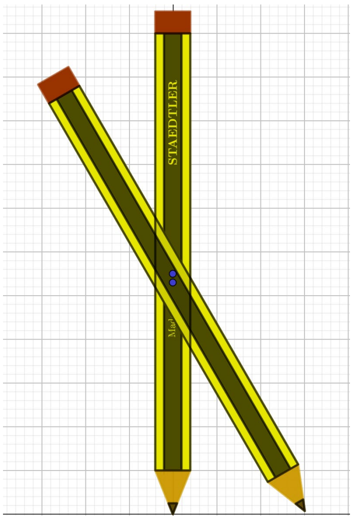
Μολύβι ισορροπεί στην κατακόρυφη θέση πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Αφού διαταραχθεί ελαφρώς, το μολύβι ανατρέπεται: Το Κέντρο Μάζας του (CM) επιταχύνεται κατακόρυφα (άξονας y) προς τα κάτω με γραμμική επιτάχυνση $\ddot{y}_{CM}$ και το CM κινείται ευθύγραμμα προς τα κάτω, εφόσον οι δυνάμεις που δρουν στο μολύβι έχουν κατακόρυφη διεύθυνση και δεν μπορούν να το επιταχύνουν στην οριζόντια διεύθυνση. Ταυτόχρονα - καθώς η μύτη τού μολυβιού βρίσκεται συνεχώς σε επαφή με την οριζόντια επιφάνεια - το μολύβι δέχεται ροπή από την κάθετη δύναμη επαφής $\vec{N}$ και περιστρέφεται με γωνιακή επιτάχυνση $\ddot{\theta}$ γύρω από το CM του.



$$y_{CM} = \frac{L}{2} cos\,\theta \Rightarrow \dot{y}_{CM} = -\frac{L}{2} sin\,\theta\,\dot{\theta} \quad (1)$$

$$T = T_{trans} + T_{rot} = \frac{1}{2} m (\dot{y}_{CM})^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} mL^2\right)\dot{\theta}^2 \quad (2)$$

$$(2) \overset{(1)}{\Rightarrow} T = \frac{1}{8} mL^2 \left(sin^2\,\theta + \frac{1}{3}\right)\dot{\theta}^2 \quad (3)$$

$$U = mgy = \frac{1}{2} mgL\,cos\,\theta \quad (4)$$

Λαγκρανζιανή:

$$\mathcal{L} = T - U \xRightarrow{(3),(4)} \mathcal{L} = \frac{1}{8} mL^2 \left(sin^2\,\theta + \frac{1}{3}\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} mgL\,cos\,\theta$$

Εξίσωση Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{4} m L^2 \left(sin^2\,\theta + \frac{1}{3}\right)\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{1}{4} m L^2 \left(sin^2\,\theta + \frac{1}{3}\right)\ddot{\theta} + \frac{1}{2} m L^2\, sin\,\theta\, cos\,\theta\, \dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{1}{4} m L^2\, sin\,\theta\, cos\,\theta\, \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m g L\, sin\,\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{4} m L^2 \left(sin^2\,\theta + \frac{1}{3}\right)\ddot{\theta} + \frac{1}{2} m L^2\, sin\,\theta\, cos\,\theta\, \dot{\theta}^2 - \frac{1}{4} m L^2\, sin\,\theta\, cos\,\theta\, \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m g L\, sin\,\theta = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{1}{4} m L^2 \left(sin^2\,\theta + \frac{1}{3}\right)\ddot{\theta} + \frac{1}{4} m L^2\, sin\,\theta\, cos\,\theta\, \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m g L\, sin\,\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\frac{1}{2} m g L\, sin\,\theta - \frac{1}{4} m L^2\, sin\,\theta\, cos\,\theta\, \dot{\theta}^2}{\frac{1}{4} m L^2 \left(sin^2\,\theta + \frac{1}{3}\right)} \Rightarrow$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{sin\,\theta \left(\frac{2g}{L} - cos\,\theta\, \dot{\theta}^2\right)}{sin^2\,\theta + \frac{1}{3}}}$$

$$(1) \Rightarrow \ddot{y}_{CM} = -\frac{L}{2}\left(cos\,\theta\, \dot{\theta}^2 + sin\,\theta\, \ddot{\theta}\right)$$

$$N - mg = m\ddot{y}_{CM} \Rightarrow$$

$$\boxed{N = mg - \frac{mL}{2}\left(cos\,\theta\, \dot{\theta}^2 + sin\,\theta\, \ddot{\theta}\right)}$$

Η εξίσωση της γωνίας θ είναι 2ης τάξης μη γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση και γενικά δεν επιλύεται αναλυτικά. Ως εκ τούτου, θα χρησιμοποιήσουμε προσεγγιστική μέθοδο για την επίλυση της και ποιο συγκεκριμένα τη μέθοδο Runge-Kutta 4ης τάξης.

Η μέθοδος Runge-Kutta 4ης τάξης (RK4) είναι μια ισχυρή αριθμητική τεχνική για την επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων (ODEs), όπως στην προκειμένη περίπτωση, με μεγάλη ακρίβεια. Συγκεκριμένα, θα μετατρέψουμε την εξίσωση δεύτερης τάξης σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, ώστε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο RK4.

Η εξίσωση για τη γωνία θ είναι:

$$\ddot{\theta} = \frac{\frac{g}{2L}\sin(\theta) - \frac{1}{4}\sin(\theta)\cos(\theta)\ \dot{\theta}^2}{\frac{1}{4}\sin^2(\theta) + \frac{1}{12}}$$

Ορίζουμε:

1. $\theta = \theta$
2. $\omega = \dot{\theta}$

Αυτό μας επιτρέπει να μετατρέψουμε την εξίσωση σε ένα σύστημα πρώτης τάξης:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\frac{g}{2L}\sin(\theta) - \frac{1}{4}\sin(\theta)\cos(\theta)\ \omega^2}{\frac{1}{4}\sin^2(\theta) + \frac{1}{12}}$$

Βήμα 2: Εφαρμογή της Μεθόδου RK4

Για χρονικό βήμα Δt, υπολογίζουμε τις νέες τιμές των θ και ω τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$.
Ορίζουμε:

1. $f(\theta, \omega) = \frac{d\theta}{dt} = \omega_n$
2. $g(\theta, \omega) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\frac{g}{2L}\sin(\theta) - \frac{1}{4}\sin(\theta)\cos(\theta)\,\omega^2}{\frac{1}{4}\sin^2(\theta) + \frac{1}{12}}$

Τα βήματα της μεθόδου RK4 είναι τα εξής:

1. **Υπολογισμός k_1 για θ και ω:**

$$k_{1\theta} = \Delta t \cdot f(\theta_n, \omega_n) = \Delta t \cdot \omega_n$$
$$k_{1\omega} = \Delta t \cdot g(\theta_n, \omega_n)$$

1. **Υπολογισμός k_2 για θ και ω:**

$$k_{2\theta} = \Delta t \cdot \left(\omega_n + \frac{k_{1\omega}}{2}\right)$$
$$k_{2\omega} = \Delta t \cdot g\left(\theta_n + \frac{k_{1\theta}}{2}, \omega_n + \frac{k_{1\omega}}{2}\right)$$

2. **Υπολογισμός $\boldsymbol{k_3}$ για $\boldsymbol{\theta}$ και $\boldsymbol{\omega}$:**

$$k_{3\theta} = \Delta t \cdot \left(\omega_n + \frac{k_{2\omega}}{2}\right)$$
$$k_{3\omega} = \Delta t \cdot g\left(\theta_n + \frac{k_{2\theta}}{2}, \omega_n + \frac{k_{2\omega}}{2}\right)$$

3. **Υπολογισμός $\boldsymbol{k_4}$ για $\boldsymbol{\theta}$ και $\boldsymbol{\omega}$:**

$$k_{4\theta} = \Delta t \cdot (\omega_n + k_{3\omega})$$
$$k_{4\omega} = \Delta t \cdot g(\theta_n + k_{3\theta}, \omega_n + k_{3\omega})$$

4. **Ενημέρωση των $\boldsymbol{\theta}$ και $\boldsymbol{\omega}$:**

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{6}(k_{1\theta} + 2k_{2\theta} + 2k_{3\theta} + k_{4\theta})$$
$$\omega_{n+1} = \omega_n + \frac{1}{6}(k_{1\omega} + 2k_{2\omega} + 2k_{3\omega} + k_{4\omega})$$

5. **Επανάληψη**: Επαναλαμβάνουμε αυτά τα βήματα για κάθε βήμα χρόνου μέχρι να φτάσουμε στον επιθυμητό χρόνο προσομοίωσης.