Problemas – Tema 6

Problemas resueltos - 11 - rango de matriz en función de un parámetro por el método de Gauss

1. Sea $A=\begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$

a) Estudiar el rango de la matriz en función del parámetro m , e indicar cuándo existe inversa.

b) Hallar el valor de m para que se cumpla la igualdad $A^2=4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Aplicamos Gauss para estudiar el rango de la matriz, sabiendo que el rango coincide con el número de filas no nulas tras obtener la matriz triangular de Gauss.

Y si el rango coincide con la dimensión de la matriz (en este caso 3), admitirá inversa.

$$A=\begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix} \rightarrow \quad F'_3=2\cdot F_3+F_2 \quad \rightarrow \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{pmatrix}$$

Igualamos a cero los elementos de la diagonal principal que dependen del parámetro.

$$m=0$$

$$2m=0 \quad \rightarrow \quad m=0$$

Realizamos la discusión de casos.

- Si $m=0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ → Eliminamos la tercera fila por tener todos lo coeficientes nulos → $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ → Eliminamos una de las filas, por ser ambas idénticas → $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ →
  Llegamos a una única fila con coeficientes no nulos → El rango es 1 y la matriz no admite inversa.

- Si $m \neq 0 \rightarrow \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{pmatrix}$ En la matriz final de Gauss contamos tres filas con coeficientes no nulos → Rango es 3 y la matriz sí admite inversa.

b) Para comprobar $A^2 = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ realizamos en primer lugar:

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 & -2m+4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2+m & m^2 \end{pmatrix}$$

E igualamos componente a componente:

$$\begin{pmatrix} m^2 & -2m+4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2+m & m^2 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} m^2 = 4 \\ -2m+4 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 4 = 4 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ -2+m = 0 \\ m^2 = 4 \end{matrix} \right\} \rightarrow \text{El valor } m = 2 \text{ cumple las condiciones}$$