Derivadas.

Tasa de variación media.

La **tasa de variación media** de la función $f(x)$ en el intervalo $[a\,,\,a+h]$ o $[a\,,\,b]$ se designa por $TVM\,(a\,,\,h)$ o $TVM\,(a\,,\,b)$ y viene dada por

$$TVM\,(a\,,\,h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=TVM\,(a\,,\,b)$$

El cociente $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, se representa también como $\frac{\Delta f(a)}{\Delta a}$. Además, hay que observar este cociente que dependiendo del valor de $\Delta f(a)$, puede ser positiva, negativa o nula.

\# *Ejemplo.- Las* $TVM_f(4,6)$ *y* $TVM_f(2,8)$ *de la función* $f(x)=x^2$ *serán*

$$TVM_f(a\,,\,h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=TVM_f(a\,,\,b)$$

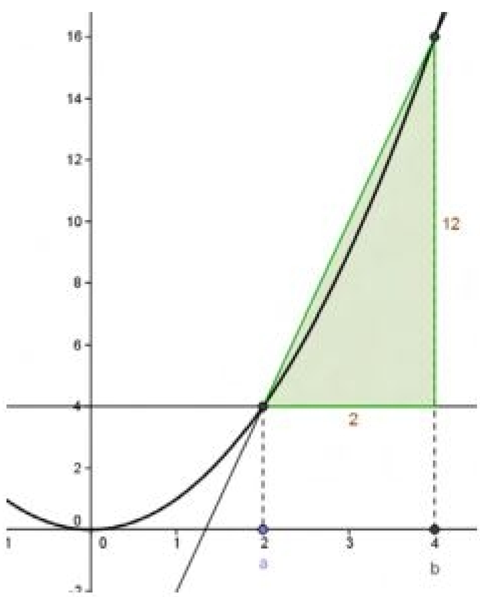
$$TVM_f(4,6)=\frac{f(6)-f(4)}{6-4}=\frac{6^2-4^2}{2}=10$$

$$TVM_f(2,8)=\frac{f(8)-f(2)}{8-2}=\frac{8^2-2^2}{6}=10$$

Interpretación geométrica de la tasa de variación media

La tasa de variación media de $f(x)$ en el intervalo $[a\,,\,b]$ representa la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(a\,,f(a))$ y $(b\,,f(b))$

\# *Ejemplo.- La* $TVM\,(2,4)$ *de la función* $f(x)=x^2$ *, representa la pendiente de la recta que pasa por los puntos* $(2,4)$ *y* $(4,16)$.



Tasa de variación instantánea. Derivada de una función en un punto,

La **tasa de variación instantánea** de la función $f(x)$ en el punto a (*se designa por* $TVI_f(a)$) o derivada de f en un punto a (*se designa por f'(a)*), cuando existe es

$$TVI_f(a)=\lim_{h\to 0} TVM(a,h)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

 # Ejemplo.- Las $TVI_f(2)$ *de la función* $f(x)=x^2$ *será*

$$f'(2)=TVI(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2^2+2h+h^2-2^2}{h}=\lim_{h\to 0} 2+h=2$$

Si denominamos $\Delta y=f(x)-f(a)$ *y* $\Delta x=x-a$ *, también podemos expresar*

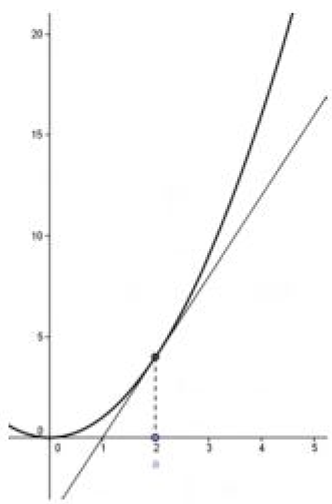
$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- Una función es derivable es un intervalo abierto (a,b) si lo es para cada uno de sus puntos.

Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto

La tasa de variación instantánea de $f(x)$ en el punto a, o f'(a) representa la pendiente de la recta tangente a f(x) en el punto $(a, f(a))$

 # Ejemplo.- La $TVI(2)$ *de la función* $f(x)=x^2$ *, representa la pendiente de la recta tangente a* $f(x)=x^2$ *que pasa por el punto 2.*



Función derivada. Derivada sucesiva.

Si f es una función derivable en todo su dominio, entonces podemos definir la función $f'(x)$ tal que a cada $x\in D_f$, $f'(x)$ es la derivada de f en el punto x ($D_{f'}\subset D_f$) .

 # Ejemplo.- La derivada de la función $f(x)=3x^2+x-1$ *es* $f'(x)=6x+1$.

A partir de una función derivada f' (o derivada), si existe también su derivada, recibe el nombre de derivada segunda y se designa por $f'' o f^{(2)}$. Y así, sucesivamente si existen $f''' o f^{(3)}$, ….

 # Ejemplo.- La segunda derivada de la función $f(x)=3x^2+x-1$ *es* $f''(x)=6$.

Derivadas laterales.

Si $f(x)$ es una función real de variable real y a un punto de su dominio, decimos que:

- f es derivable en a por la izquierda y representamos por $f'(a^-)$ si existe

$$f'(a^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- f es derivable en a por la derecha y representamos por $f'(a^+)$ si existe

$$f'(a^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Además, una función f(x) es derivable en x = a si y solo si es derivable por la izquierda y por la derecha de a, y las derivadas laterales coinciden.

 # Ejemplo.- La función $f(x)=|x|$ *tiene derivadas izquierda y derecha distintas en* $x=0$ *, ya que*

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\frac{-h}{h}=-1$$

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^+}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\frac{h}{h}=+1$$

Además, como estos límites son distintos, la función $f(x)=|x|$ *no es derivable en* $x=0$.

Continuidad y derivabilidad.

Si una función tiene derivada finita en un punto a, entonces es continua en a.

Sin embargo el que sea continua en dicho punto a, no implica que sea derivable.

 # Ejemplo.- La función $f(x)=|x^2|$ *tiene derivada en* $x=0$ *, ya que la izquierda y derecha distintas en* $x=0$ *, ya que*

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{|(0+h)^2|-|0^2|}{h}=0=\lim_{h\to 0^+}\frac{|(0+h)^2|-|0^2|}{h}=f'(0^+)$$

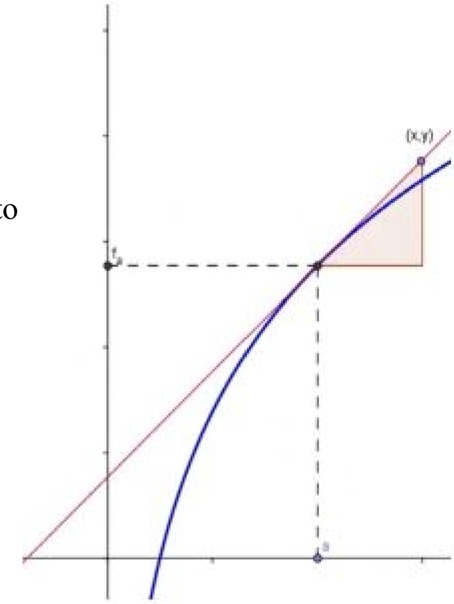
Y por tanto es derivable en $x=0$ *, y como consecuencia, también es continua en* $x=0$.

Sin embargo, la función $f(x)=|x|$ *a pesar de ser continua en* $x=0$ *, ya que* $\lim_{x\to 0}|x|=0=\lim_{x\to 0^+}|x|$ *no es derivable en* $x=0$ *, tal y como hemos visto en un ejemplo anterior.*

<u>Tangente a una curva en un punto.</u>

Si $f(x)$ es una función derivable en $x=a$, y r es la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$. Si m es la pendiente de la recta m, se cumplirá:

$$m=f'(a)$$



Además, teniendo en cuenta que el punto $(a, f(a))$ pertenece a la recta r, si (x,y) es un punto cualquiera de la recta se cumplirá:

$$m=\frac{y-f(a)}{x-a}$$

Luego, igualando las dos ecuaciones anteriores, tenemos que la ecuación de la recta r tangente a $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ será

$$f'(a)=\frac{y-f(a)}{x-a}$$

 # Ejemplo.- Hallar la ecuación de la tangente a la curva $f(x)=x^4$ *en* $x=2$.

Como $f'(x)=4x^3$ *, la pendiente de la tangente en el punto* $x=2$ *es* $f'(2)=32$ *, y como para* $x=2$ *es* $f(2)=16$ *, la ecuación de la recta tangente a* f *, en el punto* $P(2,16)$ *es:*

$$y-16=32.(x-2)$$