cdot e^{i \cdot 30°} = 2 \cdot (cos(30°) + sin(30°)i) = 2 \cdot cis(30°)$

Bogenmassmass → $z_2 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}} = 2 \cdot (cos(\frac{\pi}{6}) + sin(\frac{\pi}{6})i) = 2 \cdot cis(\frac{\pi}{6})$

Quotient aus der Komplexen Zahlen 1 und 2:

Gradmass → $\boldsymbol{z_3 = 1.5 \cdot e^{i \cdot 60°} = 1.5 \cdot (cos(60°) + sin(60°)i) = 1.5 \cdot cis(60°)}$

Bogenmass → $\boldsymbol{z_3 = 1.5 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}} = 1.5 \cdot (cos(\frac{\pi}{3}) + sin(\frac{\pi}{3})i) = 1.5 \cdot cis(\frac{\pi}{3})}$

Folgende Abbildung beantwortet die von uns gestellte Frage:

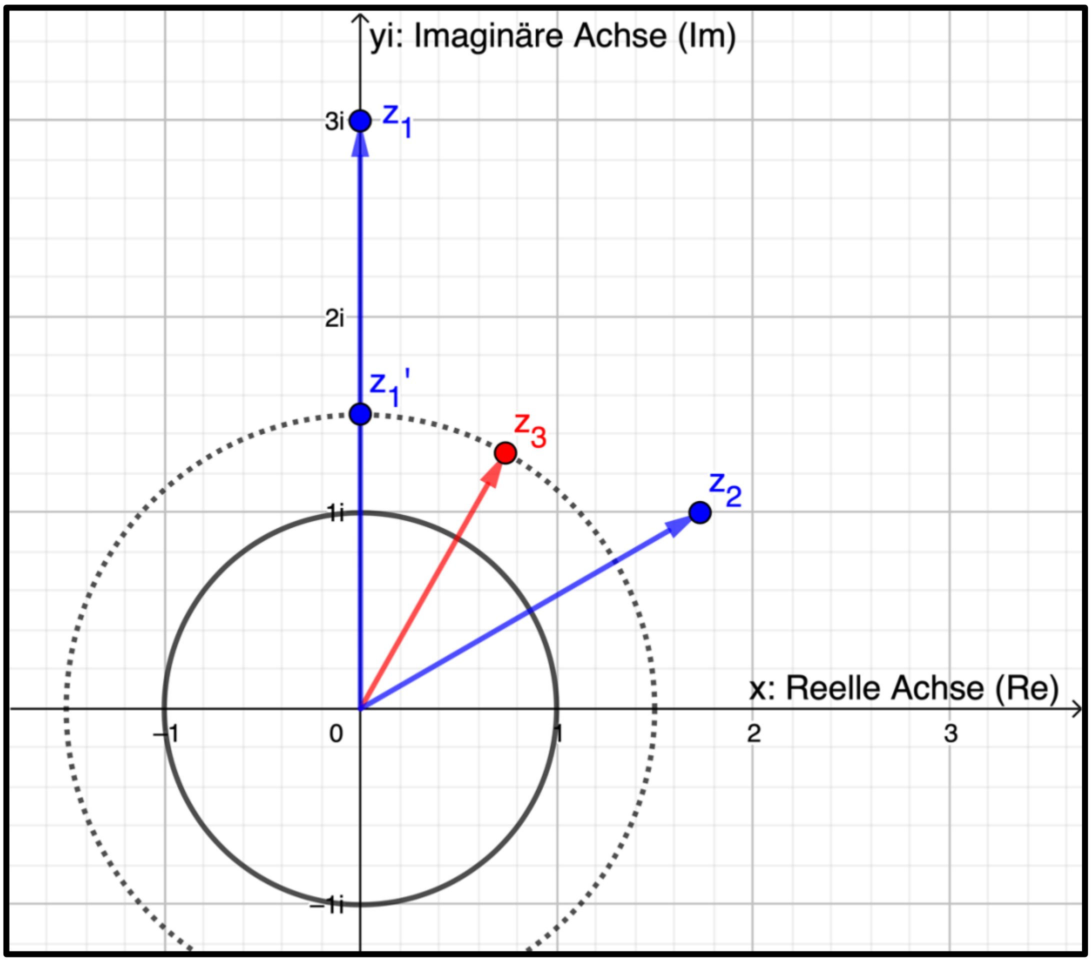


Abb. 40: Geometrische Interpretation der Multiplikation in Polarform

Folglich können wir die Multiplikation folgendermassen interpretieren:

Dies funktioniert in zwei Schritten:

1) Kürzung des Vektors $\overrightarrow{\boldsymbol{Oz_1}}$ mit dem Divisor $\boldsymbol{r_2}$. Daraus folgt der Vektor $\overrightarrow{\boldsymbol{Oz_{1'}}}$.

2) Drehung des Vektors $\overrightarrow{\boldsymbol{Oz_{1'}}}$ um den Winkel $\boldsymbol{-\varphi_2}$ $(\boldsymbol{-arg(z_2)})$, sodass der Vektor $\overrightarrow{\boldsymbol{Oz_3}}$ entsteht.

Hierfür habe ich ein interaktiv und visuell nutzbares Element erstellt.

Inhalt: Division in der Polarform
Link: https://www.geogebra.org/m/juqtntvw

Abb. 41: QR-Code 16

Ein von mir akustisch und visuell erstelltes Video soll zur Repetition des Gelernten dienen.

Inhalt: Kurzvideo zur Division in der Polarform
Link: https://www.geogebra.org/m/uvsj5zgy

Abb. 42: QR-Code 17

Wie an jedem Ende des Kapitels, ist es an der Zeit, den Kurztest zum jeweiligen Kapitel durchzuführen.

Inhalt: Kurztest Kapitel 6
Link: https://www.geogebra.org/m/zcxk95hs

Abb. 43: QR-Code 18

7. Formelsammlung: Komplexe Zahlen

- **Imaginäre Einheit:** $i^2 = -1$
- **Gauss'sche Zahlenebene:** xy-Ebene der Komplexen Zahlen
- **Eulersche Relation:** $e^{i\varphi} = cos(\varphi) + sin(\varphi)i = cis(\varphi)$

Kartesische Koordinaten

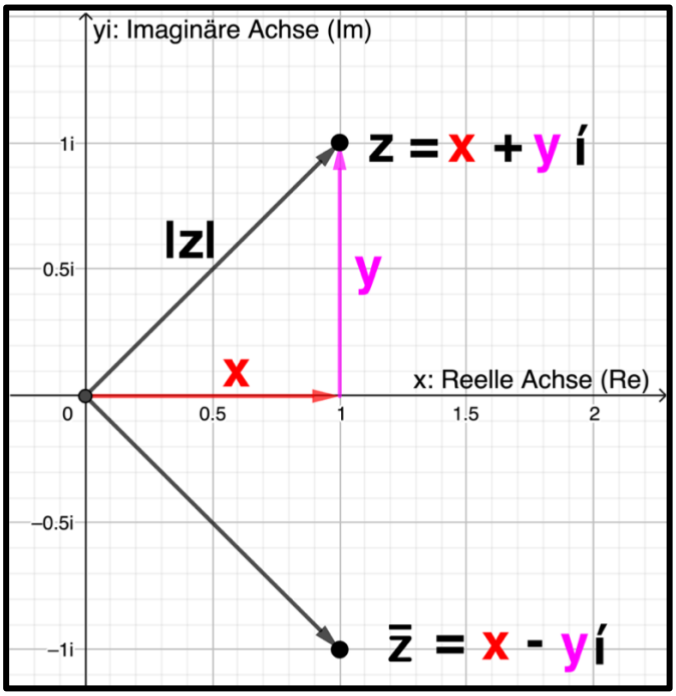


Abb. 44: Übersicht Kartesische Koordinaten

Komplexe Zahl	z	$z = x + yi \begin{cases} x: \textit{Realteil} \\ y: \textit{Imaginärteil} \end{cases}$
Konjugiert Komplexe Zahl	$\bar{z}$	$\bar{z} = x - yi$
Betrag	$\|z\|$	$\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
Winkel	φ	$x = r \cdot cos(\varphi)$ $y = r \cdot sin(\varphi)$
Addition	$z_1 + z_2$	$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$
Subtraktion	$z_1 - z_2$	$(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$
Multiplikation	$z_1 \cdot z_2$	$(x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)i$
Division	$\frac{z_1}{z_2}$	$\frac{(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2) + (x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2)i}{{x_2}^2 + {y_2}^2}$

Polarkoordinaten

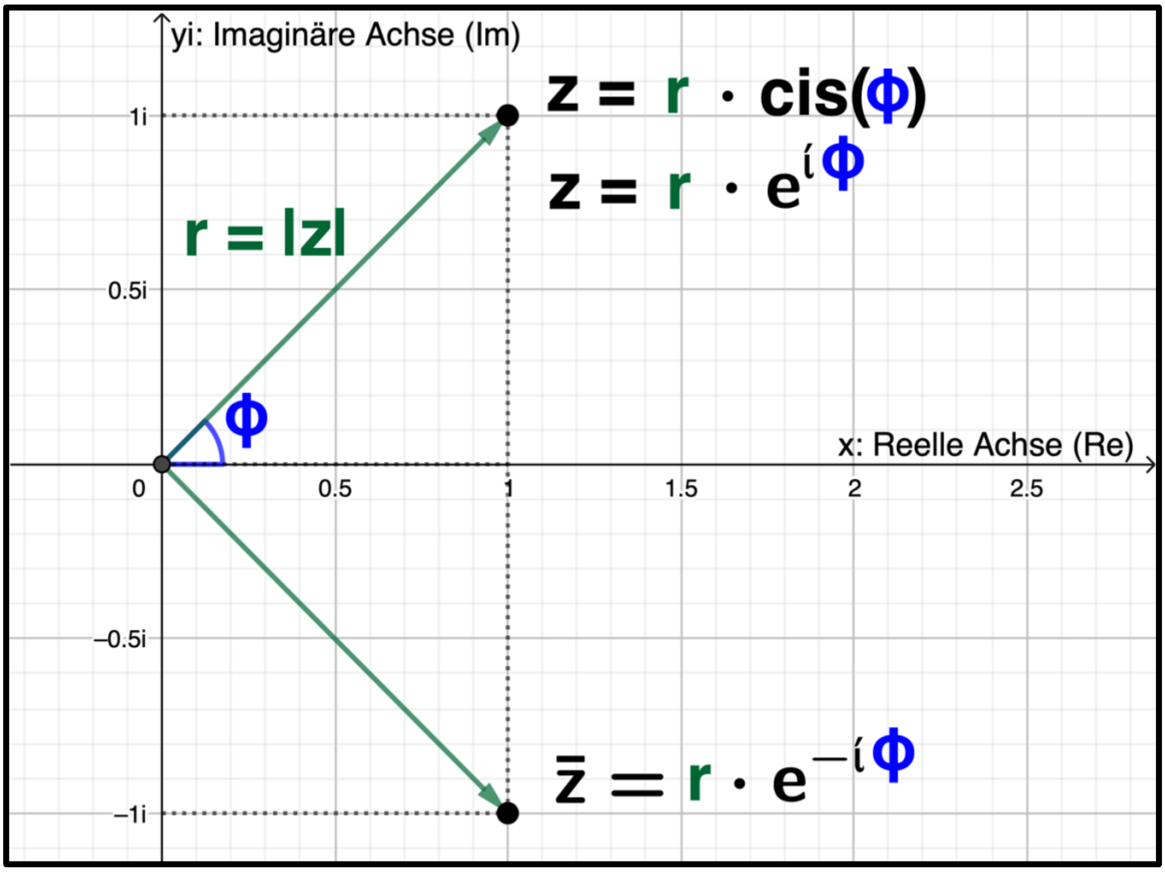


Abb. 45: Übersicht Polarkoordinaten

Komplexe Zahl	z	$z = r \cdot cis(\varphi) = r \cdot e^{i\varphi}$
Konjugiert Komplexe Zahl	$\bar{z}$	$\bar{z} = r \cdot e^{-i\varphi}$
Betrag	$\lvert z \rvert$	$\lvert z \rvert = r = \sqrt{x^2 + y^2}$
Winkel	φ	$tan(\varphi) = \frac{y}{x}$ $\varphi = arg(z)$
Addition	$z_1 + z_2$	
Subtraktion	$z_1 - z_2$	
Multiplikation	$z_1 \cdot z_2$	$r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
Division	$\frac{z_1}{z_2}$	$\frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

8. Quellen- und Abbildungsverzeichnis

8.1 Quellenverzeichnis

Internet

Diehl, Christina & Leupp, Marcel: Komplexe Zahlen, in: ETH Zürich, https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/dual/educethdam/documents/Unterrichtsmaterialien/mathematik/Komplexe%20Zahlen%20(Leitprogramm)/Leitprogramm.pdf (29.08.2020)

Wetzel, Adrian: Formelsammlung in Mathematik, in: Formelsammlung, https://www.formelsammlung.ch/pdf/FOSA_Muster_M_D.pdf (30.08.2020)

Zusatz

Skript Komplexe Zahlen (Version 2020) von Hansruedi Aeschbach und Theo Zahno-Kressig

8.2 Abbildungsverzeichnis

Hinweis: Alle im Skript benutzten Abbildungen sind von mir persönlich erstellt.

Titelbild: Komplexe Zahlen 1
Abb. 1: QR-Code 01 5
Abb. 2: QR-Code 02 6
Abb. 3: Trigonometrische Funktionen 8
Abb. 4: Einheitskreis 9
Abb. 5: QR-Code 03 20
Abb. 6: QR-Code 04 29
Abb. 7: Reeller Zahlenstrahl 31
Abb. 8: Gauss'sche Zahlenebene 32
Abb. 9: Gauss'sche Zahlenebene 33
Abb. 10: QR-Code 05 34
Abb. 11: Gauss'sche Zahlenebene 34
Abb. 12: Gauss'sche Zahlenebene 35
Abb. 13: Gauss'sche Zahlenebene 36
Abb. 14: Gauss'sche Zahlenebene 36
Abb. 15: Vektoraddition 38
Abb. 16: Geometrische Addition zweier Komplexen Zahlen 39
Abb. 17: QR-Code 06 39
Abb. 18: QR-Code 07 40
Abb. 19: Vektorsubtraktion 41
Abb. 20: Subtraktion zweier Komplexen Zahlen 41
Abb. 21: QR-Code 08 42

Abb. 22: QR-Code 09 42
Abb. 23: Addition zweier Komplexen Zahlen innerhalb der Subtraktion 43
Abb. 24: Multiplikation zweier Komplexen Zahlen (kartesisch) 45
Abb. 25: QR-Code 10 45
Abb. 26: Division zweier Komplexen Zahlen (kartesisch) 46
Abb. 27: QR-Code 11 47
Abb. 28: QR-Code 12 47
Abb. 29: Polarform 48
Abb. 30: Polarform 51
Abb. 31: Polarform 52
Abb. 32: Umrechnung Polar- in Normalform 53
Abb. 33: Umrechnung Normal- in Polarform 56
Abb. 34: Umrechnung Normal- in Polarform 57
Abb. 35: Umrechnung Normal- in Polarform 58
Abb. 36: QR-Code 13 59
Abb. 37: Geometrische Interpretation der Multiplikation in Polarform 63
Abb. 38: QR-Code 14 63
Abb. 39: QR-Code 15 64
Abb. 40: Geometrische Interpretation der Multiplikation in Polarform 66
Abb. 41: QR-Code 16 67
Abb. 42: QR-Code 17 67
Abb. 43: QR-Code 18 67
Abb. 44: Übersicht Kartesische Koordinaten 68
Abb. 45: Übersicht Polarkoordinaten 69