

Combinatoria

Variaciones ordinarias o sin repetición

Sean A un conjunto finito con n elementos ($n > 0$) y r un número natural ($r \leq n$). Una **variación sin repetición de orden r de A**, es una lista ordenada $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_r)$ de elementos distintos de A.

Dos variaciones sin repetición son distintas, si alguno de los elementos de una lista no se encuentran en la otra, o si las dos listas contienen los mismos elementos en distinto orden.

Ejemplo.- Sea $A = \{a, b, c\}$. Las posibles conjuntos de dos elementos sin repetición que podemos formar son: $\{a, b\}; \{a, c\}; \{b, a\}; \{b, c\}; \{c, a\}; \{c, b\}$.

El **número de variaciones ordinarias o sin repetición de orden r de un conjunto de n elementos** es

$$V_{n,r} = V_n^r = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejemplo.- Sea $A = \{a, b, c\}$. El número de variaciones ordinarias de dos elementos es

$$V_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$$

Ejemplo.- Para resolver la ecuación $V_{m,4} = 20 \cdot V_{m,2}$, para $m \geq 4$,

$$V_{m,4} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3) = 20 \cdot m \cdot (m-1) = 20 \cdot V_{m,2}$$

$$\Leftrightarrow (m-2) \cdot (m-3) = 20 \Leftrightarrow m = 7$$

Ejemplo.- Los números distintos de tres dígitos que se pueden formar con el conjunto de dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sin que se repita ninguna cifra es

$$V_{9,3} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504 \quad \text{números distintos}$$

Ejemplo.- El número de formas distintas que se pueden sentar 4 alumnos de un grupo de 12 en un banco es

$$V_{12,4} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11880 \quad \text{formas distintas}$$

Variaciones con repetición

Sean A un conjunto finito con n elementos ($n > 0$) y r un número natural. Una **variación con repetición de orden r de A**, es una lista ordenada $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_r)$ de elementos de A, que pueden ser iguales.

Dos variaciones con repetición son distintas, si alguno de los elementos de una lista no se encuentran en la otra, o si las dos listas contienen los mismos elementos en distinto orden.

Ejemplo.- Sea $A = \{a,b,c\}$. Las posibles conjuntos de dos elementos con repetición que podemos formar son: $\{a,a\}; \{a,b\}; \{a,c\}; \{b,a\}; \{b,b\}; \{b,c\}; \{c,a\}; \{c,b\}; \{c,c\}$.

El **número de variaciones con repetición de orden r de un conjunto de n elementos** es

$$VR_{n,r} = VR_n^r = n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^r$$

Ejemplo.- Sea $A = \{a,b,c\}$. El número de variaciones con repetición de dos elementos es

$$VR_{3,2} = 3^2 = 9$$

Ejemplo.- Para resolver la ecuación $VR_{x,2} + 5 \cdot VR_{x-2,2} = 244$

$$VR_{x,2} + 5 VR_{x-2,2} = x^2 + 5 \cdot (x-2)^2 = 244 \Rightarrow x = 8 \text{ o } x = -\frac{14}{3}$$

Ejemplo.- En el alfabeto Morse se utilizan dos símbolos punto y raya. ¿Cuántos caracteres diferentes es posible obtener con el citado alfabeto tomando 1, 2, 3 o 4 de los símbolos citados?

Caracteres formados por un símbolo: $VR_{2,1} = 2$

Caracteres formados por dos símbolos: $VR_{2,2} = 2^2 = 4$

Caracteres formados por tres símbolos: $VR_{2,3} = 2^3 = 8$

Caracteres formados por cuatro símbolo: $VR_{2,4} = 2^4 = 16$

Luego, el total de caracteres diferentes será:

$$2 + 4 + 8 + 16 = 30$$

Ejemplo.- Si se lanzan tres dados de distintos colores, el número de resultados distintos que se pueden obtener es

$$VR_{6,3} = 6^3 = 216 \text{ resultados distintos}$$

Permutaciones sin repetición

Sean A un conjunto finito con n elementos ($n > 0$). Una **permutación de A**, es una lista ordenada $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ de elementos distintos de A.

Diremos que dos permutaciones son diferentes si tales listas tienen un orden diferente.

Ejemplo.- Sea $A = \{a,b,c\}$. Las posibles conjuntos de dos elementos sin repetición que podemos formar son: $\{a,b,c\}; \{a,c,b\}; \{b,a,c\}; \{b,c,a\}; \{c,a,b\}; \{c,b,a\}$.

El **número de permutaciones sin repetición de un conjunto de n elementos** es

$$P_n = V_{n,n} = V_n^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Ejemplo.- Sea $A = \{a, b, c\}$. El número de permutaciones sin repetición es

$$P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Ejemplo.- Los números distintos que se pueden formar con el conjunto de dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sin que se repita ninguna cifra es

$$P_9 = 9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362880 \quad \text{números distintos}$$

Permutaciones con repetición

Sean A un conjunto finito con n elementos ($n > 0$) en el cual hay un número r elementos repetidos a_1 , s elementos repetidos a_2 , ..., y t elementos repetidos a_3 . Siendo $r + s + \dots + t = n$. Una permutación con repetición de A, es una lista ordenada de todos los elementos (a_1, a_2, \dots, a_n) de A. Donde:

$$\text{Card}(A) = \sum_{i=1}^n \text{Card}(a_i) = r \cdot \text{Card}(a_{(r)}) + s \cdot \text{Card}(a_{(s)}) + \dots + t \cdot \text{Card}(a_{(t)})$$

Donde $a_{(r)}$ es uno de los r elementos iguales de A, $a_{(s)}$ es uno de los s elementos iguales de A, ..., $a_{(t)}$ es uno de los t elementos iguales de A.

Diremos que dos permutaciones con repetición son diferentes si tienen un orden diferente.

Ejemplo.- Sea $A = \{a, a, b\}$. Las posibles permutaciones con repetición que podemos formar son: $\{a, a, b\}; \{a, b, a\}; \{b, a, a\}$.

Si consideráramos un conjunto de n elementos, con r repetidos, s repetidos, ..., y t repetidos.

Como el número de permutaciones sin repetición de un conjunto A con n elementos es $P_n = n!$, y teniendo en cuenta que hay r! listas iguales, s! listas iguales, ..., y t! listas iguales. El número de permutaciones con repetición de A ($P_n^{r, s, \dots, t}$) de permutaciones con repetición de n objetos con repeticiones (r, s, \dots, t) es:

$$P_n^{r, s, \dots, t} \cdot r! \cdot s! \cdot \dots \cdot t! = n!$$

Por tanto, el **número de permutaciones con repetición de un conjunto de n elementos** es:

$$P_n^{r, s, \dots, t} = \frac{n!}{r! \cdot s! \cdot \dots \cdot t!}$$

Ejemplo.- Sea $A = \{a, a, b\}$. El número de permutaciones con repetición es

$$P_3^{2, 1} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$$

Ejemplo.- Si al rellenar una quiniela de fútbol, utilizamos el siguiente criterio:

que ganen 9 equipos en casa, que empaten 3 y que ganen 2 en campo contrario

¿Cuántas quinielas distintas tendremos que rellenar para asegurar un pleno de 14?

$$P_{14}^{9,3,2} = \frac{14!}{9! \cdot 3! \cdot 2!} = 20020 \text{ quinielas}$$

Combinaciones sin repetición

Sean A un conjunto finito con n elementos ($n > 0$) y r un número natural ($r \leq n$). Una **combinación de orden r de A**, es una lista ordenada $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_r)$ no necesariamente ordenada, de elementos distintos de A.

Diremos que dos combinaciones son diferentes si alguno de los elementos de las dos listas no se encuentran en la otra.

Ejemplo.- Sea $A = \{a, b, c\}$. Las posibles combinaciones de dos elementos que podemos formar son: $\{a, b\}; \{a, c\}; \{b, c\}$.

El **número de combinaciones sin repetición de orden r de un conjunto de n elementos** es

$$C_{n,r} = C_n^r = \frac{V_{n,r}}{P_r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

Ejemplo.- Si tenemos ocho puntos en el plano, tal que cada tres puntos cualquiera no estén alineados. El número de triángulos distintos que se pueden formar es

$$C_{8,3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56 \text{ triángulos distintos}$$

Números combinatorios

Al número $C_{m,r}$ se le denomina número combinatorio y se representa por $\binom{n}{r}$ “se lee n sobre r”, y cumple las siguientes propiedades

- $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
- $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$

Una de las aplicaciones de los números combinatorios es el desarrollo del binomio de Newton, que se puede expresar como

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n$$

Ejemplo.- Desarrolla el binomio $(3+2x)^5$

$$\begin{aligned} & (3+2x)^5 = \\ = & \binom{5}{0} \cdot 3^5 \cdot (2x)^0 + \binom{5}{1} \cdot 3^4 \cdot (2x)^1 + \binom{5}{2} \cdot 3^3 \cdot (2x)^2 + \binom{5}{3} \cdot 3^2 \cdot (2x)^3 + \binom{5}{4} \cdot 3^1 \cdot (2x)^4 + \binom{5}{5} \cdot 3^0 \cdot (2x)^5 = \\ = & 243 + 810x + 1080x^2 + 720x^3 + 240x^4 + 32x^5 \end{aligned}$$