Kuželovy sečky

2. Kružnice

Žán Pól Kastról

2. dubna 2022

1 Středová rovnice kružnice (SRK)

(a) Eskymák

(b) Rýsovač

Obr. 1

Každej blbec asi zná množinovou definici kružnice, kterou v praxi používají eskymáci při vytyčování základů iglů (obr. 1a) nebo rýsovači při práci s kružítkem (obr. 1b):

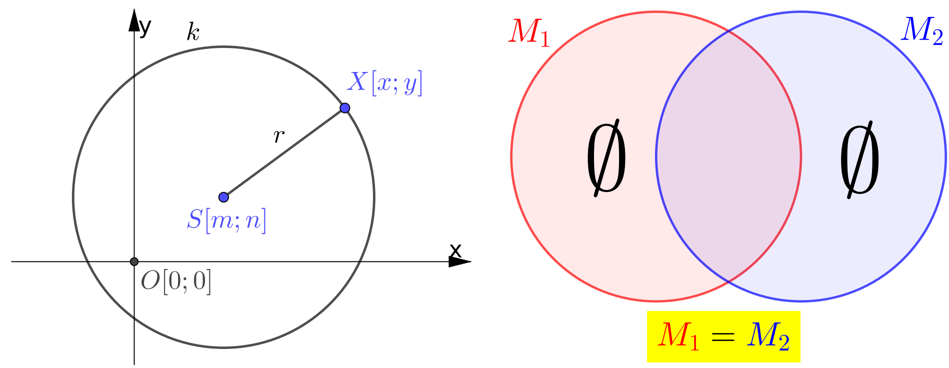
Definice 1: Množinová definice kružnice

Kružnice je množina všech bodů X roviny, které mají od daného bodu S (**středu kružnice**) danou vzdálenost $r > 0$ (**poloměr kružnice**).
Zapsáno symbolicky:

$$\boxed{k = \left\{ X \,\middle|\, |XS| = r \right\}} \tag{1}$$

Poznámka. Nebudeme uvažovat možnost $r = 0$, tedy bodovou kružnici, která splývá se svým středem.

V analytické geometrii pracujeme se souřadnou soustavou a zápis (1) snadno převedeme do jazyka souřadnic (obr. 2a). Vezměme **libovolný**



(a) (b)

Obr. 2

bod $X[x; y]$ kružnice k, jejíž střed je $S[m; n]$. Dle definice platí

$$|XS| = r \tag{a}$$

Dle vzorce pro velikost úsečky platí proto

$$\sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2} = r \tag{b}$$

Rovnici umocníme na druhou:

$$\boxed{(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2} \tag{c}$$

Vytvořili jsme tedy řetězec implikací

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \tag{d}$$

Dokázali jsme, že **pokud** vezmeme libovolný bod $X[x;y]$ naší kružnice $k(S[m;n],r)$, **potom** pro jeho souřadnice x, y nutně platí rovnice (c):

$$\boxed{X \in k \Rightarrow (x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2} \tag{e}$$

Vzniká otázka, zda platí také **implikace obrácená**. Nebo-li naopak – nemůže se stát, že nějaký bod roviny splňuje rovnici (c), ale neleží na kružnici k? Jinak řečeno, můžeme v řetězci (c) obrátit směr šipek?

Nejprve si uvědomíme, že platí $c \Rightarrow b$. Když totiž rovnici (c) odmocníme (to můžeme udělat, pač obě strany jistě nejsou záporné), dostaneme

$$\sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2} = \sqrt{r^2}$$
$$\Downarrow$$
$$\sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2} = |r|$$
$$\Downarrow$$
$$\sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2} = r$$

Protože r je kladné, mohli jsme dosadit $|r| = r$. Takže jsme ukázali, že platí $(c) \Rightarrow (b)$.

Levá strana (b) je dle vzorce pro velikost úsečky rovna $|XS|$. Platí tedy $(b) \Rightarrow (a)$. Ukázali jsme, že platí také obrácený řetězec implikací

$$(c) \Rightarrow (b) \Rightarrow (a) \tag{f}$$

Neboli **pokud** vezmeme libovolný bod $X[x;y]$ v roviny, pro jehož souřadnice platí rovnice (c) **potom** tento bod leží na kružnici $k(S[m;n],r)$:

$$\boxed{(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2 \Rightarrow X \in k} \tag{g}$$

Sloučením implikací (e) a (g) dostáváme ekvivalenci:

$$\boxed{X \in k \Leftrightarrow (x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2} \tag{e}$$

Neboli **množinově** (obr. 2b):

- Máme množinu M_1 všech bodů kružnice k.
- Máme množinu M_2 všech bodů roviny, které splňují rovnici $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$.

Ukázali jsme, že platí:

$$M_1 = M_2$$

Tedy množina všech bodů naší kružnice k je totožná s množinou všech bodů roviny, které splňují rovnici (c). Rovnici (c) říkáme **středová rovnice kružnice**.

V následující větě vyslovíme trochu odlišným způsobem zvlášť každou z implikací (e) a (g).

Věta 1: Středová rovnice kružnice (SRK)

a) **Nechť** k je kružnice se středem $S[m;n]$ a poloměrem r.
Potom má k (v kartézské soustavě souřadnic) rovnici

$$\boxed{(x-m)^2+(y-n)^2=r^2} \tag{2}$$

Této rovnici říkáme **středová rovnice kružnice**.

b) **Nechť** je dána rovnice (2).
Potom je to na betón rovnice jisté kružnice k se středem $S[m;n]$ a poloměrem r.

Poznámka. Bacha – neplést zkratku SRK s názvem slavného hotelu v ulici *Kethwadi 10'th* v *Mumbai*[1].

Poznámka. Bacha – neplést zkratku SRK s názvem slavného nože pro přežití a pro záchranáře (SRK = survival – rescue – knife)[2].

[1] https://images.app.goo.gl/VHK8jj8dFaLFgZ2B7
[2] https://www.cold-steel.cz/srk-in-sk-5

Poznámka. Tvrzení b) bychom mohli vyslovit také takto: „Pokud nějaký bod $X[x; y]$ roviny splňuje rovnici (2), potom na betón leží na kružnici k se středem $S[m; n]$ a poloměrem r. “

Poznámka. Pokud leží střed kružnice v počátku $O[0; 0]$, je $m = n = 0$ a rovnice má tvar

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2} \tag{3}$$

Poznámka. Pro body X ležící **uvnitř kružnice** zřejmě platí, že $|XS| < r$ a podobnými úvahami jako výše dostaneme pro tyto body rovnici

$$\boxed{(x - m)^2 + (y - n)^2 < r^2}$$

Podobně pro **body vně kružnice** platí

$$\boxed{(x - m)^2 + (y - n)^2 > r^2}$$

A pro **kruh**, který je sjednocením kružnice a jejích vnitřních bodů, platí rovnice

$$\boxed{(x - m)^2 + (y - n)^2 \leq r^2}$$

Příklad 1

a) Je dána kružnice k se středem $S[5; -2]$ a s poloměrem $r = 4$. Urči její SRK!

b) Je dána rovnice $(x + 4)^2 + (y + 10)^2 = 25$. Urči střed a poloměr příslušné kružnice.

c) Je dána rovnice $(x - 74)^2 + (y + 1)^2 = -9$. Urči střed a poloměr příslušné kružnice.

a) Dosazením do (2) dostáváme

$$(x-5)^2+(y-(-2))^2=4^2$$

neboli

$$\underline{\underline{(x-5)^2+(y+2)^2=16}}$$

b) Rovnici můžeme přepsat takto

$$(x-(-4))^2+(x-(-10))^2=5^2$$

Porovnáním s (2) vidíme, že platí $\underline{\underline{S[-4;-10],\ r=5}}$.

c) Na pravé straně rovnice má být r^2, což nemůže být nikdy záporné číslo. Rovnice proto určitě není rovnicí kružnice a nemůže být dokonce splněna pro žádný bod v rovině.

Příklad 2

Je dána kružnice k se středem $S[\sqrt{2};-1]$ a poloměrem $r=\sqrt{3}$. Zjistěte vzájemnou polohu této kružnice a bodů

$$a)\ A\left[2\sqrt{2};0\right] \qquad b)\ B[3;-1] \qquad c)\ C[2;-3]$$

Napíšeme rovnici kružnice:

$$\underbrace{\left(x-\sqrt{2}\right)^2+(y+1)^2}_{L}=\underbrace{3}_{P}$$

a zadané body dosadíme do levé strany rovnice a porovnáme s pravou stranou:

a) $A\left[2\sqrt{2};0\right]$:

$$L=\left(2\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)^2+(0+1)^2=\sqrt{2}^2+1=3=P$$

Bod A leží na kružnici k.

b) $B[3;-1]$:

$$L=\left(3-\sqrt{2}\right)^2+(-1+1)^2=\left(3-\sqrt{2}\right)^2\doteq 2,5<P$$

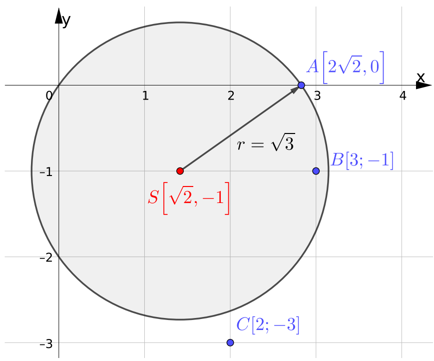
Bod B leží uvnitř kružnice k.

c) $C[2;-3]$:

$$L=\left(2-\sqrt{2}\right)^2+(-3+1)^2\doteq 4,3>P$$

Bod C leží vně kružnice k.

Kontrola v GeoGebře:



2 Obecná rovnice kružnice (ORK)

Vezměmež *středovou rovnici* kružnice (2) a upravme ji umocněním závor a převedením r^2 na levou stranu na jiný tvar.

$$\begin{aligned} (x-m)^2+(y-n)^2 &= r^2 \\ x^2-2xm+m^2+y^2-2yn+n^2-r^2 &= 0 \\ x^2+y^2 \underbrace{-2m}_{M} \cdot x \underbrace{-2n}_{N} \cdot y + \underbrace{m^2+n^2-r^2}_{L} &= 0 \\ x^2+y^2+Mx+Ny+L &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Dostáváme **obecnou rovnici** kružnice.

Věta 2: Obecná rovnice kružnice (ORK)

Nechť k je kružnice se středovou rovnicí (2).
Potom se tato rovnice dá upravit na rovnici ve tvaru

$$\boxed{x^2+y^2+Mx+Ny+L=0, \qquad \text{kde } M,N,L \in \mathbb{R}} \tag{5}$$

Této rovnici říkáme **obecná rovnice kružnice**.

Příklad 3

Je dána kružnice se středem $S[-1;3]$ a poloměrem $r=6$. Urči její *obecnou rovnici.*

Takže mohli bychom rovnou dosadit do rovnice (5), ale tak se to v praxi nedělá, pač tuto rovnici si nikdo nepamatuje. Místo toho nejprve určíme SRK a pak převedeme na ORK.

$$\begin{aligned} (x+1)^2+(y-3)^2 &= 36 \\ x^2+2x+1+y^2-6y+9-36 &= 0 \end{aligned}$$

Dostáváme

$$\underline{\underline{x^2 + y^2 + 2x - 6y - 27 = 0}}$$

Vzniká otázka, zda platí věta obrácená? Tedy pokud nám borec zadá, vole, rovnici ve tvaru (5), zda se nám ji, vole, vždy (pro libovolné hodnoty M, N, L) podaří převést, vole, na středový tvar? Jinak řečeno, platí, že rovnice (5) je vždycky rovnicí nějaké kružnice?

Následující příklad nám vokáže, že tomu tak bohužel, vole, vždy není.

Příklad 4: Kružnice a Lžikružnice

Převeď na SRK:

a) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 32 = 0$

---

a) Potřebujeme doplnit kvadratické dvojčleny

$$x^2 + 4x \quad ; \quad y^2 - 2y$$

na čtverec. Tedy:

$$x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4 \quad ; \quad y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1$$

Dosadíme do rovnice:

$$\begin{aligned} (x+2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 - 11 &= 0 \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 &= 16 \end{aligned}$$

Dostali jsme SRK kružnice, jejíž střed je $S[-2; 1]$ a poloměr je $r = 4$.

b) Analogicky dostáváme

$$x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9 \quad ; \quad y^2 - 10y = (y-5)^2 - 25$$

Dosadíme do rovnice:

$$(x-3)^2 - 9 + (y-5)^2 - 25 + 32 = 0$$
$$(x-3)^2 + (y-5)^2 = -7$$

Vidíme, že na pravé straně rovnice je záporné číslo, což není možné. Rovnice $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 32 = 0$ proto **není rovnicí žádné kružnice**! (Je to tzv. **lžikružnice** – tedy něco jako **Lžidimitrij**[a]!)

[a] https://cs.wikipedia.org/wiki/L%C5%BEidimitrij

Vidíme, že tedy neplatí věta obrácená k Větě 2, která by zněla:

Věta 3: Lživěta! – POZOR – NEPLATÍ

Nechť je dána rovnice

$$\boxed{x^2 + y^2 + Mx + Ny + L = 0, \qquad \text{kde } M, N, L \in \mathbb{R}}$$

Potom je to na betón vždy (pro libo-volné hodnoty M, N, L) rovnice nějaké kružnice.

Co tedy musí platit pro čísla M, N, L, aby vyšla skutečná kružnice, jako v části a) předchozího příkladu, a nikoli lžikružnice, jako se to stalo v části b) předchozího příkladu?

Příklad 5: Přísná opatření pro zabezpečení nevzniknutí neexistence kružnice, čili pro zamezení vzniku lžikružnice.

Urči podmínku, která musí platit pro čísla M, N, L, aby rovnice

$$x^2 + y^2 + Mx + Ny + L = 0, \qquad \text{kde } M, N, L \in \mathbb{R}$$

byla na betón rovnicí kružnice! A né aby zase, proboha, vznikla lžikružnice!

Dle (4) platí

$$\begin{aligned} M &= -2m \to \ m = -\frac{M}{2} \\ N &= -2n \to \ n = -\frac{N}{2} \\ L &= m^2 + n^2 - r^2 \to \ r^2 = m^2 + n^2 - L \\ r^2 &= \frac{M^2}{4} + \frac{N^2}{4} - L \end{aligned}$$

Protože r^2 je kladné, musí bát pravá strana také kladná:

$$\frac{M^2}{4} + \frac{N^2}{4} - L > 0$$

Odtud dostáváme podmínku: $\underline{\underline{M^2 + N^2 > 4L}}$

Předchozí Lživětu, která neplatí, můžeme tedy vylepšit tak, aby platila – přidáme odvozenou podmínku:

Věta 4: Napravená věta

Nechť je dána rovnice

$$\boxed{x^2 + y^2 + Mx + Ny + L = 0,}$$

kde

$$\boxed{\text{kde } M, N, L \in \mathbb{R}; \quad M^2 + N^2 > 4L} \tag{6}$$

Potom je to na betón rovnice nějaké kružnice a lze ji převést na středový tvar

$$\boxed{(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2}$$

kde

$$\boxed{m = -\frac{M}{2}, \quad n = -\frac{N}{2}, \quad r^2 = \frac{M^2}{4} + \frac{N^2}{4} - L} \tag{7}$$

Poznámka. Větu nebudeme používat v praxi, pač vztahy (6) a (7) si nikdo nepamatuje. Místo toho budeme v konkrétních příkladech používat doplnění na čtverec (viz Příklad 4).

Příklad 6: Kružnice ze 3 bodů

Jsou dány body $A[-1; 1]$, $B[1; 4]$, $C[2; -1]$. Najdi SRK a ORK kružnice, která je jimi určena. Urči střed a poloměr této kružnice.

Řešení 1 – nejprve ORK, pak SRK, střed a poloměr: Vezmu obecnou rovnici

$$x^2 + y^2 + Mx + Nx + L = 0$$

a dosadím do ní zadané body:

$$\begin{aligned} A &: 1 + 1 - M + N + L = 0 \\ B &: 1 + 16 + M + 4N + L = 0 \\ C &: 4 + 1 + 2M - N + L = 0 \end{aligned}$$

Upravíme:

$$-M + N + L + 2 = 0 \tag{a}$$
$$M + 4N + L + 17 = 0 \tag{b}$$
$$2M - N + L + 5 = 0 \tag{c}$$

Máme soustavu 3 rovnic pro 3 neznámé. Vyloučíme L:

$$\text{(b)} - \text{(a)} : \; 2M + 3N + 15 = 0 \tag{d}$$
$$\text{(c)} - \text{(b)} : \; M - 5N - 12 = 0 \tag{e}$$

Vyloučíme M:

$$\text{(d)} - 2\text{(e)} : \; 13N + 39 = 0$$
$$N = -3 \tag{f}$$

Dosadíme (f) do (e)

$$M + 15 - 12 = 0$$
$$M = -3 \tag{g}$$

Dosadíme (f) a (g) do (a):

$$\begin{aligned} 3 - 3 + L + 2 &= 0 \\ L &= -2 \end{aligned}$$

Dostáváme ORK:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 3x - 3y - 2 = 0} \tag{ORK}$$

Nyní převedu ORK na SRK (čtverce).

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 2 = 0$$

$$\boxed{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}} \tag{SRK}$$

Odtud dostáváme

$$\boxed{S\left[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right] \qquad r = \sqrt{\frac{13}{2}}}$$

Řešení 2 – nejprve SRK, střed a poloměr, pak ORK:
Vezmu středovou rovnici

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

a dosadím do ní zadané body:

$$\begin{aligned} A &: (-1 - m)^2 + (1 - n)^2 = r^2 \\ B &: (1 - m)^2 + (4 - n)^2 = r^2 \end{aligned}$$

$$C : (2-m)^2 + (-1-n)^2 = r^2$$

Upravím:

$$m^2 + n^2 + 2m - 2n + 2 = r^2 \tag{a}$$
$$m^2 + n^2 - 2m - 8n + 17 = r^2 \tag{b}$$
$$m^2 + n^2 - 4m + 2n + 5 = r^2 \tag{c}$$

Vyloučím odečtením m^2, n^2, r^2:

$$(a) - (b) : \; 4m + 6n - 15 = 0$$
$$(b) - (c) : \; 2m - 10n + 12 = 0$$

Druhou dělím dvěma:

$$4m + 6n - 15 = 0 \tag{d}$$
$$m - 5n + 6 = 0 \tag{e}$$

Vyloučím m:

$$(d) - 4(e) : \; 26n - 39 = 0$$
$$n = \frac{3}{2} \tag{f}$$

Dosadím (f) do (e)

$$m = 5 \cdot \frac{3}{2} - 6 = \frac{3}{2} \tag{g}$$

Prdnu (g) a (f) do (a):

$$\frac{9}{4} + \frac{9}{4} + 3 - 3 + 2 = r^2$$
$$r^2 = \frac{13}{2}$$

Dostáváme

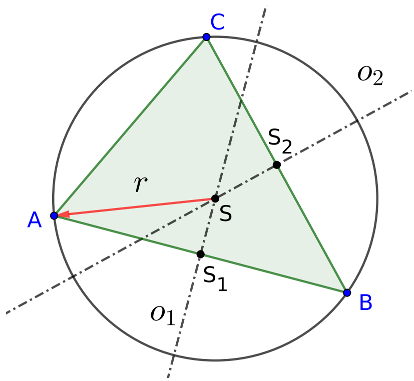
$$\underline{\underline{S\left[\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right] \qquad r=\sqrt{\frac{13}{2}}}}$$

a napíšeme SRK:

$$\underline{\underline{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{13}{2}}}$$

Odtud bychom umocněním a úpravou dostali ORK.

Řešení 3 – nejprve střed a poloměr planimetricky, pak SRK, pak ORK: Budeme postupovat jako v případě konstrukčního řešení – hledaná kružnice je vlastně kružnicí opsanou ΔABC. Její střed tedy leží na průsečíku os stran. Její poloměr je roven $r = |AS|$ (viz obr.).



Hledáme S jako průsečík osy o_1 strany AB a osy o_2 strany BC. Najdeme nejprve středy S_1, S_2 stran AB, BC:

$$S_1=\frac{A+B}{2}=\left[0;\frac{5}{2}\right] \qquad S_2=\frac{B+C}{2}=\left[\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$$

- Určíme ORO osy o_1:

$$\begin{aligned}
B - A = (2;3) &= \vec{n}_{o_1} \\
o_1 : 2x + 3y + c &= 0 \\
\text{dosadit } S_1 : 0 + \frac{15}{2} + c &= 0 \\
\underline{c = -\frac{15}{2}} \\
o_1 : 2x + 3y - \frac{15}{2} = 0 \ &\Big| \cdot 2 \\
\underline{o_1 : 4x + 6y - 15 = 0}
\end{aligned}$$

- Určíme ORO osy o_2:

$$\begin{aligned}
C - B = (1;-5) &= \vec{n}_{o_2} \\
o_2 : x - 5y + c &= 0 \\
\text{dosadit } S_2 : \frac{3}{2} - \frac{15}{2} + c &= 0 \\
\underline{c = 6} \\
\underline{o_2 : x - 5y + 6 = 0}
\end{aligned}$$

- Průsečík o_1, o_2:

$$4x + 6y - 15 = 0 \qquad \text{(a)}$$
$$x - 5y + 6 = 0 \qquad \text{(b)}$$

Vyloučíme x:

$$(\text{a}) - 4(\text{b}): \ 26y - 15 - 24 = 0$$
$$\underline{\underline{y = \frac{3}{2} = n}}$$

Dosadíme do (b):

$$x - \frac{15}{6} + 6 = 0$$
$$x = \underline{\underline{\frac{3}{2} = m}}$$

Odtud máme střed

$$\underline{\underline{S\left[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]}}$$

- Určíme poloměr:

$$r = |AS|$$
$$r = \sqrt{\left(-1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{13}{2}}}}$$

a napíšeme SRK:

$$\underline{\underline{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}}}$$

Odtud bychom umocněním a úpravou dostali ORK.

3 Cvičení 1

Zadání cv. 1: Boček 143/6 Řešení ⇒

Jsou dány body $A[-1;1]$, $B[1;4]$, $C[2;-1]$. Najdi SRK a ORK kružnice, která je jimi určena. Urči střed a poloměr této kružnice.

Zadání cv. 2: Tísnivá nejistota Řešení ⇒

Zjistěte, zda zadaná rovnice představuje skutečnou kružnici, nebo je to jen lstivá a zrádná lžikružnice!

a) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 15 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 4x + 7 = 0$

Zadání cv. 3: Názef Řešení ⇒

5.1 Napište rovnici kružnice s daným středem S a poloměrem r.

a) $S[2;-1]$, $r = 6$
b) $S[\sqrt{2};1]$, $r = \sqrt{3}$
c) $S[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}]$, $r = \frac{7}{2}$

5.2 Zjistěte, zda následující rovnice jsou rovnicemi kružnic. V kladném případě určete střed a poloměr.

a) $x^2 + y^2 - 6x + 5y + 6 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 1 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 4x + 7 = 0$
d) $2x^2 + 2y^2 - 6y - 3 = 0$

5.3 Určete poloměr kružnice se středem $S[5;-1]$, která prochází bodem $B[1;2]$. Napište její rovnici a určete a tak, aby bod $A[a;-5]$ ležel na této kružnici.

Zadání cv. 4: Názef

Řešení ⇒

5.4 Napište rovnici kružnice, která

a) má body $A[0;7]$, $B[4;1]$ za krajní body jednoho svého průměru,

b) prochází body $C[2;5]$, $D[3;2]$ a její střed leží na ose y,

c) prochází bodem $E[1;3]$, její střed leží na přímce $x - y + 4 = 0$ a její poloměr je 2.

Zadání cv. 5: Názef

Řešení ⇒

5.8 Ukažte, že rovnicí $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 39 = 0$ je dána kružnice. Napište rovnici kružnice soustředné, která prochází počátkem soustavy souřadnic.

5.9 Napište rovnici kružnice, která prochází body $A[2;1]$, $B[3;0]$, $C[0;5]$. Určete její střed a poloměr.

4 Řešení cvičení 1

Řešení příkladu 1: Boček 143/6 **Zadání ⇒**

Jsou dány body $A[-1;1]$, $B[1;4]$, $C[2;-1]$. Najdi SRK a ORK kružnice, která je jimi určena. Urči střed a poloměr této kružnice.

Výsledek:

$S[9;7] \quad r = \sqrt{85}$

$\text{ORK} \; : x^2 + y^2 - 18x - 14y + 45 = 0$

$\text{SRK} \; : (x-9)^2 + (y-7)^2 = 85$

Řešení příkladu 2: Tísnivá nejistota **Zadání ⇒**

Zjistěte, zda zadaná rovnice představuje skutečnou kružnici, nebo je to jen lstivá a zrádná lžikružnice!

a) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 15 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 4x + 7 = 0$

Výsledek:

a) Díky Bohu je to kružnice: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 20$

b) Bohu-žel kužel je to lsivá a zákeřná **lžikružnice**:
$(x-2)^2 + y^2 = \underbrace{-11}_{<0}$

Řešení příkladu 3:

Zadání ⇒

5.1 Napište rovnici kružnice s daným středem S a poloměrem r.

a) $S[2;-1]$, $r=6$ b) $S[\sqrt{2};1]$, $r=\sqrt{3}$

c) $S[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}]$, $r=\frac{7}{2}$

5.2 Zjistěte, zda následující rovnice jsou rovnicemi kružnic. V kladném případě určete střed a poloměr.

a) $x^2+y^2-6x+5y+6=0$ b) $x^2+y^2+4x-8y+1=0$

c) $x^2+y^2-4x+7=0$ d) $2x^2+2y^2-6y-3=0$

5.3 Určete poloměr kružnice se středem $S[5;-1]$, která prochází bodem $B[1;2]$. Napište její rovnici a určete a tak, aby bod $A[a;-5]$ ležel na této kružnici.

Výsledek:

5.1 a) $x^2+y^2-4x+2y-31=0$; b) $x^2+y^2-2\sqrt{2}x-2y=0$; c) $x^2+y^2+x-3y-\frac{39}{4}=0$. **5.2** a) $[3;-\frac{5}{2}]$, $\frac{\sqrt{37}}{2}$; b) $[-2;4]$, $\sqrt{19}$; c) Není. d) $[0;\frac{3}{2}]$, $\frac{\sqrt{15}}{2}$. **5.3** 5, $(x-5)^2+(y+1)^2=25$, $a_1=8$, $a_2=2$. **5.4** a) $(x-2)^2+(y-4)^2=13$; b) $x^2+(y-\frac{8}{3})^2=\frac{85}{9}$;

Řešení příkladu 4:

Zadání ⇒

5.4 Napište rovnici kružnice, která

a) má body $A[0;7]$, $B[4;1]$ za krajní body jednoho svého průměru,

b) prochází body $C[2;5]$, $D[3;2]$ a její střed leží na ose y,

c) prochází bodem $E[1;3]$, její střed leží na přímce $x-y+4=0$ a její poloměr je 2.

Výsledek:

$a_2 = 2$. **5.4** a) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 13$; b) $x^2 + (y-\frac{8}{3})^2 = \frac{85}{9}$; c) $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$ a $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 4$. **5.5** $x^2 +$

Řešení příkladu 5: [Zadání ⇒]

5.8 Ukažte, že rovnicí $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 39 = 0$ je dána kružnice. Napište rovnici kružnice soustředné, která prochází počátkem soustavy souřadnic.

5.9 Napište rovnici kružnice, která prochází body $A[2;1]$, $B[3;0]$, $C[0;5]$. Určete její střed a poloměr.

Výsledek:

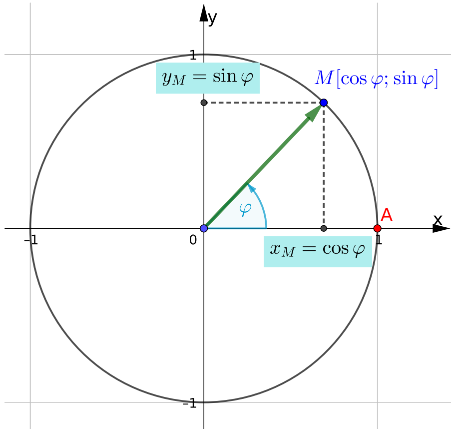
$+ (y+9)^2 = 4[(x-\frac{1}{2})^2 + (y+3)^2]$. **5.8** $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 64$, $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$. **5.9** $x^2 + y^2 - 18x - 14y + 45 = 0$, $[9;7]$, $\sqrt{85}$.

5 Parametrická rovnice kružnice (PRK)

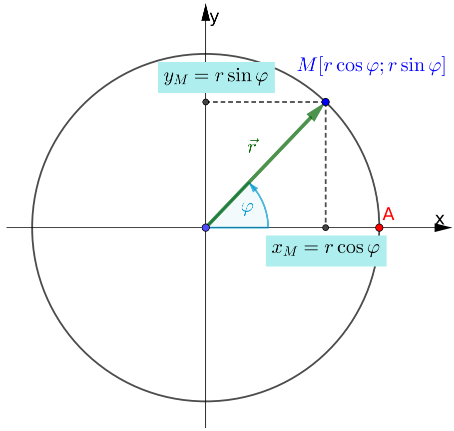
Víme, že existuje *parametrická rovnice přímky*. Máme dán výchozí bod A a směrák $\vec{s}$, který **natahujeme** pomocí **parametru** t a tím se **pohybujeme** po přímce z bodu A do nekonečna na jednu či druhou stranu.

$$X = A + k \cdot \vec{s} \quad k \in (-\infty; \infty)$$

Změna parametru k, který nabývá hodnot od minus do plus nekonečna, vnáší do statické situace přímky **přímočarý pohyb**, který se děje v čase.



(a) Jednotkova kružnice



(b) Erkova kružnice

Obr. 3

Také v případě kružnice můžeme do statické situace, kdy nazíráme celou kružnici najednou jako celek (rovnice ORK či SRK) vnést pohyb zavedením parametru. A to velice jednoduše a nenásilně, neboť všechno už známe z **goniometrie** a z nauky o **pohybu po kružnici** ve fysice!

Začněme *jednotkovou kružnicí* (JK), která v goniometrii slouží k zavedení goniometrických funkcí sinus, kosinus, tangens atd (obr. 3a). Víme, že každý bod této kružnice musí splňovat rovnici $x^2 + y^2 = 1$, což je její SRK. A samozřejmě rovnici $x^2 + y^2 - 1 = 0$, což je její ORK.

Současně však jsme v goniometrii pomocí JK **definovali** funkci *sinus* a *kosinus* orientovaného úhlu φ, který měříme od polopřímky OA (proti směru HR kladně, ve směru HR záporně) takto:

- *kosinus* úhlu φ je x-ová souřadnice bodu M
- *sinus* úhlu φ je y-ová souřadnice bodu M

Libovolný bod JK má tedy souřadnice $M[\cos\varphi; \sin\varphi]$. V goniometrii může úhel φ nabývat libovolných hodnot od $-\infty$ do $+\infty$. Pro naše účely však stačí jedna otočka, například v kladném smyslu, tedy stačí brát úhel φ jen z intervalu $\langle 0; 2\pi)$. Jinými slovy souřadnice x a y každého bodu JK musí splňovat rovnice:

PRK-JK

$$x = \cos\varphi$$
$$y = \sin\varphi \qquad \varphi \in \langle 0; 2\pi)$$

Číslu φ říkáme **parametr** a tyto rovnice se nazývají **parametrické rovnice kružnice** (PRK) (zde rovnice JK).

Je zřejmé, že pokud kružnice nebude jednotková, ale obecná s poloměrem r (střed stále v počátku), bude mít bod M souřadnice $M[r\cos\varphi; r\sin\varphi]$ (viz obr. 3b). Parametrické rovnice potom budou:

PRK - střed v počátku

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi \qquad \varphi \in \langle 0; 2\pi)$$

Když nakonec posuneme střed kružnice mimo počátek do bodu $S[m; n]$, tak se zřejmě x-ová souřadnice bodu M zvětší o m a y-ová souřadnice bodu M se zvětší o n (viz obr. 4) a PRK bude:

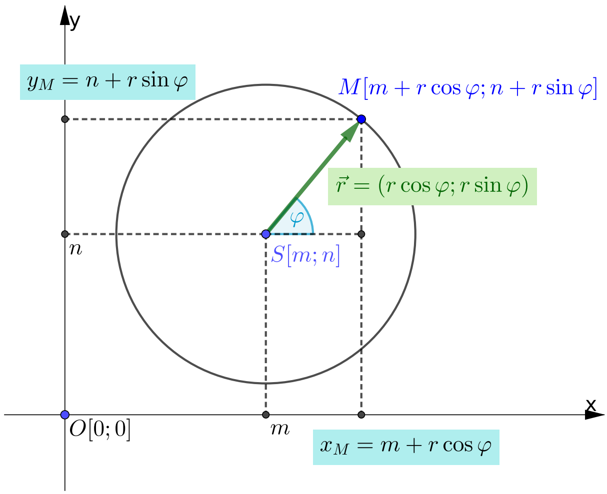
PRK - střed obecný

$$x = m + r\cos\varphi$$
$$y = n + r\sin\varphi \qquad \varphi \in \langle 0; 2\pi) \tag{8}$$

Můžeme se na to také dívat tak, že **průvodič** $\vec{r}$ bodu $M[x; y]$ má souřadnice $\vec{r} = (r\cos\varphi; r\sin\varphi)$. Přitom z bodu S se do bodu M dostanu tak, že k němu přičtu vektor $\vec{r}$. Dostaneme symbolický zápis

PRK - symb.

$$M = S + \vec{r}$$



Obr. 4

který v sobě skrývá obě parametrické rovnice pro x a y. Lze to zapsat také takto:

PRK - tvar pro GeoGebru

$$\underbrace{(x;y)}_{M} = \underbrace{(m;n)}_{S} + \underbrace{(r\cos\varphi; r\sin\varphi)}_{\vec{r}} \tag{9}$$

Rovnice PRK snadno převedeme na SRK tak, že **vyloučíme** parametr φ. A to tak, že převedeme souřadnice středu nalevo, rovnice umocníme a sečteme:

$$x - m = r\cos\varphi$$
$$y - n = r\sin\varphi$$
$$\Downarrow$$
$$(x-m)^2 = r^2\cos^2\varphi$$
$$(y-m)^2 = r^2\sin^2\varphi$$

$$\Downarrow$$

$$(x-m)^2 + (y-m)^2 = r^2 \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1}$$

$$(x-m)^2 + (y-m)^2 = r^2$$

A dostali jsme SRK.

Příklad 7: Hrátky s GeoGebrou 1

a) Zkus v GeoGebře – https://www.geogebra.org/calculator zadat do okýnka „Vstup. . .“ následující příkaz:

```
(cos(t),sin(t))
```

Co se vykreslí?

b) Co se stane, když do dalšího okýnka pro vstup zadáš stejný příkaz, ale místo písmene t použiješ např, písmeno q?

---

a) Vykreslí se kružnice se středem v počátku a poloměrem $r = 1$ (JK) – GeoGebra chápe příkaz jako parametrické zadání kružnice zapsané ve tvaru (9), kdy v **GeoGebře se preferuje při vykreslení parametricky zadané křivky (nejen kružnice) značení parametru písmenem** t.

b) Při použití jiného písmene než t (nebo ještě x, y) vznikne pouze **jediný bod** A ležící na naší kružnici. Současně se vlevo vytvoří jezdec pro změnu hodnoty parametru q a jeho posouváním měníme polohu bodu A na kružnici.

Zároveň lze tlačítkem se symbolem ▷ v kroužku spustit **animaci** a máme simulaci **pohybu po kružnici**.

https://www.geogebra.org/calculator/h6xmkkta

Příklad 8: Hrátky s GeoGebrou 2

Vykresli v GeoGebře – https://www.geogebra.org/calculator kružnici s poloměrem $r = 2$ a středem $S[1; -2]$. Vykresli její střed. Vykresli bod B ležící na této kružnici, který po ní obíhá.

Zřejmě (vzhledem k (9)) musíme zadat příkaz

```
(1,-2) + (2cos(t),2sin(t))
```

Střed zadáme jednoduše příkazem

```
(1,-2)
```

Střed se automaticky pojmenuje jako A. Pro zadání bodu B, který bude obíhat po kružnici, stačí zadat příkaz

```
A + (2cos(q),2sin(q))
```

kde jsme využili již existujícího středu A.

https://www.geogebra.org/m/tbddqetd

Animace jezdce q je nastavena tak, že hodnota q osciluje mezi hodnotou -5 a 5. Pokud chceme, aby bod B obíhal pěkně stále proti směru HR, stačí změnit nastavení posuvníku (pravé tlačítko myši $\rightarrow$ klik na políčko s q $\rightarrow$ „Nastavení“ $\rightarrow$ „Posuvník“ $\rightarrow$ okýnka „min = 0, max = 2pi“ a „Opakovat“ $\rightarrow$ „$\Rightarrow$ Rostoucí“.)

Příklad 9: Hrátky s GeoGebrou 3

a) Co se stane, když v Příkladu 7 napíšeme omylem před *ko-*

sinus dvojku?

`(2cos(t),sin(t))`

b) Co se stane, když v Příkladu 7 napíšeme omylem dvojku před *sinus*?

`(cos(t),2sin(t))`

c) Co se stane, když v Příkladu 7 napíšeme omylem dvojku před parametr t uvnitř *kosinu*?

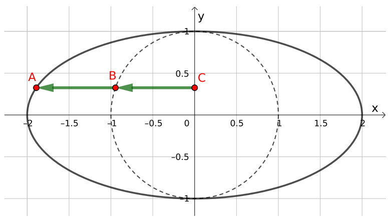
`(cos(2t),sin(t))`

d) Co se stane, když v Příkladu 7 napíšeme před parametr t uvnitř *kosinu* dvojku a před parametr t uvnitř *sinu* trojku?

`(cos(2t),sin(3t))`

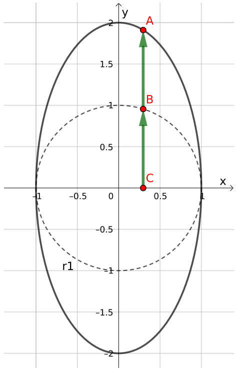
---

a) Vznikne **ležatá elipsa** – dvojka před kosinem **natáhne** kružnici **ve směru osy** x (Bod B je střed AC).



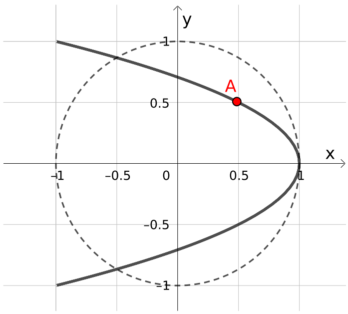
https://www.geogebra.org/m/zf2jcx2s

b) Vznikne **stojatá elipsa** – dvojka před sinem **natáhne** kružnici **ve směru osy** y (Bod B je střed AC).



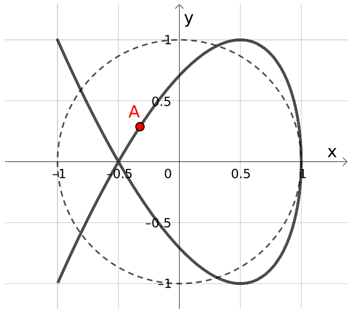
https://www.geogebra.org/calculator/ajkyesa7

c) Vznikne část **paraboly** (to se vokáže v Příkladu 10)– dvojka uvnitř kosinu **změní** kružnici k nepoznání.



https://www.geogebra.org/calculator/yva6yzdy

d) Vznikne část **mašle**. To už je divo-čína, co?



https://www.geogebra.org/calculator/nkf3sp5f

Jak jste si asi všimli, v předchozím příkladě jsme se dostali vlastně **Lissajousovy křivky**[3], které známe z fyziky jakožto trajektorie bodu, který koná pohyb složený ze dvou vzájemně kolmých kmitavých pohybů. Jednou z těchto křivek je také samotná kružnice. Pro další zkoumání těchto křivek viz odkaz na pár apletů v GeoGebře:

https://www.geogebra.org/m/NmRfXEFZ#chapter/504291

Příklad 10: Lissajousovy křivky jako grafy funkcí

Zkuste vyloučit parametr t u Lissajousovy křivky a popsat křivku jako sjednocení grafů jistých funkcí.

a) $x = \cos t\,, \quad y = \sin t \quad t \in \langle 0; 2\pi)$
b) $x = \cos t\,, \quad y = \sin 2t \quad t \in \langle 0; 2\pi)$
c) $x = \cos 2t\,, \quad y = \sin t \quad t \in \langle 0; 2\pi)$
d) $x = \sin 2t\,, \quad y = \cos t \quad t \in \langle 0; 2\pi)$
e) $x = \sin t\,, \quad y = \cos 2t \quad t \in \langle 0; 2\pi)$

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Lissajous_curve

a) $\boxed{x = \cos t\,, \quad y = \sin t \quad t \in \langle 0; 2\pi)}$

Víme, že to je Jednotkova kružnice. Ještě jednou si připomeneme, že vyloučení parametru se snadno provede umocněním a sečtením rovnic:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \cos^2 t + \sin^2 t \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Odtud vyjádříme y, abychom dostali recepis funkce:

$$y^2 = 1 - x^2$$

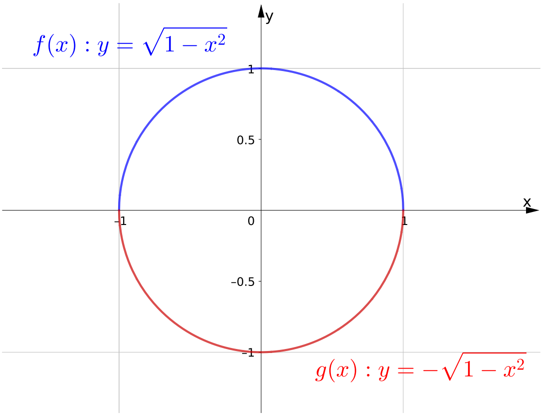
Uvědomíme si, že lze odmocnit, pač levá strana je nezáporná na první pohled a pravá strana je jednička zmenšená o výraz x^2, jenž nemůže být větší než jedna, pač $x = \cos t$.

$$\begin{aligned} \sqrt{y^2} &= \sqrt{1 - x^2} \\ |y| &= \sqrt{1 - x^2} \\ y &= \underline{\underline{\pm\sqrt{1 - x^2}}} \end{aligned}$$

Dostali jsme recepisy dvou funkcí:

$$\color{blue}{f(x) : y = \sqrt{1 - x^2}} \qquad \color{red}{g(x) : y = -\sqrt{1 - x^2}}$$

Jejich grafy tvoří horní a dolní půlkružnici, takže jejich sjednocením je celá kružnice (snadno se o tom přesvědčíme, když do GeoGebry zadáme oba recepisy).



b) $\boxed{x = \cos t\,, \quad y = \sin 2t \quad t \in \langle 0; 2\pi)}$

Upravíme y:

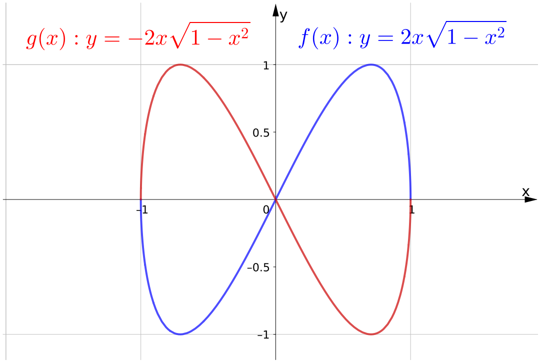
$$y = 2\sin t \cos t$$
$$y = \pm 2\sqrt{1-\cos^2 t} \cdot \cos t$$
$$y = \underline{\underline{\pm 2x\sqrt{1-x^2}}}$$

Dostali jsme recepisy dvou funkcí:

$$f(x) : y = 2x\sqrt{1-x^2} \qquad g(x) : y = -2x\sqrt{1-x^2}$$

Uvědomme si, jaký mají definiční obor. Dle zadání je $x = \cos 2t$. V průběhu úprav k žádnému dalšímu omezení pro x nedošlo (všechny úpravy byly ekvivalentní). Proto je $D = \langle -1; 1 \rangle$.

V GeoGebře si grafy obou funkcí vykreslíme, jejich sjednocením je **motýlek**:



c) $\boxed{x = \cos 2t\,, \quad y = \sin t \quad t \in \langle 0; 2\pi)}$

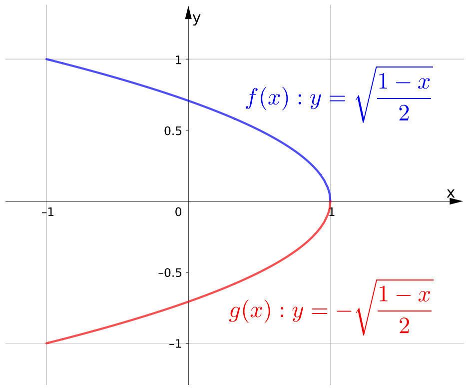
Upravíme x:

$$
\begin{aligned}
x &= \cos^2 t - \sin^2 t \\
x &= 1 - 2\sin^2 t \\
x &= 1 - 2y^2 \\
y^2 &= \frac{1-x}{2} \\
y &= \underline{\underline{\pm\sqrt{\frac{1-x}{2}}}}
\end{aligned}
$$

Dostali jsme recepisy dvou funkcí:

$$f(x) : y = \sqrt{\frac{1-x}{2}} \qquad g(x) : y = -\sqrt{\frac{1-x}{2}}$$

Jsou to funkce „druhá odmocnina“ a graf každé z nich představuje půlku ležaté paraboly (jen její část – v def. oboru od -1 do 1). Jejich sjednocením je tedy **část ležaté paraboly**.



d) $\boxed{x = \sin 2t\,, \quad y = \cos t \quad t \in \langle 0; 2\pi)}$

Upravíme x:

$$x = 2\sin t \cos t$$
$$x = \pm 2\sqrt{1-\cos^2 t} \cdot \cos t$$
$$x = \pm 2\sqrt{1-y^2} \cdot y$$

Chceme vyjádřit y:

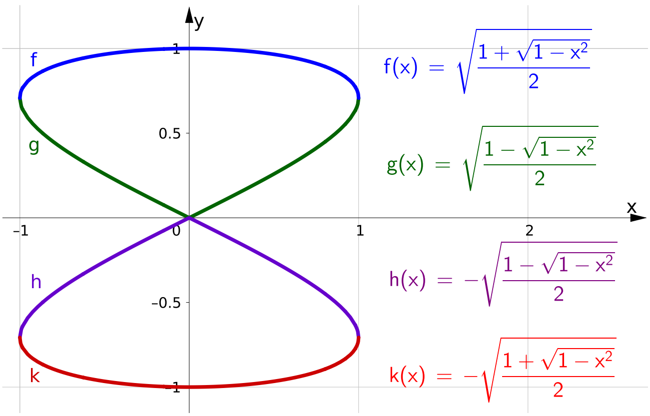
$$x^2 = 4(1-y^2) \cdot y^2$$
$$x^2 = 4\underbrace{y^2}_{p} - 4y^4$$
$$4p^2 - 4p + x^2 = 0$$
$$D = 16 - 16x^2$$
$$p = \frac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{2}$$
$$y = \pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{2}}$$

Dostali jsme recepisy 4 funkcí:

$$f(x): y = +\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}} \qquad g(x): y = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}}$$

$$h(x): y = +\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}} \qquad k(x): y = -\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}$$

Sjednocením grafů těchto funkcí **stojatý motýlek**.

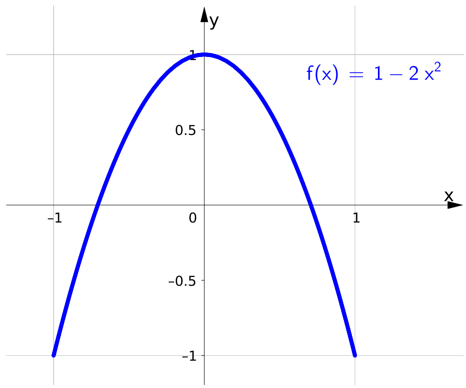


e) $\boxed{x = \sin t\,, \quad y = \cos 2t \quad t \in \langle 0; 2\pi)}$

Upravíme y:

$$y = \cos^2 t - \sin^2 t$$
$$y = 1 - 2\sin^2 t$$
$$y = \underline{\underline{1 - 2x^2}}$$

Dostali jsme obyčejnou kvadrátickou funkci, grafem je **stojatá párabola**.



Příklad 11

Zkuste vyloučit parametr t u Lissajousovy křivky:

$$x = \cos 2t$$
$$y = \sin 3t \qquad t \in \langle 0; 2\pi)$$

Upravíme x:

$$x = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos^2 t - 1 + \cos^2 t = 2\cos^2 t - 1$$

Odtud

$$\cos^2 t = \frac{x+1}{2} \tag{a}$$

Upravíme y:

$$y = \sin(t + 2t)$$
$$y = \sin t \cos 2t + \cos t \sin 2t$$
$$y = \sin t \cos 2t + 2 \sin t \cos^2 t$$
$$y = \sin t \left(\cos 2t + 2\cos^2 t\right) \tag{b}$$

Víme, že $\sin t = \pm\sqrt{1-\cos^2 t} \rightarrow$ do (b):

$$y = \pm\sqrt{1-\cos^2 t}\left(\underbrace{\cos 2t}_{x} + 2\cos^2 t\right)$$

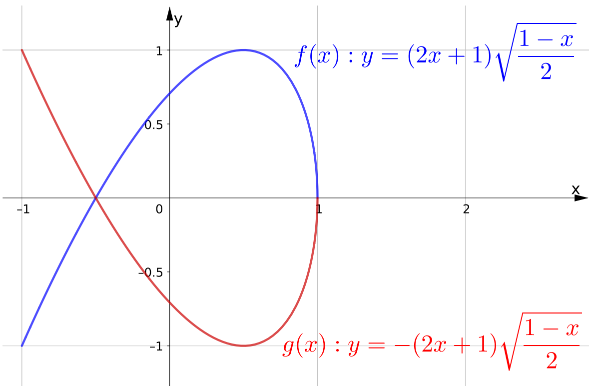
Dosadíme z (a):

$$y = \pm\sqrt{1-\frac{x+1}{2}}\,(x+x+1)$$

$$\underline{\underline{y = \pm(2x+1)\sqrt{\frac{1-x}{2}}}}$$

Dostali jsme recepisy dvou funkcí:

$$f(x): y = (2x+1)\sqrt{\frac{1-x}{2}} \qquad g(x): y = -(2x+1)\sqrt{\frac{1-x}{2}}$$



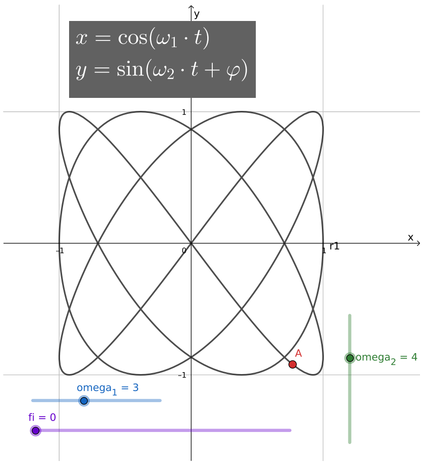
Uvědomme si, jaký mají definiční obor. Dle zadání je $x = \cos 2t$. V průběhu úprav k žádnému dalšímu omezení pro x nedošlo (všechny úpravy byly ekvivalentní). Proto je $D = \langle -1; 1\rangle$.

Bacha! Pokud bychom určovali def. obor jen z výsledného recepisu, dostaneme podmínku

$$1 - x \geq 0 \to \ x \leq 1$$

To by bylo špatně! Proto také když chceme vykreslit tyto dvě funkce v GeoGebře, musíme jim omezit def. obor na interval $\langle -1; 1 \rangle$!

To by stačilo, kdo si s tím chce ještě pohrát, může (dá se nastavovat také fázový posun):



Obr. 5:

https://www.geogebra.org/calculator/ameyhxwh

6 Tečna v bodě

Přímka může být **sečnou**, **tečnou** či **vnější** přímkou kružnice. Sečna má s kružnicí dva společné body, tečna jeden a vnější přímka s ní nemá žádný společný bod.

Z planimetrie víme, že tečna ke kružnici k se středem S sestrojená v bodě M kružnice je kolmá na poloměr MS (obr. 6).

Hledáme-li tečnu v bodě M v analytické geometrii, postupujeme stejně jako při planimetrické konstrukci – v bodě M zkonstruujeme kolmici na MS a máme hledanou tečnu.

Kružnici můžeme mít zadanou ve tvaru SRK či ORK. Začněme SRK.

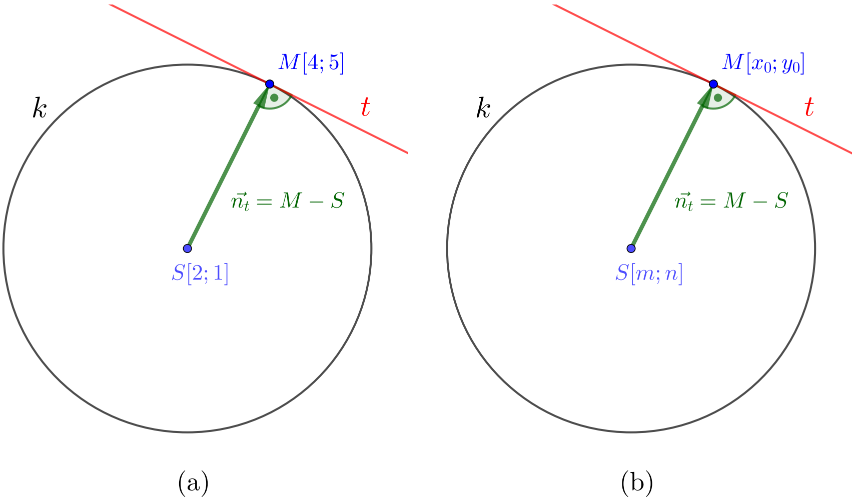
6.1 Tečna v bodě kružnice zadané SRK

Ukážeme si to na příkladě, který vyřešíme pro konkrétní číselné zadání i obecně:

Příklad 12

a) Je dána kružnice $(x-2)^2+(y-1)^2=20$. Najdi rovnici její tečny v bodě $M[4;5]$.

b) Je dána kružnice $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$. Najdi rovnici její tečny v bodě $M[x_0;y_0]$.



Obr. 6

a) To, že M leží opravdu na kružnici k, ověříme snadno dosazením jeho souřadnic do rovnice kružnice:

$$L = (4-2)^2 + (5-1)^2 = 4 + 16 = 20 = P$$

Normálou hledané tečny je zřejmě vektor $\overrightarrow{SM}$:

$$\vec{n_t} = \overrightarrow{SM} = M - S = [4;5] - [2;1] = (2;4) \to \ (1;2)$$

Proto ORO tečny bude

$$t: \ x + 2y + c = 0$$

Neznámou c určíme dosazením bodu M, který leží přece na tečně:

$$4 + 2 \cdot 5 + c = 0$$

$$c = -14$$

Dostáváme rovnici tečny:

$$\underline{\underline{t:\ x + 2y - 14 = 0}}$$

b) To, že M leží na kružnici k, znamená, že jeho souřadnice x_0, y_0 splňují její rovnici:

$$(x_0 - m)^2 + (y_0 - n)^2 = r^2 \tag{a}$$

Normálou hledané tečny je vektor $\overrightarrow{SM}$:

$$\vec{n_t} = \overrightarrow{SM} = M - S = [x_0; y_0] - [m; n] = (x_0 - m; y_0 - n)$$

Proto ORO tečny bude

$$t:\ (x_0 - m)x + (y_0 - n)y + c = 0$$

Neznámou c určíme dosazením bodu $M[x_0; y_0]$, který leží přece na tečně:

$$(x_0 - m)x_0 + (y_0 - n)y_0 + c = 0$$
$$c = -(x_0 - m)x_0 - (y_0 - n)y_0$$

Dostáváme rovnici tečny:

$$t: (x_0 - m)x + (y_0 - n)y - (x_0 - m)x_0 - (y_0 - n)y_0 = 0$$

Tu však ještě upravíme na hezčí tvar. Můžeme vytknout červenou a modrou závoru:

$$t: (x_0 - m)(x - x_0) + (y_0 - n)(y - y_0) = 0 \tag{b}$$

Uvědomíme si, že x_0, y_0, m, n jsou zadané **konstanty** a **proměnné** jsou x a y.

Ani s tímto tvarem se však ještě nespokojíme a ještě ho vylepšíme. Využijeme totiž rovnice (a), kterou přičteme k (b). Proč to můžeme udělat? Rovnice (a) je vlastně rovnost dvou **konstant** – přičtu-li tedy k levé straně rovnice (a) konstantu a k pravé straně (a) tutéž konstantu, dostanu rovnici tečny, která je samolitr ekvivalentní s (a):

$$t : (x_0 - m)(x - x_0) + (y_0 - n)(y - y_0) + \\ + (x_0 - m)^2 + (y_0 - n)^2 = 0 + r^2$$

Opět vytkneme červenou a modrou závoru:

$$t : (x_0 - m)(x - \cancel{x_0} + \cancel{x_0} - m) + (y_0 - n)(y - \cancel{y_0} + \cancel{y_0} - n) = r^2$$

A dostáváme krástný tvar rovnice tečny:

$$\underline{\underline{t : (x_0 - m)(x - m) + (y_0 - m)(y - n) = r^2}} \qquad \text{(c)}$$

Uvědomme si, že rovnice (b) a (c) jsou ekvivalentní. Rozdíl je v tom, že v (b) vystupují konstanty x_0, y_0, m, n, kdežto v (c) je ještě navíc poloměr kružnice r (ten je ale na x_0, y_0, m, n závislý – dle rovnice (a)).

V příkladu jsme odvodili následující větu:

Věta 5: Tečna kružnice (dané SRK) v dotykovém bodě.

Nechť je dána kružnice rovnicí ve **středovém tvaru**

$$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$$

Potom rovnice její tečny v **dotykovém bodě** $M[x_0;y_0]$ je

$$(x_0-m)(x-m)+(y_0-m)(y-n)=r^2 \tag{10}$$

Poznámka. Uvědomme si, že ve vztahu (10) jsou proměnné zeleně vyznačené x a y a všechna ostatní písmenka představují konstanty.

Poznámka. K zapamatování rovnice tečny slouží následující finta:

Finta 1: Jak si zapamatovat rovnici tečny kruž. (SRK)

Vezmeme středovou rovnici kružnice

$$k:(x-m)^2+(y-n)^2=r^2 \quad \text{(kružnice)}$$

Rozepíšeme ji ve tvaru **součinů**:

$$k:(x-m)\cdot(x-m)+(y-n)\cdot(y-n)=r^2 \quad \text{(furt kružnice)}$$

a u jedné z proměnných x,y v každém ze sčítanců na levé straně připíšeme **nulu**:

$$t:(x_0-m)\cdot(x-m)+(y_0-n)\cdot(y-n)=r^2 \quad \text{(tečna)}$$

Dostali jsem rovnici tečny (10).

Poznámka. Úplně stejná finta, se použije i v případě tečny **v bodě** elipsy, hyperboly a paraboly. A podobná finta se využije při hledání tečny vedené ke kuželosečce z **vnějšího** bodu.

To byl důvod, proč jsme se v Příkladě 12 nespokojili s rovnicí tečny ve tvaru (b), ale ještě jsme rovnici vylepšovali.

Příklad 13

Řešte Příklad 12a) pomocí vzorce (10).

Zadání bylo: Je dána kružnice $(x-2)^2+(y-1)^2=20$. Najdi rovnici její tečny v bodě $M[4;5]$.

Použiji FINTU z poznámky 6.1:

$$
\begin{aligned}
k:(x-2)^2+(y-1)^2&=20 && \text{(kružnice)}\\
k:(x-2)\cdot(x-2)+(y-1)\cdot(y-1)&=20 && \text{(furt kružnice)}\\
t:(x_0-2)\cdot(x-2)+(y_0-1)\cdot(y-1)&=20 && \text{(už tečna)}
\end{aligned}
$$

Za x_0, y_0 dosadíme souřadnice bodu $M[4;5]$:

$$
\begin{aligned}
(4-2)(x-2)+(5-1)(y-1)&=20\\
2(x-2)+4(y-1)&=20\\
2x-4+4y-4&=20\\
2x+4y-28&=0
\end{aligned}
$$

A po zkrácení máme řešení $\underline{\underline{t: x+2y-14=0}}$.

6.2 Tečna v bodě kružnice zadané ORK

Předpokládejme, že kružnici máme nyní zadánu obecnou rovnicí (ORK) ve tvaru

$$k: x^2+y^2+Mx+Nx+L=0$$

kde čísla M, N, L splňují podmínku (7)

$$M^2 + N^2 > 4L,$$

která, jak víme, musí být splněna, aby se jednalo o kružnici. Opět hledáme rovnici tečny v bodě kružnice $M[x_0; y_0]$.

Již jsme odvodili rovnici tečny (10)

$$t : (x_0 - m)(x - m) + (y_0 - m)(y - n) = r^2 \qquad \text{(tečna SRK)}$$

pro kružnici zadanou středovou rovnicí

$$k : (x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

a také díky (4) víme, že platí vztahy

$$M = -2m \qquad \text{(a)}$$
$$N = -2n \qquad \text{(b)}$$
$$L = m^2 + n^2 - r^2 \qquad \text{(c)}$$

Nyní stačí, když rovnici (tečna SRK) upravíme s využitím vztahů (a), (b), (c). Roznásobíme závory:

$$x_0x - x_0m - mx + m^2 + y_0y - y_0n - ny + n^2 = r^2$$

Přeskupíme:

$$x_0x + y_0y \underbrace{-m}_{\frac{M}{2}} x_0 \underbrace{-m}_{\frac{M}{2}} x \underbrace{-n}_{\frac{N}{2}} y_0 \underbrace{-n}_{\frac{N}{2}} y + \underbrace{m^2 + n^2 - r^2}_{L} = 0$$

Dosadíme z (a), (b), (c) a máme vele-praktickou rovnici tečny

$$t : x_0x + y_0y + \frac{M}{2}x_0 + \frac{M}{2}x + \frac{N}{2}y_0 + \frac{N}{2}y + L = 0$$

Po vytknutí dostáváme ještě trochu přehlednější tvar rovnice tečny

$$t : x_0x + y_0y + \frac{M}{2}(x_0 + x) + \frac{N}{2}(y_0 + y) + L = 0$$

Takže jsem odvodili větu:

Věta 6: Tečna kružnice (dané ORK) v dotykovém bodě.

Nechť je dána kružnice rovnicí v **obecném tvaru**

$$\boxed{x^2 + y^2 + Mx + Ny + L = 0}$$

Potom rovnice její tečny v **dotykovém bodě** $M[x_0; y_0]$ je

$$\boxed{t : x_0 x + y_0 y + \frac{M}{2} x_0 + \frac{M}{2} x + \frac{N}{2} y_0 + \frac{N}{2} y + L = 0} \tag{11}$$

neboli

$$\boxed{x_0 x + y_0 y + \frac{M}{2}(x_0 + x) + \frac{N}{2}(y_0 + y) + L = 0} \tag{12}$$

Poznámka. Uvědomme si, že ve vztazích (11) a (12) jsou zelená písmenka proměnné x a y a všechna ostatní písmenka představují konstanty.

Poznámka. Rovnice tečny ve tvaru (12) se hodí na výstavy vzorců, k zarámování a pověšení na zeď a podobně.

Rovnice tečny ve tvaru (11) se může proti ní zdát nepřehledná, ale výborně se hodí pro praktické účely při hledání tečny pomocí následující finty.

Finta 2: Jak si zapamatovat rovnici tečny kruž. (ORK)

Vezmeme obecnou rovnici kružnice

$$k : x^2 + y^2 + Mx + Ny + L = 0 \quad \text{(kružnice)}$$

a rozepíšeme ji ve tvaru **součinů** a **součtů**:

$$k: x \cdot x + y \cdot y + \overbrace{\left(\frac{M}{2}x + \frac{M}{2}x\right)}^{Mx} + \overbrace{\left(\frac{N}{2}y + \frac{N}{2}y\right)}^{Ny} + L = 0 \quad \text{(furt kružnice)}$$

a u jedné z proměnných x, y v každém ze sčítanců na levé straně připíšeme **nulu**:

$$t: x_0 x + y_0 y + \frac{M}{2}x_0 + \frac{M}{2}x + \frac{N}{2}y_0 + \frac{N}{2}y + L = 0 \quad \text{(tečna)}$$

A je to – dostali jsme rovnici tečny ve tvaru (11). (Nemusím už vytýkat $\frac{M}{2}$ a $\frac{N}{2}$, pač budu v konkrétním příkladě naopak slučovat zvlášť členy s proměnnými a zvlášť konstanty – viz následující příklad.)

Příklad 14

Urči tečnu kružnice $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 19 = 0$ v bodě $M[2; 1]$.

Použiji předchozí fintu:

$$k: x^2 + y^2 + 4x + 6y - 19 = 0 \quad \text{(kružnice)}$$

$$k: x \cdot x + y \cdot y + \overbrace{(2x + 2x)}^{4x} + \overbrace{(3y + 3y)}^{6y} - 19 = 0 \quad \text{(furt kružnice)}$$

$$t: x_0 \cdot x + y_0 \cdot y + 2x_0 + 2x + 3y_0 + 3y - 19 = 0 \quad \text{(už tečna)}$$

Za x_0, y_0 dosadíme souřadnice bodu $M[2; 1]$:

$$2 \cdot x + 1 \cdot y + 2 \cdot 2 + 2x + 3 \cdot 1 + 3y - 19 = 0$$
$$4x + 4y - 12 = 0$$

A po vydělení máme řešení $\underline{\underline{t: x + y - 3 = 0}}$.

Shrnutí: Tečna kružnice v bodě $M[x_0; y_0]$

- **Nic si nepamatuju:** Vůbec nic se neděje, vé! Postupuji jako v planimetrii – viz Příklad 12a) (Pokud nemám SRK, ale ORK – musím nejprve převést na SRK.)
- **Pamatuju si Finty:** pro SRK jedu podle Finty 1, pro ORK jedu podle Finty 2

Příklad 15: Cesta zapomnětlivce

Řeš příklad Příklad 14 bez znalosti fint!

Zadání bylo: Urči tečnu kružnice $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 19 = 0$ v bodě $M[2; 1]$.

No, takže halt musím převést ORK na SRK, abych získal střed:

$$\begin{aligned}(x + 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 - 19 &= 0 \\ (x + 2)^2 + (y + 3)^2 &= 32\end{aligned}$$

Střed je tedy $S[-2; -3]$. Normála tečny je

$$M - S = (4; 4) \rightarrow \ (1; 1)$$

Tečna je

$$x + y + c = 0$$

Dosadím M:

$$2 + 1 + c = 0 \rightarrow \ c = -3$$

Výsledek je $\underline{\underline{t : x + y - 3 = 0}}$.

7 Tečna z bodu

Už umíme najít tečnu ke kružnici **v jejím bodě** $M[x_0; y_0]$. Nyní chceme najít tečnu ke kružnici, která prochází jejím **vnějším bodem** $M[x_1; y_1]$[4].

To je známá planimetrická úloha, která se konstrukčně řeší pomocí *Thalétovy* kružnice[5]. Jak se postupuje v analytické geometrii? Existuje více postupů a některé si ukážeme.

7.1 Použití *Thalétovy* kružnice

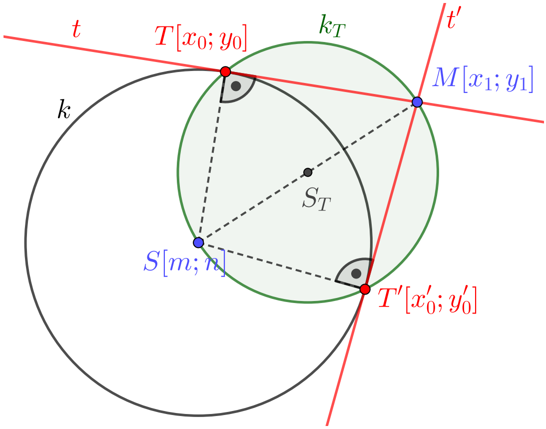
Příklad 16: Tečna z bodu – *Thalétova* kružnice

Je dána kružnice $k : (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$ a její vnější bod $M[0; -4]$. Urči tečny z M ke k.

Jedu dle obrázku. Víme, že tečny jsou dvě (t a t').

[4]Indexy jsou **jedničky** – abychom to odlišili od bodu, který leží na kružnici, kde jsme měli indexy **nuly**.

[5]V Eukleidových Základech najdeme ještě další konstrukci tečen: https://www.geogebra.org/m/dnasqQxW



Střed kružnice je $S[-1; 3]$. Najdu střed a poloměr Thalétovky:

$$S_T = \frac{S+M}{2} = \left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right]$$

$$r_T = \frac{|S-M|}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(-1-0)^2 + (3-(-4))^2} = \frac{\sqrt{50}}{2}$$

Rovnice Thalétovky:

$$k_T : \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{50}{4}$$

Najdu průnik k a k_T – získám dotykáče T_1 a T_2. Nejprve si umocním závory a upravím rovnice kružnic na ORK:

$$k : x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 25$$

$$k : x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$- - - - - - - - - -$$

$$k_T : x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 + y + \frac{1}{4} = \frac{50}{4}$$

$$k_T : x^2 + y^2 + x + y - 12 = 0 \qquad \text{(b)}$$

Teď řeším soustavu (a) a (b) – rovnice odečtu:

$$(a) - (b) : \; x - 7y - 3 = 0 \qquad \text{(c)}$$

Z (c) vyjádřím $x = 7y + 3$ a prdnu ho do (b):

$$\begin{aligned}
(7y+3)^2 + y^2 + 7y + 3 + y - 12 &= 0 \\
49y^2 + 42y + 9 + y^2 + 8y - 9 &= 0 \\
50y^2 + 50y &= 0 \\
y^2 + y &= 0 \\
y(y+1) &= 0 \\
y_1 &= -1 \rightarrow \; x_1 = -4 \\
y_2 &= 0 \rightarrow \; x_2 = 3
\end{aligned}$$

Takže dotykáče jsou $T[-4; -1]$ a $T'[3; 0]$.

Teď jsou tečny již snadné. Můžu buď využít znalosti vzorce pro tečnu v bodě, nebo určit tečny ze dvou známých bodů M, T resp. M, T'.

Tečnu t určím prvním způsobem:

$$\begin{aligned}
& t : (x_0+1)(x+1) + (y_0-3)(y-3) = 25 \\
\text{dosadit } T[-4;-1] \rightarrow \; & t : (-4+1)(x+1) + (-1-3)(y-3) = 25 \\
& t : -3x - 3 - 4y + 12 = 25 \\
& \underline{\underline{t : 3x + 4y + 16 = 0}}
\end{aligned}$$

Tečnu t' určím druhým způsobem:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{s_{t'}} &= T' - M = (3; 4) \\
\overrightarrow{n_{t'}} &= (4; -3)
\end{aligned}$$

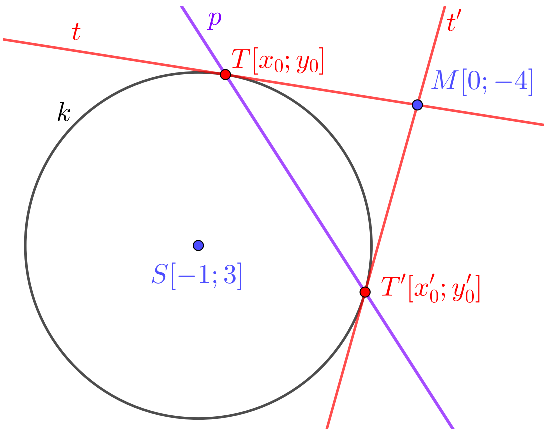
$$\text{dosadit } T'[3;0] \rightarrow \begin{aligned} & t' : 4x - 3y + c = 0 \\ & 12 - 0 + c = 0 \rightarrow \ c = -12 \\ & \underline{\underline{t' : 4x - 3y - 12 = 0}} \end{aligned}$$

7.2 Polára kružnice zadané SRK

Přes Thalétovku je to jednoduché, ale zdlouhavé. Zkusíme to nyní jinak – využít znalost rovnice pro **tečnu v bodě**.

Příklad 17: Tečna z bodu – pomocí tečny v bodě

Je dána kružnice $k : (x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$ a její vnější bod $M[0;-4]$. Urči tečny z M ke k.



Víme, že rovnice tečny t v bodě $T[x_0;y_0]$ je

$$t : (x_0+1)(x+1) + (y_0-3)(y-3) = 25$$

Bod T neznáme, ale víme, že na tečně t leží bod $M[0;-4]$, takže jeho souřadnice musí splňovat rovnici tečny:

$$\begin{aligned} (x_0+1)(0+1)+(y_0-3)(-4-3) &= 25 \\ x_0+1-7y_0+21 &= 25 \end{aligned}$$

Odtud

$$x_0 - 7y_0 - 3 = 0 \tag{a}$$

Pro souřadnice bodu $T[x_0; y_0]$ tedy platí rovnice (a). To můžeme interpretovat tak, že bod T leží na jisté přímce, jejíž rovnice je

$$x - 7y - 3 = 0$$

Analogicky víme, že rovnice tečny t' v bodě $T'[x_0'; y_0']$ je

$$t' : (x_0'+1)(x+1)+(y_0'-3)(y-3) = 25$$

Podobnými úvahami jako prve dospějeme k tomu, že pro souřadnice bodu $T'[x_0'; y_0']$ platí rovnice

$$x_0' - 7y_0' - 3 = 0 \tag{b}$$

To můžeme interpretovat tak, že bod T' leží na jisté přímce, jejíž rovnice je

$$x - 7y - 3 = 0$$

Vidíme tedy, že oba body T i T' leží na přímce

$$\boxed{p = TT' : x - 7y - 3 = 0}$$

Této přímce, která je spojnicí dotykáčů T, T' (viz obrázek výše), se říká **polára kružnice** k **vzhledem k bodu** M[a]. Nyní najdu neznámé dotykáče T, T' jako průsečíky poláry p a kružnice k. Řeším tedy soustavu rovnic

$$k : (x+1)^2 + (y-3)^2 = 25 \tag{c}$$

$$p : x - 7y - 3 = 0 \tag{d}$$

Z (d) máme $x = 7y + 3 \rightarrow$ frkneme to do (c):

$$\begin{aligned}(7y+4)^2 + (y-3)^2 &= 25\\ 49y^2 + 56y + 16 + y^2 - 6y + 9 &= 25\\ 50y^2 + 50y &= 0\\ y^2 + y &= 0\\ y(y+1) &= 0\\ y_1 &= -1 \rightarrow \ x_1 = -4\\ y_2 &= 0 \rightarrow \ x_2 = 3\end{aligned}$$

Takže dotykáče jsou $T[-4; -1]$ a $T'[3; 0]$. Další postup je stejný jako v předchozím Příkladě 16.

Dostaneme $\underline{\underline{t : 3x + 4y + 16 = 0}}$ a $\underline{\underline{t' : 4x - 3y - 12 = 0}}$.

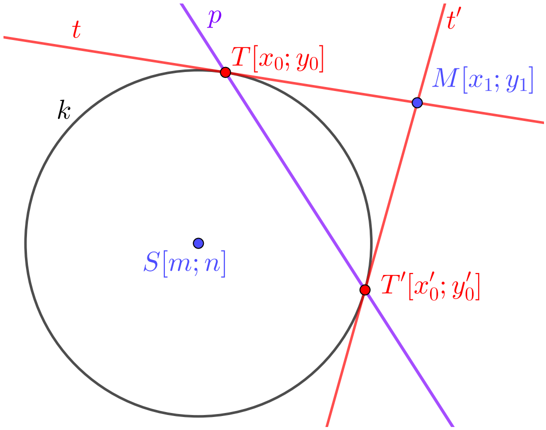
---

[a]Všimněme si, že jsme tuto rovnici dostali v předchozím Příkladě 16 odečtením rovnic k a k_T (rovnice (c))

Vidíme, že **polára** je při hledání tečen z vnějšího bodu velice důležitá, pač když už známe její rovnici, není problém najít dotykáče a potom i samotné tečny. Protože se bude hodit i při hledání tečen z bodu u ostatních kuželoseček, vyplatí se nám **odvodit si její rovnici obecně**.

Příklad 18: Odvození rovnice poláry

Je dána kružnice $k : (x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ a její vnější bod $M[x_1; y_1]$. Urči rovnici poláry kružnice k vzhledem k bodu M.



Jedem dle předchozího příkladu.

Víme, že rovnice tečny t v bodě $T[x_0; y_0]$ je

$$t : (x_0 - m)(x - m) + (y_0 - n)(y - n) = r^2$$

Bod T neznáme, ale víme, že na tečně t leží bod $M[x_1; y_1]$, takže jeho souřadnice musí splňovat rovnici tečny:

$$(x_0 - m)(x_1 - m) + (y_0 - n)(y_1 - n) = r^2 \qquad \text{(a)}$$

Pro souřadnice bodu $T[x_0; y_0]$ tedy platí rovnice (a). To můžeme interpretovat tak, že bod T leží na **jisté přímce**, jejíž rovnice je

$$\underline{\underline{(x - m)(x_1 - m) + (y - n)(y_1 - n) = r^2}}$$

Analogicky víme, že rovnice tečny t' v bodě $T'[x_0'; y_0']$ je

$$t' : (x_0' - m)(x - m) + (y_0' - n)(y - n) = r^2$$

Bod T' neznáme, ale víme, že na tečně t' leží bod $M[x_1; y_1]$, takže jeho souřadnice musí splňovat rovnici tečny:

$$(x_0' - m)(x_1 - m) + (y_0' - n)(y_1 - n) = r^2 \tag{b}$$

Pro souřadnice bodu $T'[x_0'; y_0']$ tedy platí rovnice (b). To můžeme interpretovat tak, že bod T' leží na **jisté přímce**, jejíž rovnice je

$$\underline{\underline{(x - m)(x_1 - m) + (y - n)(y_1 - n) = r^2}}$$

Vidíme tedy, že oba body T i T' leží na přímce

$$\boxed{p = TT' : (x - m)(x_1 - m) + (y - n)(y_1 - n) = r^2}$$

Této přímce, která je spojnicí dotykáčů T, T' (viz obrázek výše), se říká **polára kružnice** k **vzhledem k bodu** M.

V tomto příkladu jsme odvodili následující větu:

Věta 7: Rovnice poláry kružnice (dané SRK) vzhledem k vnějšímu bodu M.

Nechť je dána kružnice rovnicí ve **středovém tvaru**

$$\boxed{(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2}$$

Potom rovnice její **poláry** vzhledem k **vnějšímu bodu** $M[x_1; y_1]$ je

$$\boxed{(x_1 - m)(x - m) + (y_1 - m)(y - n) = r^2} \tag{13}$$

Poznámka. Uvědomme si, že ve vztahu (13) jsou proměnné zeleně vyznačené x a y a všechna ostatní písmenka představují konstanty.

Poznámka. K zapamatování rovnice poláry slouží následující finta:

Finta 3: Jak si zapamatovat rovnici poláry kruž. (SRK)

Vidíme, že rovnice poláry je formálně úplně stejná jako rovnice tečny v bodě! Pouze tam místo bodu kružnice $[x_0; y_0]$ vystupuje vnější bod $[x_1; y_1]$. Můžu tedy využít stejnou fintu pro zapamatování jako u rovnice tečny v bodě, jen dosazuji x_1, y_1. Vezmeme středovou rovnici kružnice

$$k : (x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2 \quad \text{(kružnice)}$$

Rozepíšeme ji ve tvaru **součinů**:

$$k : (x - m) \cdot (x - m) + (y - n) \cdot (y - n) = r^2 \quad \text{(furt kružnice)}$$

a u jedné z proměnných x, y v každém ze sčítanců na levé straně připíšeme **jedničku**:

$$p : (x_1 - m) \cdot (x - m) + (y_1 - n) \cdot (y - n) = r^2 \quad \text{(polára)}$$

Dostali jsem rovnici (13) poláry vzhledem k bodu $M[x_1; y_1]$.

Poznámka. Úplně stejná finta, se použije i v případě tečny **z bodu** elipsy, hyperboly a paraboly.

To byl důvod, proč jsme si odvodili rovnici poláry **obecně**, i když se bez této obecné rovnice v konkrétním příkladě dokážeme obejít.

7.3 Polára kružnice zadané ORK

Úplně analogickými úvahami jako v předchozí kapitolce bychom odvodili větu pro rovnici poláry kružnice, která je zadána obecnou rovnicí:

Věta 8: Rovnice poláry kružnice (dané ORK) vzhledem k vnějšímu bodu M.

Nechť je dána kružnice rovnicí ve **obecném tvaru**

$$\boxed{x^2 + y^2 + Mx + Ny + L = 0}$$

Potom rovnice její **poláry** vzhledem k **vnějšímu bodu** $M[x_1; y_1]$ je

$$\boxed{t : x_1x + y_1y + \frac{M}{2}x_1 + \frac{M}{2}x + \frac{N}{2}y_1 + \frac{N}{2}y + L = 0} \tag{14}$$

neboli

$$\boxed{x_1x + y_1y + \frac{M}{2}(x_1 + x) + \frac{N}{2}(y_1 + y) + L = 0} \tag{15}$$

Finta 4: Jak si zapamatovat rovnici poláry kruž. (ORK)

Vezmeme obecnou rovnici kružnice

$$k : x^2 + y^2 + Mx + Ny + L = 0 \quad \text{(kružnice)}$$

a rozepíšeme ji ve tvaru **součinů** a **součtů**:

$$k : x \cdot x + y \cdot y + \overbrace{\left(\frac{M}{2}x + \frac{M}{2}x\right)}^{Mx} + \overbrace{\left(\frac{N}{2}y + \frac{N}{2}y\right)}^{Ny} + L = 0 \quad \text{(furt kružnice)}$$

a u jedné z proměnných x, y v každém ze sčítanců na levé straně připíšeme **jedničku**:

$$t: x_1x + y_1y + \frac{M}{2}x_1 + \frac{M}{2}x + \frac{N}{2}y_1 + \frac{N}{2}y + L = 0 \quad \text{(polára)}$$

A je to – dostali jsme rovnici tečny ve tvaru (14). (Nemusím už vytýkat $\frac{M}{2}$ a $\frac{N}{2}$, pač budu v konkrétním příkladě naopak slučovat zvlášť členy s proměnnými a zvlášť konstanty – viz následující příklad.)

Příklad 19

Je dána kružnice $k: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$ a její vnější bod $M\left[\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right]$. Urči rovnici poláry kružnice k vzhledem k bodu M.

$$\begin{aligned}
&k: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0\\
&k: xx + yy - 3x - 3x - 2y - 2y + 3 = 0\\
&p: x_1x + y_1y - 3x_1 - 3x - 2y_1 - 2y + 3 = 0\\
&p: \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}y - \frac{3}{2} - 3x - 9 - 2y + 3 = 0\\
&p: x + 9y - 3 - 6x - 18 - 4y + 6 = 0\\
&p: -5x + 5y - 15 = 0\\
&\underline{\underline{p: x - y + 3 = 0}}
\end{aligned}$$

Kdo chce, ať si dopočítá tečny. Vyjde

$$\begin{aligned}
&T[0; 3] \quad T'[2; 5]\\
&t: 3x - y + 3 = 0 \qquad t': x - 3y + 13 = 0
\end{aligned}$$

Shrnutí: Tečna kružnice z bodu $M[x_1; y_1]$

- **Nic si nepamatuju:** Vůbec nic se neděje, voe! Postupuji jako v planimetrii (Thalétova kružnice) – viz Příklad 16 (Pokud nemám SRK, ale ORK – musím nejprve převést na SRK.)
- **Pamatuju si Finty pro nalezení poláry:** pro SRK jedu podle Finty 3, pro ORK jedu podle Finty 4. Mám **poláru**, pak najdu dotykáče jako průnik poláry s kružnicí, pak najdu tečny.

7.4 Další možnosti nalezení tečny z bodu

Umíme to přes **Thalétovu kružnici** a přes **poláru**. Ukažme si v následujícím příkladu 3 další možnosti hledání tečny z bodu:

Příklad 20: Nouzová řešení

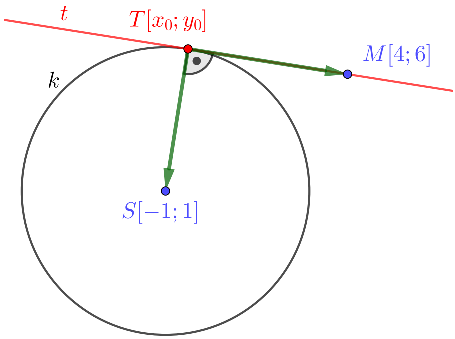
Je dána kružnice se středem $S[-1; 1]$ a s poloměrem $r = \sqrt{10}$. Najdi její tečny vedené z bodu $M[4; 6]$.

a) Použij skalární součin
b) Použij Pýthagorovu větu
c) Použij svazek přímek

---

a) **Skalární součin:** Hledám bod T – mám tedy 2 neznámé x_0, y_0 – potřebuji 2 rovnice:

- Vektory $\overrightarrow{TM}$ a $\overrightarrow{TS}$ jsou kolmé, takže jejich **skalární součin je roven nule**. (Viz obr. níže – bacha, obrázek je schematický a poloha zakreslených bodů neodpovídá jejich skutečné poloze v souřadné soustavě. Totéž se týká i všech ostatních obrázků v tomto příkladu.)



$$\overrightarrow{TM} = M - T = (4 - x_0; 6 - y_0)$$
$$\overrightarrow{TS} = S - T = (-1 - x_0; 1 - y_0)$$
$$\overrightarrow{TM} \cdot \overrightarrow{TS} = (4 - x_0)(-1 - x_0) + (6 - y_0)(1 - y_0) =$$
$$= -4 - 3x_0 + x_0^2 + 6 - 7y_0 + y_0^2 =$$
$$= x_0^2 + y_0^2 - 3x_0 - 7y_0 + 2$$

Skalární součin má být nulový:

$$\underline{\underline{x_0^2 + y_0^2 - 3x_0 - 7y_0 + 2 = 0}} \qquad \text{(a)}$$

- Bod $T[x_0; y_0]$ leží na k, jejíž rovnice je

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 10$$

Proto platí pro T

$$(x_0 + 1)^2 + (y_0 - 1)^2 = 10$$

Neboli

$$\underline{\underline{x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 2y_0 - 8 = 0}} \qquad \text{(b)}$$

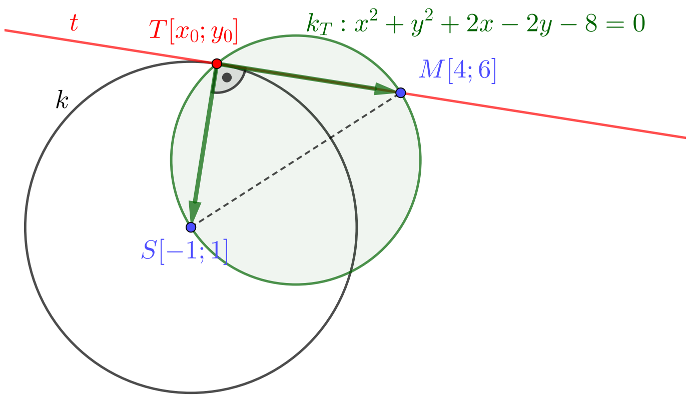
Máme soustavu (a),(b) – řešení si udělej sama. Vyjdou dvě řešení – tedy dva dotykáče

$$T[-2;4] \qquad T'[2;0]$$

Odtud dostaneme známým způsobem tečny:

$$\underline{\underline{t: x-3y+14=0}} \qquad \underline{\underline{t': 3x-y-6=0}}$$

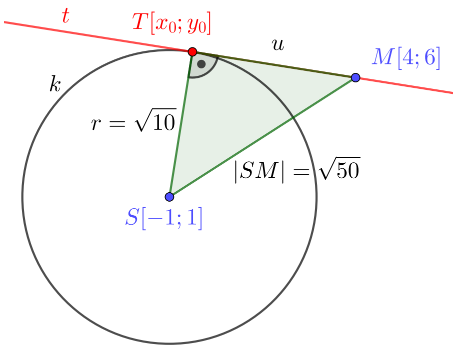
Poznámka: Když se nad tím zamyslíme, tak jsme pomocí **skalárního součinu** hledali bod T takový, aby byl úhel STM pravý. Všechny takové body leží na Thalétově kružnici, takže rovnice (a) odvozená díky požadavku, aby byl skalární součin nulový, je rovnicí Thalétovy kružnice nad průměrem SM, do které je za x dosazeno x_0 a za y je dosazeno y_0. Toto řešení pomocí skalárního součinu je tedy jen variací na řešení pomocí Thalétovy kružnice.



b) **Pýthagorova věta:** Hledám bod T – mám tedy 2 neznámé x_0, y_0 – potřebuji 2 rovnice:

- Dle obrázku níže platí:

$$u^2 = |SM|^2 - r^2 \qquad \text{(PV)}$$



Přitom dle zadání $r = \sqrt{10}$ a $|SM|$ snadno spočítáme pomocí souřadnic bodů S a M a vychází $|SM| = \sqrt{50}$. Přitom $u = |TM| = \sqrt{(x_0 - 4)^2 + (y_0 - 6)^2}$. Proto dosazením do (PV) máme:

$$(x_0 - 4)^2 + (y_0 - 6)^2 = 50 - 10$$

a po úpravě

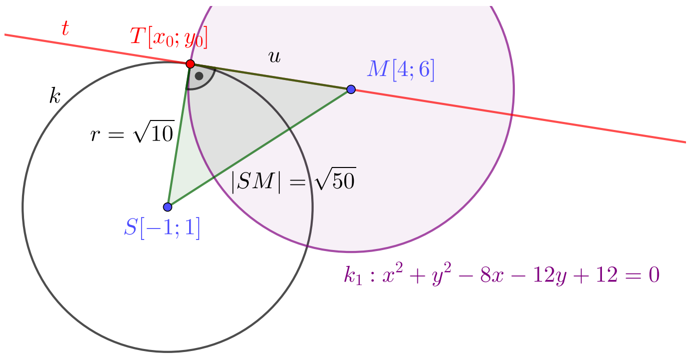
$$\underline{\underline{x_0^2 + y_0^2 - 8x_0 - 12y_0 + 12 = 0}} \qquad \text{(c)}$$

- Druhá podmínka bude stejná jako v řešení a), tedy T leží na k. Odtud získáme již odvozenou rovnici

$$\underline{\underline{x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 2y_0 - 8 = 0}} \qquad \text{(b)}$$

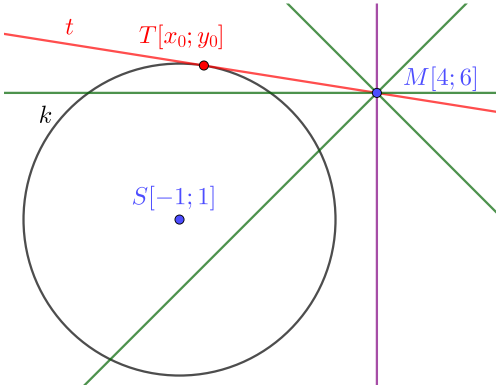
Vyřeším soustavu (c) a (b) a dostanu stejné řešení jako v a).

Poznámka: Když se nad tím zamyslíme, tak jsme hledali bod T takový, aby jeho vzdálenost od bodu M byla rovna číslu u, které jsme vyjádřili pomocí **Pýthagorovy věty**. Množina všech bodů v rovině, které mají od M vzdálenost u, je kružnice k_1 (viz obr. níže). Proto rovnice (c) je rovnicí kružnice k_1, do které je za x dosazeno x_0 a za y je dosazeno y_0.



c) **Svazek přímek:** Bodem M prochází nekonečně mnoho přímek (svazek přímek) a tyto přímky nemají s kružnicí k žádný společný bod (vnější přímka), nebo mají dva společné body (sečna), nebo mají jeden společný bod (tečna – tu hledáme) (viz obr. níže).

Chceme najít v tomto svazku takovou přímku, která má s kružnicí **jediný společný bod**. (To algebraicky znamená, že budu požadovat nulový diskroš – uvidíme to za chvíli.)



V obrázku jsou všechny přímky svazku zelené až na jednu – kolmou k ose x – která je obarvena fialově. Je to proto, že zelené přímky se dají vyjádřit ve **směrnicovém tvaru**, kdežto fialová ne (má rovnici $x = 4$).

- **Fialová:** Hledám jednobodový průnik s k. Řeším soustavu

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 10 \qquad \text{(kružnice)}$$
$$x = 4 \qquad \text{(fialová přímka)}$$
$$- - - - - - - - - - - - - - - - - -$$
$$(4+1)^2 + (y-1)^2 = 10$$
$$(y-1)^2 = 10 - 25 < 0$$

  Řešení neexistuje.

- **Zelené:** Mohu je vyjádřit ve tvaru

$$(y - y_M) = k \cdot (x - x_M), \;\; k \in \mathbb{R}$$

  Tedy

$$(y-6) = k(x-4)$$

$$y = k(x-4)+6 \tag{d}$$

Řeším tedy soustavu

$$\begin{aligned}
&(x+1)^2+(y-1)^2 = 10 && \text{(kružnice)}\\
&y = k(x-4)+6 && \text{(zelená přímka)}
\end{aligned}$$

$$- -$$

Do první rovnice frknu druhou:

$$(x+1)^2+[k(x-4)+5]^2 = 10$$

To je kvadratická rovnice pro neznámou x s parametrem k, přičemž můj požadavek je, aby průnik přímky s kružnicí byl **jednobodový**. Proto hledám k tak, aby byl **diskroš nulový**.
Po pár úpravách dostanu KVARO ve tvaru

$$ax^2+bx+c=0$$

kde

$$\begin{aligned}
a &= 1+k^2\\
b &= (-8k^2+10k+2)\\
c &= (16k^2-40k+16)
\end{aligned}$$

Požaduji $D = b^2-4ac = 0$, tedy

$$(-8k^2+10k+2)^2-4(1+k^2)(16k^2-40k+16) = 0$$

Po pár nechutných úpravách dostanu kvadratickou rovnici pro k:

$$3k^2-10k+3=0$$

Ta má kořeny $k = \frac{1}{3}$ a $k' = 3$.
Tím dostanu dle (d) pro $k = \frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned} t' : y &= \frac{1}{3}(x-4)+6 = \\ &= \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} + 6 = \\ &= \frac{1}{3}x - \frac{14}{3} \\ t' : y &= \underline{\underline{x - 3y - 14 = 0}} \end{aligned}$$

a pro $k' = 3$:

$$\begin{aligned} t' : y &= 3(x-4)+6 = \\ &= 3x - 6 \\ t' : y &= \underline{\underline{3x - y - 6 = 0}} \end{aligned}$$

Poznámka: Tohle řešení má dobrou myšlenku, ale technické provedení je dosti hrozné.

8 Cvičení 2

Zadání cv. 6: Boček 5.19/b) **Řešení ⇒**

Napiš rovnici kružnice, která má střed $S[5;4]$ a její tečnou je přímka $t: 5x - 12y - 29 = 0$.

Zadání cv. 7: Boček 5.19/c (úloha *Bpp*)) **Řešení ⇒**

Napiš rovnici kružnice, která prochází bodem $M[2;4]$ a jejími tečnami jsou souřadné osy.

Zadání cv. 8: Apolloniova úloha *Bpp* **Řešení ⇒**

Napiš rovnici kružnice, která prochází bodem $M[5;5]$ a dotýká se přímek $p: x + 3 = 0$ a $q: 3x - 4y - 3 = 0$.

Zadání cv. 9: Sevřená kružnice **Řešení ⇒**

Najdi kružnici s poloměrem $r = 1$, která je sevřena osou prvního kvadrantu a kladnou poloosou x.
Američtí i sovětští vědci se shodují na tom, že tato úloha je řešitelná **právě sedmero** způsoby, což se zdá zcela fantasmagorické! Pro inspiraci si k jejich hledání můžeš pustit vod Oldy Sedm havranů: `https://youtu.be/HfvHm2s24qg`

Zadání cv. 10: Vepsaná kružnice **Řešení ⇒**

Najdi kružnici vepsanou trojúhelníku ABC, jestliže $A[-13;-2]$, $B[-12;-2]$, $C[3;10]$.

Zadání cv. 11: Vepsaná kružnice podruhé

Řešení ⇒

Najdi kružnici vepsanou trojúhelníku ABC, jestliže $A[0;0]$, $B[6;0]$, $C[3;4]$.

Zadání cv. 12: Vepsaná kružnice potřetí

Řešení ⇒

Najdi kružnici vepsanou rovnostrannému ΔABC se základnou na ose x a vrcholem proti základně $C[0;6]$.

Zadání cv. 13: Čtyřúhelník

Řešení ⇒

Je dána kružnice $k(S,r), S[0;-3], r=5$. Urči obsah čtyřúhelníka $ABCD$, který vymezí tečny ke kružnici k v bodech, kde kružnici k protínají souřadnicové osy.

Zadání cv. 14: Opět Apolloniova úloha *Bpp*

Řešení ⇒

Najdi rovnici kružnice, která prochází bodem $M[2;0]$ a dotýká se přímek $p: y = 2x + 1$ a $q: y = 0,5x - 2$.

Zadání cv. 15: Petačka 125/21 (Apoll. *Bpp*)

Řešení ⇒

Najdi kružnici, která prochází $M[1;1]$ a dotýká se přímek $p: x + y - 6 = 0$ a $q: x + y + 2 = 0$.

9 Řešení cvičení 2

Řešení příkladu 6: Boček 5.19/b)

Zadání ⇒

Napiš rovnici kružnice, která má střed $S[5;4]$ a její tečnou je přímka $t: 5x - 12y - 29 = 0$.

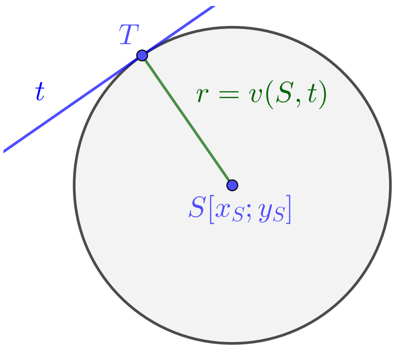
Výsledek:

Řešení:

Příklad je snadný, pokud si uvědomíme, že:

- vzdálenost středu kružnice S od tečny t je rovna poloměru r (viz obrázek níže):

$$\boxed{v(S,t) = r} \tag{a}$$



- vzorec pro vzdálenost bodu $S[x_S; y_S]$ od přímky

$t : ax + by + c = 0$ je (to musíš znát, woe)

$$\boxed{v(S,t) = \frac{|ax_S + by_S + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}} \tag{b}$$

Z (a) a (b) dostáváme

$$r = \frac{|ax_S + by_S + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
$$r = \frac{|5 \cdot 5 - 12 \cdot 4 - 29|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = 4$$

Protože známe střed i poloměr kružnice, můžeme rovnou psát její rovnici:

$$\underline{\underline{k : (x-5)^2 + (y-4)^2 = 16}}$$

Řešení příkladu 7: Boček 5.19/c (úloha *Bpp*) Zadání ⇒

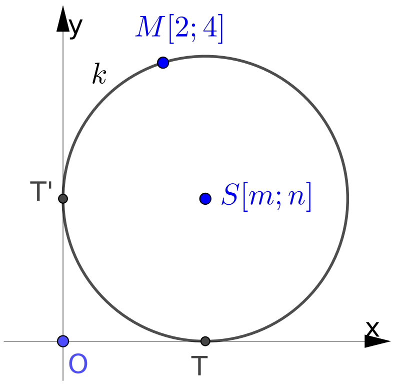
Napiš rovnici kružnice, která prochází bodem $M[2;4]$ a jejími tečnami jsou souřadné osy.

Výsledek:

$$k_1 : (x-2)^2+(y-2)^2 = 4, \quad k_2 : (x-10)^2+(y-10)^2 = 100$$

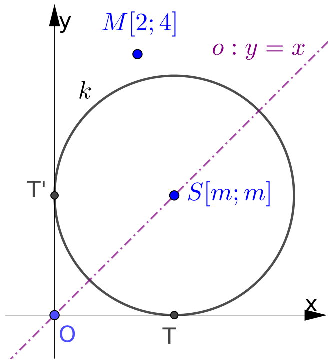
Řešení:

Načrtneme si vobrázek:



Uvědomíme si, že takové úlohy známe z planimetrie. Jedná se o jednu z klasických *Apolloniových úloh*[a] – hledáme kružnici, která prochází daným bodem a dotýká se dvou zadaných přímek (úloha ***Bpp***).
Konstrukčně se úloha řeší pomocí *stejnolehlosti* – udělá se jakákoli kružnice, která se dotýká obou přímek. Potom se stejnolehlostí zvětší či zmenší tak, aby současně procházela daným bodem.
Víme, že vyjdou dvě řešení.
Jak to uděláme **analyticky**? V podstatě úplně stejně.

- **Najdeme libovolnou kružnici, která se dotýká souřadných os.** Potřebujeme její střed a poloměr.
  - **Střed.** Máme-li vepsat kružnici mezi ramena nějakého úhlu, musí její střed ležet na ose tohoto úhlu. Zde je úhel tvořen souřadnými osami, proto leží střed $S[m;n]$ na ose úhlu, který svírají.



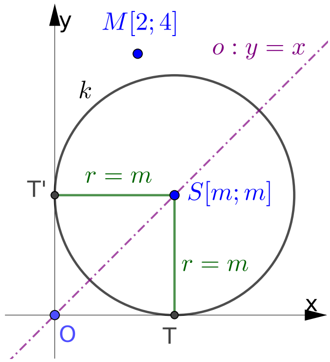
Pač M leží v prvním kvadrantu, tak i hledaná kružnice leží v prvním kvadrantu a osa prvního kvadrantu má zřejmě rovnici

$$o : y = x$$

Proto pro střed $S[m;n]$ hledané kružnice k platí $m = n$, takže střed je

$$\boxed{S[m;m]}$$

  - **Poloměr.** Poloměr hledané kružnice je zřejmě roven vzdálenosti jejího středu od ramen úhlu, do kterého je vepsána.



Ale z obrázku vidíme, že tato vzdálenost je rovna $x-$ové a $y-$ové souřadnici m středu, tedy:

$$\boxed{r = m}$$

Libovolná kružnice vepsaná do prvního kvadrantu má tedy střed $S[m;m]$ a poloměr m. Její rovnice je tedy

$$\boxed{k : (x - m)^2 + (y - m)^2 = m^2}$$

Všimněme si, že rovnice obsahuje *parametr* m, který ovlivňuje velikost kružnice. Měním-li m, kružnice se zvětšuje či zmenšuje, ale furt zůstává zapasována mezi ramena prvního kvadrantu!

- **Upravíme velikost kružnice k tak, aby procházela bodem** $M[2;4]$. To se šteluje pomocí parametru m. Stačí dosadit M do rovnice k a dostaneme rovnici pro výpočet štelovacího čísla m:

$$\begin{aligned} M: \quad & (2 - m)^2 + (4 - m)^2 = m^2 \\ & 4 - 4m + m^2 + 16 - 8m + m^2 = m^2 \end{aligned}$$

$$m^2 - 12m + 20 = 0$$
$$(m-2)(m-10) = 0$$

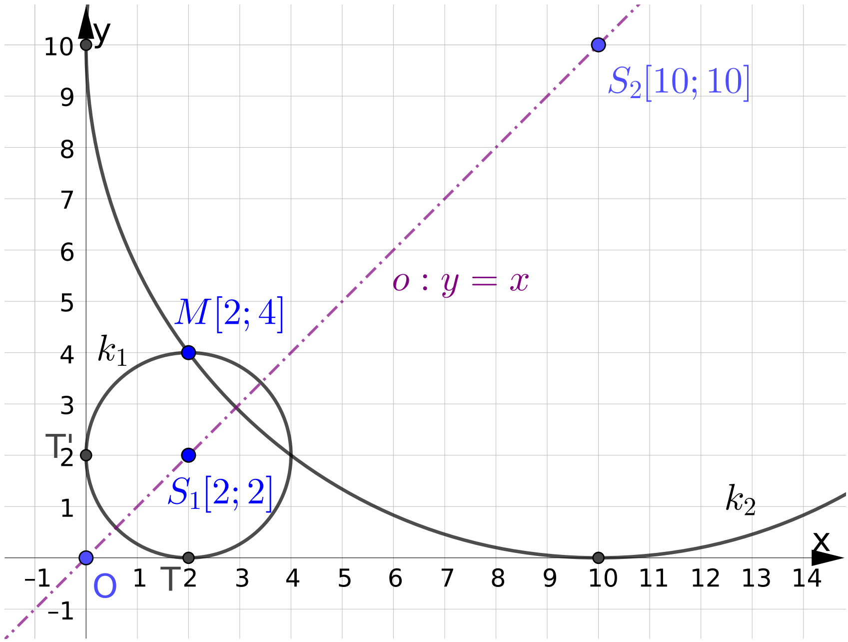
$$\boxed{m_1 = 2} \qquad \boxed{m_2 = 10}$$

Dostáváme dvě řešení

$$\boxed{k_1 : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4}$$

$$\boxed{k_2 : (x-10)^2 + (y-10)^2 = 100}$$

Kontrola v GeoGebře:



[a] https://www.geogebra.org/m/h5rHMprZ#chapter/8983

Řešení příkladu 8: Apolloniova úloha *Bpp* Zadání ⇒

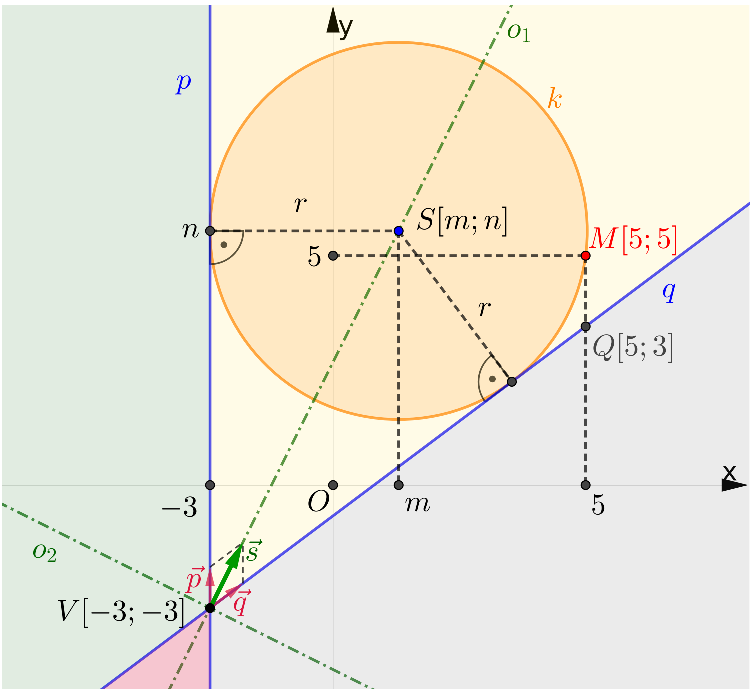
Napiš rovnici kružnice, která prochází bodem $M[5;5]$ a dotýká se přímek $p : x+3=0$ a $q : 3x-4y-3=0$.

Výsledek:

$$k_1 : (x-1)^2+(y-5)^2=16, \quad k_2 : (x-5)^2+(y-13)^2=64$$

Řešení:

Opět se jedná o Apolloniovu úlohu jako ve Cvičení 7 a budeme postupovat úplně analogicky. Načrtneme si vobrázek:



Nejprve souřadné osy. Pak pokud možno věrně přímky p a q, které dělí rovinu na 4 úhly (žlutý, zelený, červený a šedý).
Je vhodné si spočítat jejich průsečík V. Zjistíme, že je $V[-3;3]$.
Přímka p je rovnoběžná s osou y a prochází bodem $[-3;0]$.
Přímka q prochází bodem V a ještě si spočítáme nějaký další její bod. Vhodný je bod Q, jehož x-ová souřadnice je stejná jako x-ová souřadnice bodu M, tedy $x = 5$. Vychází $Q[5;3]$.
Udělali jsme to proto, že vidíme, že bod M leží nad bodem Q a víme tedy, že leží ve **žlutém úhlu**. Proto víme, že kružnici budeme hledat ve žlutém úhlu.

- **Najdeme libovolnou kružnici, která se dotýká přímek p a q.** Potřebujeme její střed a poloměr.
    - **Střed.** Protože kružnice leží ve žlutém úhlu, musí i její střed $S[m;n]$ ležet ve žlutém úhlu na ose úhlu o_1.
    Najdeme tedy rovnici osy o_1. Známe její bod V. Potřebujeme ještě její směrák $\vec{s}$. To umíme – stačí vzít **jednotkové** směráky $\vec{p}$ a $\vec{q}$ přímek p a q a sečíst je (viz obr.).
    Z obrázku je zřejmé, že
    $$\vec{p} = (0;1)$$
    Normálový vektor přímky q je $(3;-4)$. Normálový vektor zkolmíme $\to (4;3)$ a máme směrák, která ale ještě není jednotkový. Jeho velikost je $\sqrt{9+16} = 5$. Jednotkový směrák přímky q je tedy
    $$\vec{q} = \left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$$
    Musíme nyní zkontrolovat jednu důležitou věc. Uvědomme si, že tento vektor míří opravdu „doprava a nahoru“, tedy tak, jak je zakreslen v obrázku, pač má **obě souřadnice kladné**.

Pokud bychom dostali vektor se zápornými souřadnicemi $\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$, mířil by „doleva a dolů“. Po sečtení s $\vec{p}$ bychom potom nedostali směrák osy o_1, ale o_2! Když by tedy vyšlo $\vec{q} = \left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$, bylo by nutné vektoru změnit orientaci a vynásobit ho číslem -1!
Našli jsme tedy jednotkové vektory přímek p a q a směrák osy o_1 je

$$\vec{s} = \vec{p} + \vec{q} = (0; 1) + \left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{4}{5}; \frac{8}{5}\right)$$

Přejdeme samolitr k jeho vhodnému násobku $(1; 2)$ a zkolmíme ho, abychom dostali normálový vektor přímky o_1:

$$(2; -1)$$

Obecná rovnice o_1 je tedy

$$\begin{aligned} 2x - y + c &= 0 \\ V[-3; -3] : -6 + 3 + c &= 0 \\ c &= 3 \\ o_1 : 2x - y + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Protože střed $S[m; n]$ leží na této ose, musí pro jeho souřadnice platit:

$$\begin{aligned} 2m - n + 3 &= 0 \\ n &= 2m + 3 \end{aligned}$$

Pročež střed hledané kružnice je

$$\boxed{S[m; 2m + 3]}$$

► **Poloměr.** Poloměr je roven vzdálenosti středu S od přímky p nebo q. Vybereme si p, pač je ve speciální poloze. V obrázku pěkně vidíme, že vzd. S od p je rovna vzdálenosti čísla m od čísla 3 na číselné ose x. A ta se počítá jako **absolutní hodnota jejich rozdílu**:

$$\boxed{r = |m + 3|}$$

(Tuto vzdálenost bychom mohli také spočítat podle vzorce pro vzdálenost bodu od přímky.)

Libovolná kružnice vepsaná do žlutého úhlu má tedy střed $S[m; 2m + 3]$ a poloměr $r = |m + 3|$. Její rovnice je tedy

$$\boxed{k : (x - m)^2 + (y - 2m - 3)^2 = (m + 3)^2}$$

- **Naštelujeme velikost kružnice k tak, aby procházela bodem** $M[5; 5]$. To se šteluje pomocí parametru m. Stačí dosadit M do rovnice k a dostaneme rovnici pro výpočet čísla m:

$$\begin{aligned}
(5 - m)^2 + (2 - 2m)^2 &= (m + 3)^2 \\
25 - 10m + m^2 + 4 - 8m + 4m^2 &= m^2 + 6m + 9 \\
4m^2 - 24m + 20 &= 0 \\
m^2 - 6m + 5 &= 0 \\
(m - 1)(m - 5) &= 0
\end{aligned}$$

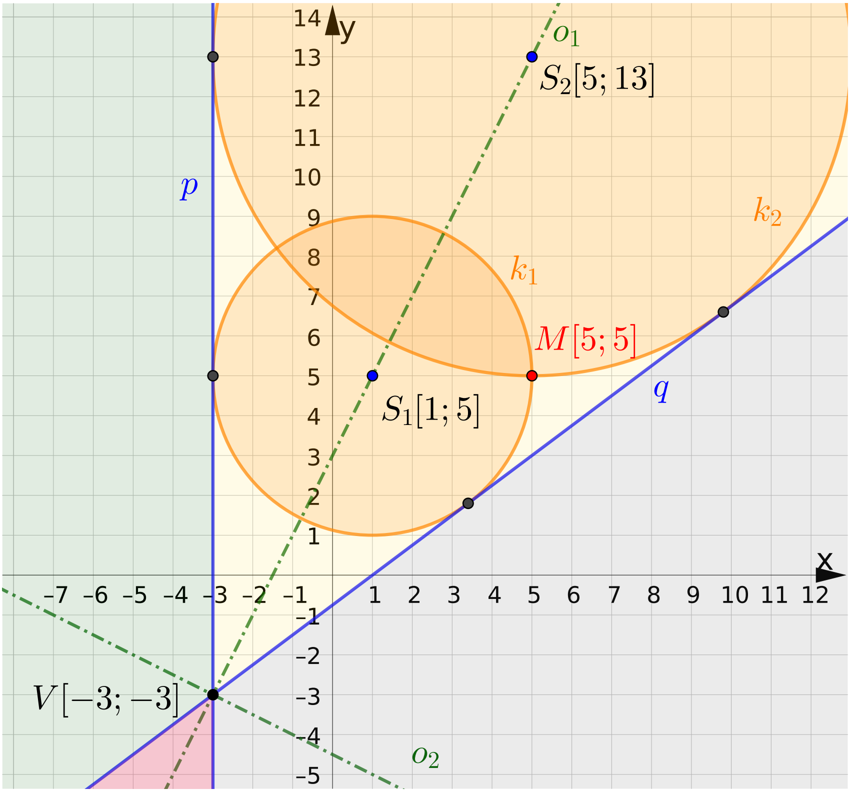
$$\boxed{m_1 = 1 \; n_1 = 5 \; r_1 = 4} \qquad \boxed{m_2 = 5 \; n_2 = 13 \; r_2 = 8}$$

Dostáváme dvě řešení

$$\boxed{k_1 : (x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 16}$$

$$k_2 : (x-5)^2 + (y-13)^2 = 64$$

Kontrola v GeoGebře:



Řešení příkladu 9: Sevřená kružnice

Zadání ⇒

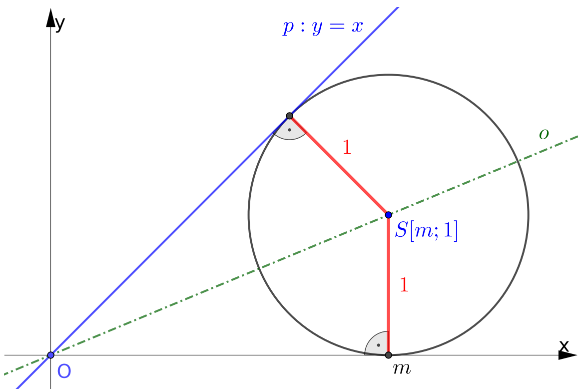
Najdi kružnici s poloměrem $r = 1$, která je sevřena osou prvního kvadrantu a kladnou poloosou x.
Američtí i sovětští vědci se shodují na tom, že tato úloha je řešitelná **právě sedmero** způsoby, což se zdá zcela fantasmagorické! Pro inspiraci si k jejich hledání můžeš pustit vod Oldy Sedm havranů: https://youtu.be/HfvHm2s24qg

Výsledek:

$$k : (x - \sqrt{2} - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

Rozbor:

- znám poloměr, hledám S
- ze zadání plyne, že znám také y-ovou souřadnici středu $\rightarrow S[m; 1] \rightarrow$ **hledám** m.

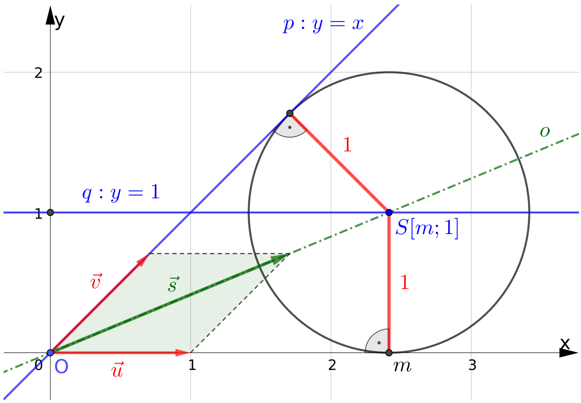


Havran 1 – Jako v konstrukční úloze:

Konstrukčně bych to dělal takto:

- Bod S leží na ose úhlu o a zároveň na přímce q rovnoběžné s osou x ve vzdálenosti 1. Proto S je průsečík přímek o a q:

$$\boxed{S = o \cap q} \tag{a}$$



- Přímka q má zřejmě rovnici

$$\boxed{q : y = 1} \tag{b}$$

- Stejným postupem jako ve Cvičení 8 najdeme rovnici osy o:
  - Jednotkový směrák $\vec{u} = (1; 0)$.
  - Jednotkový směrák $\vec{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$. (Má-li čtverec jednotkovou úhlopříčku, potom má stranu $\frac{1}{\sqrt{2}}$.)
  - Směrák osy o je $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
  - Přejdu ke směráku $\sqrt{2}\times$ většímu $\to (\sqrt{2} + 1; 1)$.
  - Zkolmím ho a mám normálový vektor osy $\vec{n} = (-1; \sqrt{2} + 1)$.

⬠ Rovnice osy (prochází počátkem, takže $c = 0$):

$$\boxed{o : -x + (\sqrt{2} + 1)y = 0} \tag{c}$$

- Dle (a) dosadíme (b) do (c) a máme bod $S[m; 1]$:

$$\begin{aligned} -x + \sqrt{2} + 1 &= 0 \\ x &= \sqrt{2} + 1 \\ m &= \sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

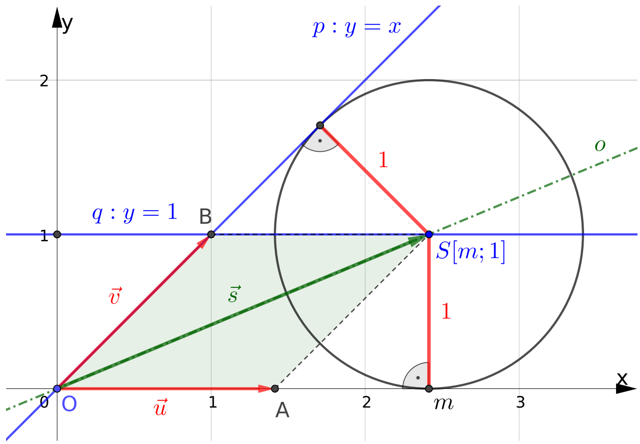
$$\boxed{S[\sqrt{2} + 1; 1]}$$

- Rovnice kružnice je tedy

$$\boxed{k : (x - \sqrt{2} - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1}$$

Havran 2 – Přímo na střed:

Inspirováni zeleným kosočtvercem z předchozího řešení můžeme zaútočit rovnou na střed (viz obr.):



Zelený kosočtverec zvětšíme na $OASB$. Potom zřejmě

$$\boxed{S = O + \vec{s}}$$

Přitom

- $\vec{v} = (1; 1)$ (úhlopříčka v jednotkovém čtverci)
- $\vec{u} = (\sqrt{2}; 0)$ (je to kosočtverec, tedy $u = v$)
- $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} = (1 + \sqrt{2}; 1)$
- $S = O + \vec{s} = [0; 0] + (1 + \sqrt{2}; 1) = [1 + \sqrt{2}; 1]$
- Rovnice kružnice je tedy

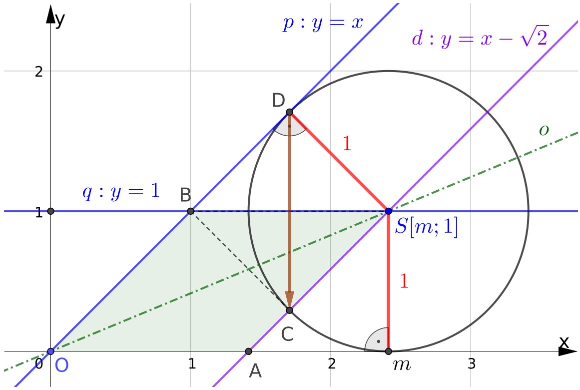
$$\boxed{k : (x - \sqrt{2} - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1}$$

Havran 3 – Chytřejší konstrukční řešení než Řešení 1:

Opět se poučíme z předchozího řešení a uvědomíme si:

- Bod S můžeme konstrukčně také dostat jako průsečík přímky q nikoli s osou o, ale s přímkou d (viz obr.), která je rovnoběžná s přímkou p ve vzdálenosti 1:

$$\boxed{S = d \cap q} \tag{d}$$



- Přímka q má rovnici

$$\boxed{q : y = 1} \tag{e}$$

- Přímka d vznikne posunutím přímky $p : y = x$ dolů o vzdálenost DC (viz obr.). Z obrázku vidíme, že DC je úhlopříčka v jednotkovém čtverci $CSDB$, pročež $DC = \sqrt{2}$ a rovnice přímky d je proto

$$\boxed{d : y = x - \sqrt{2}} \tag{f}$$

- Dle (d) dosadíme (e) do (f) a máme bod $S[m; 1]$:

$$1 = x - \sqrt{2}$$
$$x = \sqrt{2} + 1$$

$$m = \sqrt{2} + 1$$

$$\boxed{S[\sqrt{2} + 1; 1]}$$

- Rovnice kružnice je tedy

$$\boxed{k : (x - \sqrt{2} - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1}$$

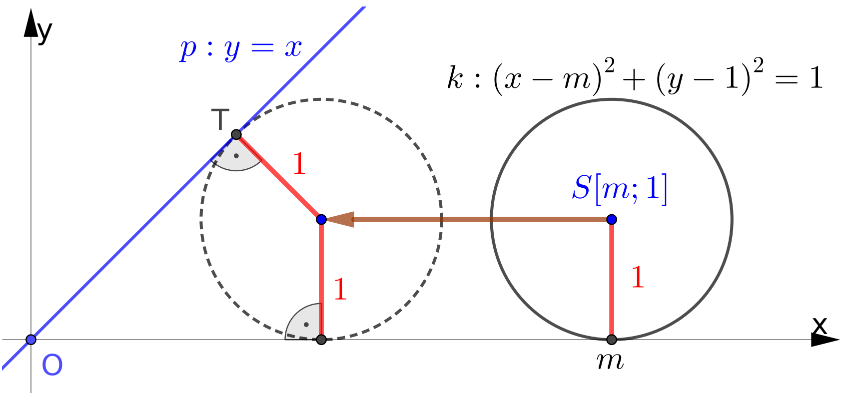
Havran 4 – Dynamické řešení:

Vezmu jakoukoli jednotkovou kružnici, která se dotýká osy x a posunu ji tak, aby se dotkla osy prvního kvadrantu p (viz obr.). Jinak řečeno hledám jednobodový průnik kružnice

$$\boxed{k : (x - m)^2 + (y - 1)^2 = 1} \tag{g}$$

s přímkou

$$\boxed{p : y = x} \tag{h}$$



Dosadím tedy (h) do (g):

$$\begin{aligned}(x-m)^2+(x-1)^2&=1\\ x^2-2mx+m^2+x^2-2x+1&=1\\ 2x^2+(-2m-2)x+m^2&=0\end{aligned}$$

Mám KVARO s neznámou x a parametrem m a požaduji **nulový diskroš**:

$$\begin{aligned}D=(-2m-2)^2-8m^2&\overset{!}{=}0\\ 4m^2+8m+4-8m^2&=0\\ 4m^2-8m-4&=0\\ m^2-2m-1&=0\\ &\dots\\ m&=1\pm\sqrt{2}\end{aligned}$$

Pač kružnice leží v prvním kvadrantu, je $m>0$, takže vezmu jen kladný z kořenů

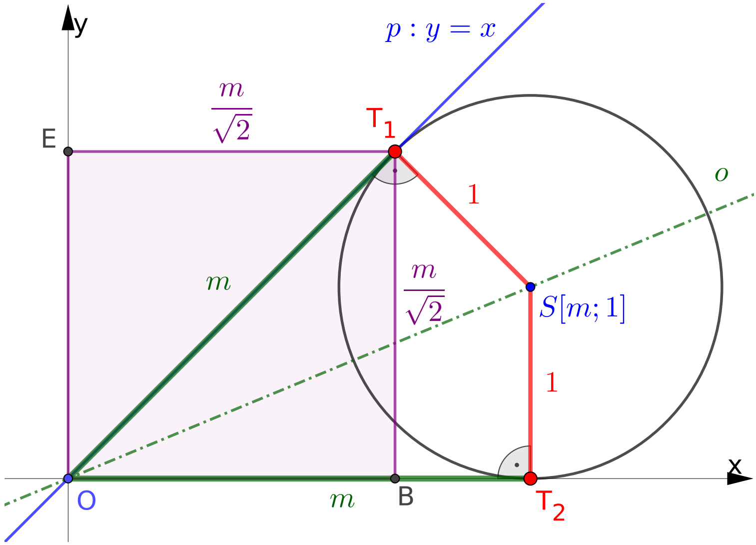
$$\boxed{m=1+\sqrt{2}} \tag{i}$$

A po dosazení (i) do (g) dostávám rovnici kružnice:

$$\boxed{k:(x-\sqrt{2}-1)^2+(y-1)^2=1}$$

Havran 5 – Magické dotykáče:

Povšimněme si dotykáčů T_1 a T_2 (viz obr.).



Zřejmě platí $OT_2 = OT_1 = m$. Pač T_1 leží na ose kvadrantu, má obě souřadnice shodné a OBT_1E je čtverec s úhlopříčkou m. Proto je strana čtverce $\frac{m}{\sqrt{2}}$ a souřadnice T_1 jsou

$$\boxed{T_1\left[\frac{m}{\sqrt{2}}; \frac{m}{\sqrt{2}}\right]} \tag{j}$$

Ale bod T_1 leží na hledané kružnici k

$$\boxed{k : (x-m)^2 + (y-1)^2 = 1} \tag{k}$$

Prdněmež (j) do (k):

$$\left(\frac{m}{\sqrt{2}} - m\right)^2 + \left(\frac{m}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 = 1$$

$$\frac{m^2}{2} - \frac{2m^2}{\sqrt{2}} + m^2 + \frac{m^2}{2} - \frac{2m}{\sqrt{2}} + \cancel{1} = \cancel{1}$$

$$2m^2 - \frac{2m}{\sqrt{2}}(m+1) = 0 \;\Big|\; \cdot \frac{\sqrt{2}}{2m} \; (m \neq 0)$$

$$\sqrt{2}m - (m+1) = 0$$

$$\sqrt{2}m - m = 1$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

Po rozšíření:

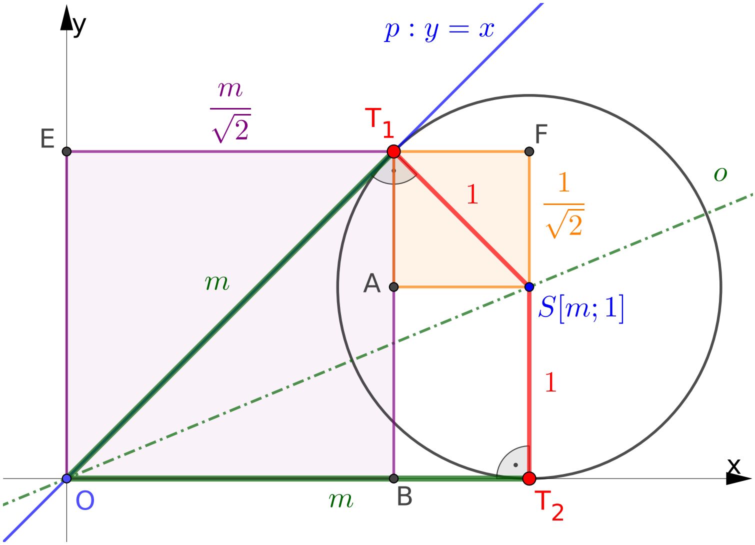
$$\boxed{m = \sqrt{2} + 1} \tag{l}$$

A po dosazení (l) do (k) dostávám rovnici kružnice:

$$\boxed{k : (x - \sqrt{2} - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1}$$

Havran 6 – Dva čtverce:

K fialovému čtverci z předchozího řešení doplníme oranžový čtverec $ASFT_1$ (viz obr.).



Vidíme, že

$$m = OT_2$$
$$m = OB + AS$$
$$m = \frac{m}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\sqrt{2}m = m + 1$$
$$m(\sqrt{2} - 1) = 1$$
$$m = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$$

Po rozšíření:

$$\boxed{m = \sqrt{2} + 1} \qquad \text{(m)}$$

Hledaná kružnice má rovnici

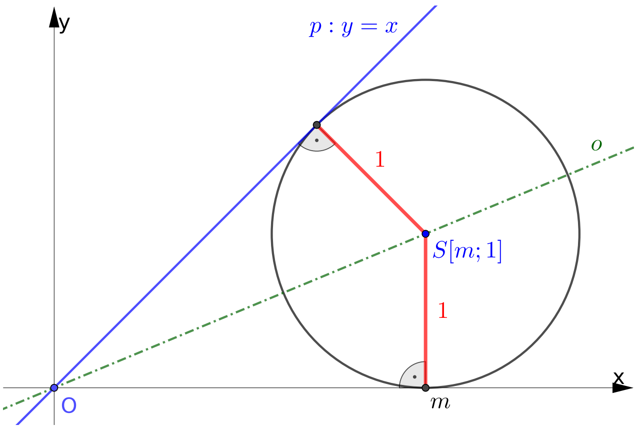
$$\boxed{k : (x-m)^2 + (y-1)^2 = 1} \tag{n}$$

A po dosazení (m) do (n) dostávám rovnici kružnice:

$$\boxed{k : (x-\sqrt{2}-1)^2 + (y-1)^2 = 1}$$

Havran 7 – Svižný vzorec:

Toto bude (ale jen díky speciálnímu jednoduchému zadání) nejrychlejší řešení.



Vím, že vzdálenost $S[m;1]$ od přímky $p : x - y = 0$ je 1:

$$\boxed{v(S;p) = 1}$$

Dle vzorce pro vzdálenost bodu od přímky tedy platí:

$$\frac{|m-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 1$$

$$|m-1| = \sqrt{2}$$
$$m-1 = \pm\sqrt{2}$$
$$m = 1 \pm \sqrt{2}$$

Pač $m > 0$, vezmu jen

$$\boxed{m = \sqrt{2} + 1} \qquad \text{(o)}$$

Hledaná kružnice má rovnici

$$\boxed{k : (x-m)^2 + (y-1)^2 = 1} \qquad \text{(p)}$$

A po dosazení (o) do (p) dostávám rovnici kružnice:

$$\boxed{k : (x-\sqrt{2}-1)^2 + (y-1)^2 = 1}$$

Řešení příkladu 10: Vepsaná kružnice

Zadání ⇒

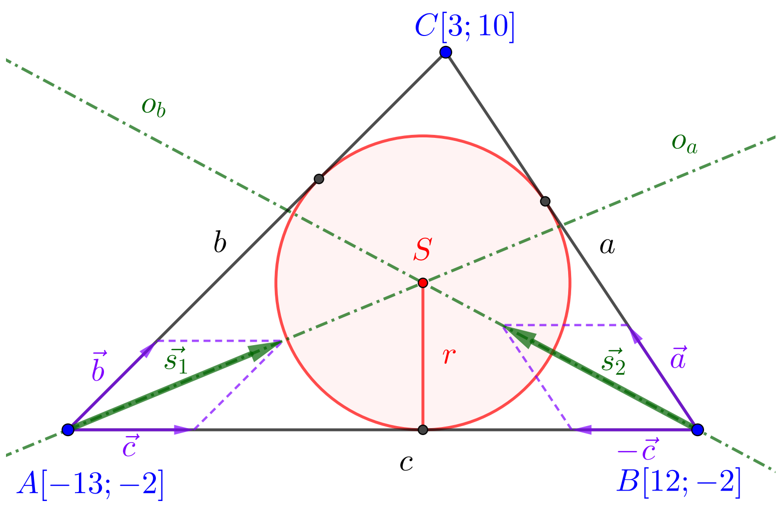
Najdi kružnici vepsanou trojúhelníku ABC, jestliže $A[-13;-2]$, $B[12;-2]$, $C[3;10]$.

Výsledek:

$$k : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

Řešení:

Nejprve hledáme střed S jakožto průsečík os úhlů – stačí nám dvě osy. Osu úhlu umíme najít pomocí **jednotkových vektorů** jeho ramen.
Načrtneme si pokud možno reálný obrázek. Přitom si všimneme, že body A a B mají stejnou y-ovou souřadnici, takže strana $c = AB$ je rovnoběžná s osou x a jednotkový směrák strany c je tudíž $\vec{c} = (1;0)$. Proto bude vhodné pracovat s osami o_a a o_b.



- **Osa** o_a.
  - jednotkový vektor strany c je $\vec{c} = (1;0)$
  - jednotkový vektor strany b je $\vec{b} = \dfrac{C-A}{|C-A|} = \dfrac{(16;12)}{\sqrt{16^2+12^2}} = \dfrac{(16;12)}{20} = \dfrac{(4;3)}{5} = \left(\dfrac{4}{5};\dfrac{3}{5}\right)$
  - směrák osy o_a je $\vec{s_1} = \vec{b}+\vec{c} = (1;0)+\left(\dfrac{4}{5};\dfrac{3}{5}\right) = \left(\dfrac{9}{5};\dfrac{3}{5}\right)$
  - přejdu ke směráku $(3;1)$
  - normálový vektor osy je $(1;-3)$
  - rovnice osy o_a:

$$\begin{aligned} x-3y+c &= 0 \\ A:\ -13+6+c &= 0 \\ c &= 7 \end{aligned}$$

$$\boxed{o_a : x-3y+7=0} \tag{a}$$

- **Osa** o_b.
  - jednotkový vektor strany c je $-\vec{c} = -(1;0)$
  - jednotkový vektor strany a je $\vec{a} = \dfrac{C-B}{|C-B|} = \dfrac{(-9;12)}{\sqrt{81+144}} = \dfrac{(-9;12)}{15} = \dfrac{(-3;4)}{5} = \left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5}\right)$
  - směrák osy o_b je $\vec{s_2} = \vec{a}-\vec{c} = \left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5}\right) - (1;0) = \left(-\dfrac{8}{5};\dfrac{4}{5}\right)$
  - přejdu ke směráku $(-2;1)$
  - normálový vektor osy je $(1;2)$
  - rovnice osy o_b:

$$x+2y+c=0$$

$$\begin{aligned} B:\ 12 - 4 + c &= 0 \\ c &= -8 \end{aligned}$$

$$\boxed{o_b : x + 2y - 8 = 0} \tag{b}$$

- **Střed** $S = o_a \cap o_b$.
  Řeším soustavu (a) a (b). Z (a) vyjádříme
  $$x = 3y - 7$$
  a frkneme to do (b)
  $$\begin{aligned} 3y - 7 + 2y - 8 &= 0 \\ 5y &= 15 \\ y = 3 \rightarrow\ x &= 2 \end{aligned}$$
  Střed je tedy
  $$\boxed{S[2; 3]}$$
- **Poloměr** r.
  Poloměr je roven vzdálenosti S od přímky AB. Ale pač je to rovnoběžka s osou x a y-ová souřadnice bodů A, B je -2, má rovnici $y = -2$. Bod S má y-ovou souřadnici 3, takže vidíme, že poloměr je
  $$\boxed{r = 5}$$
  Pokud bychom vzali poloměr jako vzdálenost S od přímek AC nebo BC, museli bychom použít vzorec pro vzdálenost bodu od přímky.

Rovnice vepsané kružnice je

$$\boxed{k : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25}$$

Řešení příkladu 11: Vepsaná kružnice podruhé Zadání ⇒

Najdi kružnici vepsanou trojúhelníku ABC, jestliže $A[0;0]$, $B[6;0]$, $C[3;4]$.

Výsledek:

$$\boxed{k : (x-3)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}}$$

Řešení 1:

Postup stejný jako ve Cvičení 10.

$$\boxed{o_a : x - 2y = 0}$$

$$\boxed{o_b : x + 2y - 6 = 0}$$

$$\boxed{S\left[3; \frac{3}{2}\right]}$$

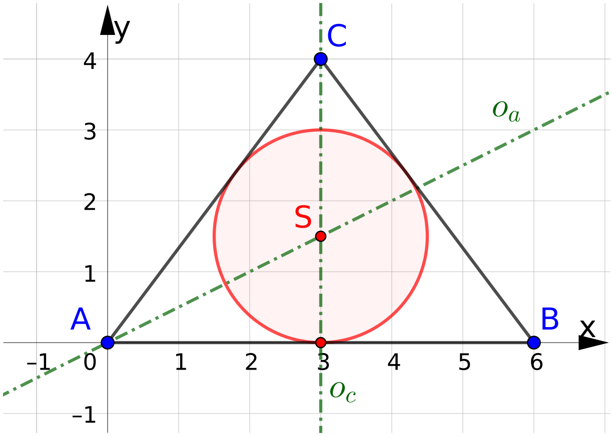
$$\boxed{k : (x-3)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}}$$

Řešení 2:

Pokud si uděláme pořádnej vobrázek, zjistíme, že ΔABC je rovnoramenný a že je výhodnější použít místo osy o_b osu o_c, jejíž rovnice je zřejmě

$$\boxed{o_c : x = 3}$$

Osu o_a použijeme z Řešení 1 a další postup je obdobný.



Řešení příkladu 12: Vepsaná kružnice potřetí Zadání ⇒

Najdi kružnici vepsanou rovnostrannému ΔABC se základnou na ose x a vrcholem proti základně $C[0;6]$.

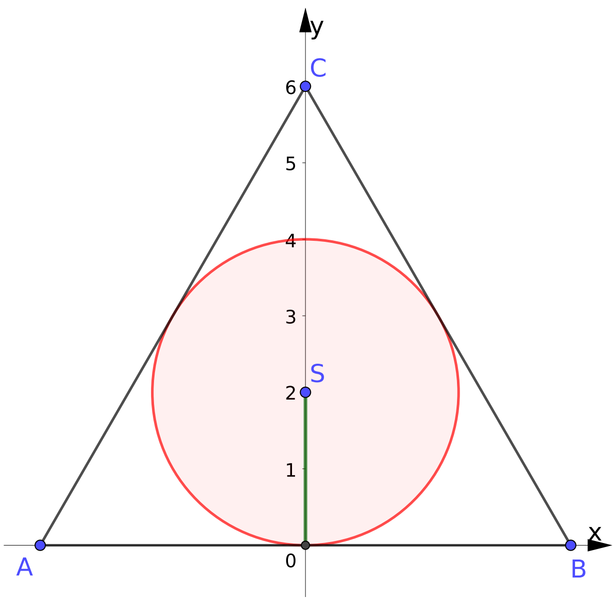
Výsledek:

$$k : x^2 + (y-2)^2 = 4$$

Řešení:

Rovnostranný $\rightarrow S = T \rightarrow r = \frac{1}{3}v = \frac{6}{3} = 2 \rightarrow S[0;2]$

$$\boxed{k : x^2 + (y-2)^2 = 4}$$



Řešení příkladu 13: Čtyřúhelník

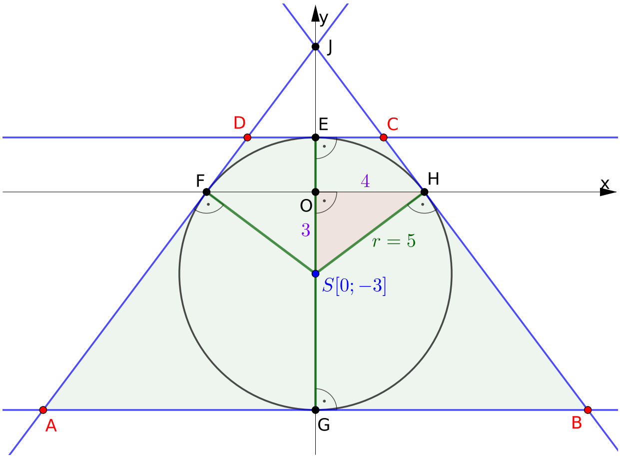
Zadání ⇒

Je dána kružnice $k(S, r)$, $S[0; -3]$, $r = 5$. Urči obsah čtyřúhelníka $ABCD$, který vymezí tečny ke kružnici k v bodech, kde kružnici k protínají souřadnicové osy.

Výsledek:

$S = 125$

Řešení:



Vzhledem k symetričnosti zadání se jedná o lichoběžník. Obsah lichoběžníku je dán vztahem

$$S = \text{aritmetický průměr základen} \times \text{výška}$$

Zde tedy

$$S = \frac{AB + DC}{2} \cdot EG \tag{a}$$

Přitom $EG = 10$. Musíme tedy zjistit velikosti úseček AB, DC.

Řešení planimetrické: Uvědomíme si, že délky stran ΔOSH tvoří *pýthagorejskou trojici* $3, 4, 5$ a že tento trojúhelník je podobný s trojúhelníky $\Delta HSJ, \Delta ECJ, \Delta GBJ$, takže (po úpravách) dostaneme

$$\begin{aligned}
\Delta OSH \sim \Delta HSJ &\rightarrow\ SJ = \frac{25}{3} \rightarrow\ JE = SJ - 5 = \frac{10}{3}\\
\Delta OSH \sim \Delta ECJ &\rightarrow\ EC = \frac{5}{2} \rightarrow\ \underline{\underline{DC = 5}}\\
\Delta OSH \sim \Delta GBJ &\rightarrow\ GB = 10 \rightarrow\ \underline{\underline{AB = 20}}
\end{aligned}$$

Po dosazení do (a) dostáváme

$$\boxed{S = 125}$$

Řešení analytické: Najdeme souřadnice bodů $ABCD$ jakožto průsečíků tečen tvořících strany lichoběžníku a z nich zjistíme neznámé AB a DC.
Rovnice kružnice k je zřejmě

$$k : x^2 + (y + 3)^2 = 25$$

Určíme její průsečíky s osami x a y:

$$\begin{aligned}
y = 0 &\rightarrow\ x^2 = 16 \rightarrow\ x = \pm 4\\
x = 0 &\rightarrow\ y + 3 = \pm 5 \rightarrow\ y = 2 \vee y = -8
\end{aligned}$$

Odtud máme souřadnice dotykáčů:

$$F[-4; 0], \quad H[4; 0], \quad E[0; 2], \quad G[0, -8]$$

Rovnice tečen DC a AB jsou zřejmé:

$$DC : \underline{\underline{y = 2}} \qquad AB : \underline{\underline{y = -8}}$$

Rovnice tečen AD a BC budou

$$xx_0 + (y+3)(y_0+3) = 25$$

Sem dosadíme dotykáče F a H:

$$\begin{aligned} F &: -4x + (y+3)(0+3) = 25 \\ AD &: \underline{\underline{4x - 3y + 16 = 0}} \\ H &: 4x + (y+3)(0+3) = 25 \\ BC &: \underline{\underline{4x + 3y - 16 = 0}} \end{aligned}$$

Spočítáme průsečíky tečen:

$$\begin{aligned} A = AB \cap AD : \quad & 4x + 24 + 16 = 0 \\ & x = -10 \\ & A[-10; -8] \\ \text{ze symetrie} \rightarrow \quad & B[10; -8] \\ D = DC \cap AD : \quad & 4x - 6 + 16 = 0 \\ & x = -\frac{5}{2} \\ & D\left[-\frac{5}{2}; 2\right] \\ \text{ze symetrie} \rightarrow \quad & C\left[\frac{5}{2}; 2\right] \end{aligned}$$

Velikosti úseček AB a DC jsou zřejmě:

$$AB = 2 \cdot 10 = \underline{\underline{20}}$$

$$DC = 2 \cdot \frac{5}{2} = \underline{\underline{5}}$$

Po dosazení do (a) dostáváme

$$\boxed{S = 125}$$

Řešení příkladu 14: Opět Apoll. úloha *Bpp* Zadání ⇒

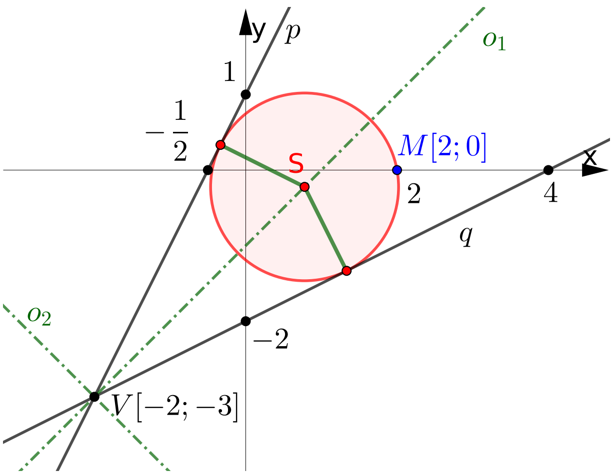
Najdi rovnici kružnice, která prochází bodem $M[2;0]$ a dotýká se přímek $p: y = 2x + 1$ a $q: y = 0,5x - 2$.

Výsledek:

$$k_1: \ (x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$$
$$k_2: \ \left(x - \frac{7}{9}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{9}\right)^2 = \frac{125}{81}$$

Řešení:

Nakreslíme si pořádnej vobrázek, u přímek p, q dopočítáme průsečíky s osami a dále souřadnice jejich průsečíku $V[-2;-3]$:



Z obrázku vidíme, do kterého z úhlů vymezeného přímkami p, q padne bod M, takže máme pracovat s osou o_1. Najdeme směráky přímek:

$$
\begin{aligned}
p: \quad & 2x - y + 1 = 0 \\
& \vec{n_p} = (2;-1) \to \ \vec{s_p} = \underline{\underline{(1;2)}} \\
q: \quad & 0,5x - y - 2 = 0 \\
& \vec{n_q} = (0,5;-1) \to \ \vec{s_q} = (1;0,5) \to \ \underline{\underline{(2;1)}}
\end{aligned}
$$

Vidíme, že oba směráky již mají stejnou velikost, takže je nemusíme dělit jejich velikostí. Sečtením dostáváme směrák osy:

$$\vec{s_p} + \vec{s_q} = (1;2) + (2;1) = (3;3) \to \ \underline{\underline{(1;1)}}$$

Vidíme, že tím, že má tento vektor obě souřadnice kladné, je to na betón směrák osy o_1 (také by mohly být obě záporné – viz smysl souřadnic vektoru – přemístění doprava/doleva a nahoru/dolů; kdežto směrák osy o_2 by měl souřadnice opačných znamének). Normálový vektor osy je $\vec{n} = (1;-1)$. Rovnice osy o_1 je tedy

$$
\begin{aligned}
o_1 &: x - y + c = 0 \\
V &: \ -2 + 3 + c = 0 \to \ c = -1 \\
o_1 &: \underline{\underline{x - y - 1 = 0}}
\end{aligned}
$$

Protože střed $S[m;n]$ leží na této ose, musí pro jeho souřadnice platit:

$$
\begin{aligned}
m - n - 1 &= 0 \\
n &= m - 1
\end{aligned}
$$

Pročež střed hledané kružnice je

$$\boxed{S[m;m-1]}$$

Poloměr hledané kružnice je vzdálenost středu S od např. přímky $p: 2x - y + 1$. Proto platí

$$r = \frac{|ax_S + by_S + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2m - (m-1) + 1|}{\sqrt{4+1}}$$

Odtud

$$\boxed{r = \frac{|m+2|}{\sqrt{5}}}$$

Naše kružnice má tedy rovnici:

$$(x-m)^2 + (y-m+1)^2 = \frac{(m+2)^2}{5}$$

Ale tato kružnice prochází bodem $M[2;0]$, takže po dosazení:

$$\begin{aligned}
&(2-m)^2 + (-m+1)^2 = \frac{(m+2)^2}{5} \\
&4 - 4m + m^2 + m^2 - 2m + 1 = \frac{m^2+4m+4}{5} \\
&5(2m^2 - 6m + 5) = m^2 + 4m + 4 \\
&10m^2 - 30m + 25 = m^2 + 4m + 4 \\
&\underline{\underline{9m^2 - 34m + 21 = 0}}
\end{aligned}$$

Kořeny této KVARO jsou $m_1 = 3$ a $m_2 = \frac{7}{9}$, takže dostáváme

$$\boxed{S_1[3;2], r_1 = \sqrt{5}} \qquad \boxed{S_2\left[\frac{7}{9}; -\frac{2}{9}\right], r_2 = \frac{5\sqrt{5}}{9}}$$

A kružnice mají rovnice

$$\boxed{k_1: \ (x-3)^2 + (y-2)^2 = 5}$$

a

$$\boxed{k_2 : \left(x - \frac{7}{9}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{9}\right)^2 = \frac{125}{81}}$$

Řešení příkladu 15: Petačka 125/21 (Apoll. *Bpp*) Zadání ⇒

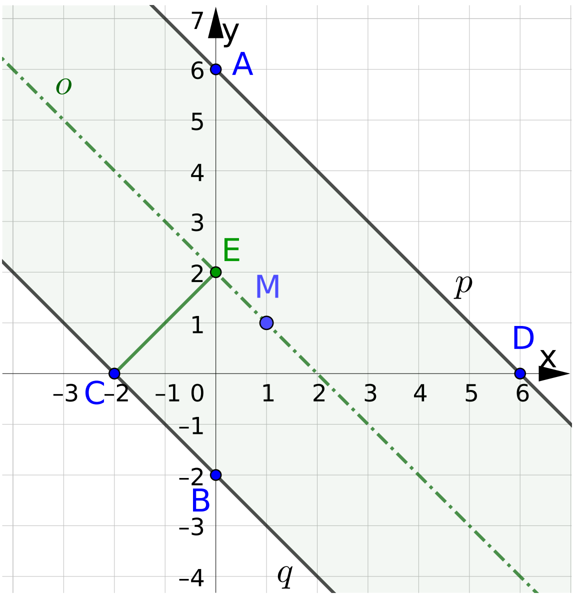
Najdi kružnici, která prochází $M[1;1]$ a dotýká se přímek $p: x+y-6=0$ a $q: x+y+2=0$.

Výsledek:

$$k_1: \ (x+1)^2+(y-3)^2=8$$
$$k_2: \ (x-3)^2+(y+1)^2=8$$

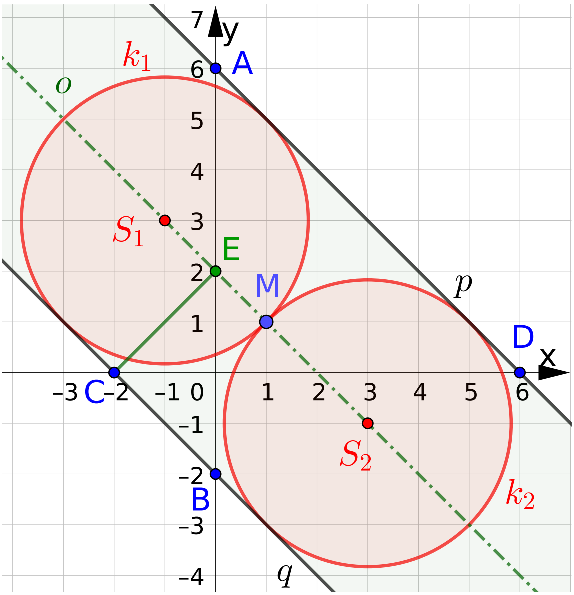
Řešení:

Ze zadání vidíme, že se jedná o rovnoběžky. Načrtneme si **kvalitní** obrázek:



Přímky jsme zakreslili pomocí jejich průsečíků s osami A, B, C, D. Přímky tvoří *pás* a střed hledané kružnice leží na ose tohoto pásu o.
Z obrázku je zřejmé, že když p a q protínají osu y v bodech $A[0; 6]$ a $B[0; -2]$, bude osa o protínat osu y ve středu úsečky AB, tedy v bodě $E[0; 2]$ (střed úsečky = aritmetický průměr krajních bodů!).
Směrnicová rovnice (SMĚRO) osy o je proto

$$\boxed{o: \ y = -x + 2}$$



Polovina šířky pásu je rovna poloměru hledané kružnice. Je to například délka úsečky EC, což je zřejmě $2\sqrt{2}$ (ve čtverečkové síti je to úhlopříčka ve čtverci o straně 2; nebo mohu spočítat vzdálenost bodu E od přímky q pomocí příslušného vzorce). Poloměr kružnice je tedy

$$\boxed{r = 2\sqrt{2}}$$

Z obrázku je patrné, že bod $M[1; 1]$ leží na ose o (můžeme se o tom přesvědčit i dosazením M do o). Odtud je jasné, že středy hledaných kružnic leží na ose o ve vzdálenosti CE, takže z obrázku díky čtvercové síti vidíme, že

$$\boxed{S_1[-1; 3] \qquad S_2[3; -1]}$$

Rovnice kružnic jsou tedy

$$\boxed{k_1 : \ (x+1)^2 + (y-3)^2 = 8}$$

a

$$\boxed{k_2 : \ (x-3)^2 + (y+1)^2 = 8}$$