Problemas – Tema 2

Problemas resueltos - 19 - problemas de enunciado para resolver con ecuaciones trigonométricas

1. Dos carreteras parten de un mismo punto, y forman entre si un ángulo de 60º. Desde el punto de intersección parten, simultáneamente por cada una, dos coches. El primero con una velocidad constante de 50 km/h y el segundo con una velocidad constante de 70 km/h. Calcula la distancia que existirá entre ambos coches al cabo de 10 minutos.

Nos dan las velocidades de los coches, así que calculamos el espacio que recorren en 10 minutos.

$s=v\cdot t$ (tiempo en horas → 10min = 0,167 horas)

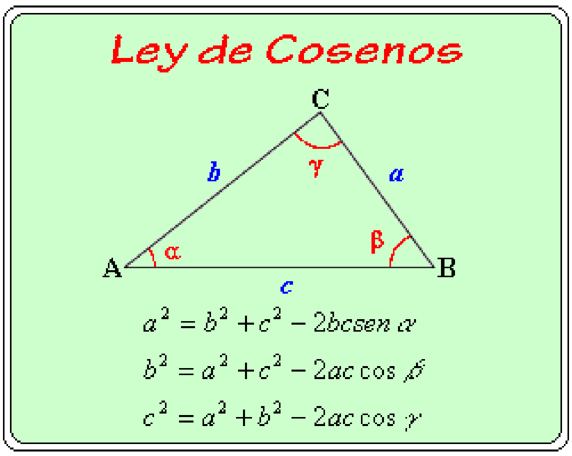
Para el coche que avanza a 50 km/h:

$$s=50\cdot 0{,}167$$
$$s=8{,}33\,km$$

Para el coche que avanza a 70 km/h:

$$s=70\cdot 0{,}167$$
$$s=11{,}667\,km$$

Es decir, tenemos un triángulo no rectángulo de vértices ABC y lados abc. El vértice A es opuesto al lado a, el vértice B es opuesto al lado b, y el vértice C es opuesto al lado c.



Si el ángulo del vértice A = 60º → b = 8,33 km → c = 11,67 km → podemos calcular el lado a (distancia entre los dos coches) utilizando la ley de cosenos:

$$a^2=c^2+b^2-2cb\cdot cos A$$

Sustituimos por los valores que tenemos:

$$a^2=8,33^2+11,667^2-2\cdot 8,33\cdot 11,667\cdot cos 60º$$

$$a^2=69,389+136,119-194,37\cdot\frac{1}{2}$$

$$a^2=108,323$$

$a=10,408\,km$ (tomanos distancia positiva)

2. Los puntos A y B están separados por un barranco. Se recurre a un punto C y se mide:

AC = 48 m BC = 67 m

El ángulo que forman estos dos lados es de 80º. Calcula la distancia AB.

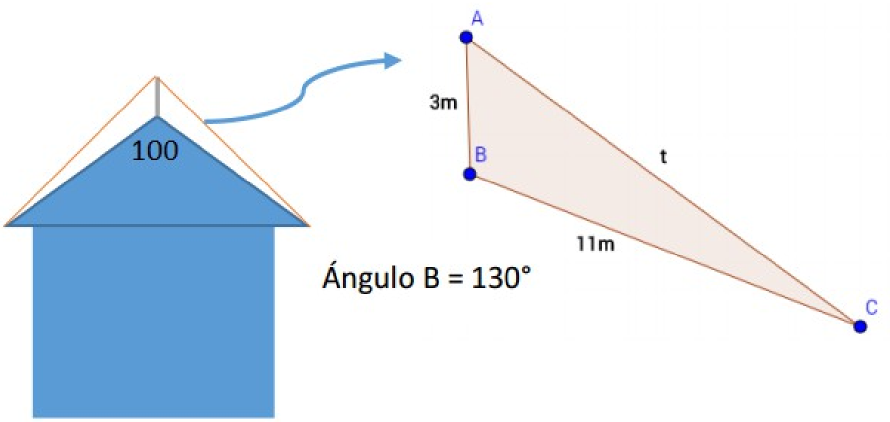
Lo resolveremos aplicando el teorema del coseno sobre el lado AB:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos 80^o$$

$$AB^2 = 48^2 + 67^2 - 2 \cdot 48 \cdot 67 \cdot \cos 80$$

$$AB = \sqrt{48^2 + 67^2 - 2 \cdot 48 \cdot 67 \cdot \cos 80} \rightarrow AB = 75{,}49\, m$$

3. Para fijar una antena en lo alto del tejado a dos aguas de una casa, se recurre a dos tirantes que unen el extremo superior de la antena con los puntos finales de la vertiente del tejado. Sabiendo que la antena mide 3m, las dos vertientes 11m cada una y el ángulo que forman las vertientes entre si 100º, calcula cuánto medirá cada tirante.



El ángulo de las dos vertientes es 100º. En una circunferencia completa tenemos 360º, por lo que podemos plantear la siguiente igualdad:

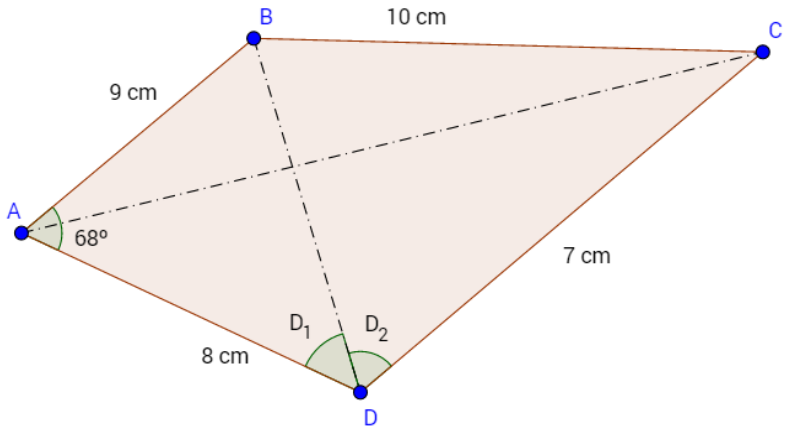
$$360º=100º+2\cdot B \quad \rightarrow \quad B=130º$$

Con el teorema del coseno podemos obtener la longitud de uno de los tirantes señalados en la imagen como t .

$$t^2=3^2+11^2-2\cdot 3\cdot 11\cdot \cos(130º) \quad \rightarrow \quad t\simeq 13{,}13...\ m$$

4. Las longitudes de los lados de un cuadrilátero son 7cm, 8cm, 9cm y 10cm respectivamente. El ángulo A que forman los lados de longitud 8cm y 9cm es de 68º. Calcula las longitudes de las diagonales del cuadrilátero.

Trazamos un dibujo para ilustrar el problema (el dibujo es aproximado, la forma y dimensiones no tienen por qué coincidir con la solución final del problema).



Aplicando el teorema del coseno podemos obtener la diagonal $\overline{BD}$ con la siguiente ecuación.

$$(\overline{BD})^2=8^2+9^2-2\cdot 8\cdot 9\cdot\cos(68^o)$$

$$(\overline{BD})^2=145-144\cdot\cos(68^o) \quad\rightarrow\quad (\overline{BD})^2=145-144\cdot\cos(68^o)$$

$$(\overline{BD})^2=91{,}057 \quad\rightarrow\quad \overline{BD}=9{,}542\ \ cm$$

Para conocer la diagonal $\overline{AC}$ por el teorema del coseno necesitamos conocer, previamente, el ángulo del vértice $\hat{D}$. Este vértice podemos dividirlo en dos ángulos: $\hat{D}_1$ y $\hat{D}_2$. Vamos a determinar estos dos ángulos, y su suma nos dará el vértice $\hat{D}$ que nos permitirá determinar la diagonal $\overline{AC}$.

¿Cómo obtener $\hat{D}_1$? Aplicando el teorema del seno en el triángulo ABD .

$$\frac{9{,}542}{sen(68^o)}=\frac{9}{sen(\hat{D}_1)} \quad\rightarrow\quad sen(\hat{D}_1)=\frac{9\cdot sen(68^o)}{9{,}542}$$

$$sen(\hat{D}_1)=0{,}875 \quad\rightarrow\quad \hat{D}_1=60{,}988^o \quad,\quad \hat{D}_1=180^o-60{,}988^o=119{,}012^o$$

Tenemos dos ángulos candidatos. ¿Cuál elegir?

El valor $\hat{D}_1=60{,}988^o$, ya que si fuese $\hat{D}_1=119{,}012^o$ la suma de ángulos del triángulo ABD superaría el valor de 180º ya que $\hat{A}+\hat{D}_1=68^o+119{,}012^o>180^o$.

¿Cómo obtener $\hat{D}_2$? Aplicando el teorema del coseno en el triángulo BCD .

$$10^2=7^2+9{,}542^2-2\cdot 7\cdot 9{,}542\cdot\cos(\hat{D}_2)$$

$$100=140{,}05-132{,}328\cdot\cos(\hat{D}_2) \rightarrow \frac{-40{,}05}{-132{,}328}=\cos(\hat{D}_2)$$

$$\cos(\hat{D}_2)=0{,}303 \rightarrow \hat{D}_2=72{,}383^o \quad , \quad \hat{D}_2=360º-72{,}383^o=287{,}617^o$$

Nuevamente tenemos dos ángulos candidatos. ¿Cuál elegir?

El valor $\hat{D}_2=72{,}383^o$, ya que si fuese $\hat{D}_2=287{,}617^o \rightarrow \hat{D}=\hat{D}_1+\hat{D}_2=348{,}605^o$ → y este vértice $\hat{D}$ sumado al valor del vértice $\hat{A}=68º$ generaría un ángulo mayor a 360º, lo cual no es posible en un cuadrilátero.

Por lo tanto:

$$\hat{D}=\hat{D}_1+\hat{D}_2=60{,}988^o+72{,}383^o=133{,}371^o$$

Con este valor del vértice $\hat{D}$ aplicamos el teorema del coseno para obtener la longitud de la diagonal $\overline{AC}$.

$$(\overline{AC})^2=7^2+8^2-2\cdot 7\cdot 8\cdot\cos(133{,}371^o) \rightarrow (\overline{AC})^2=113-112\cdot\cos(133{,}371^o)$$

$$(\overline{AC})^2=189{,}913 \rightarrow \overline{AC}=13{,}78 \quad cm$$

5. Un trapecio rectángulo tiene la base mayor de 10cm, la base menor de 6cm, y el lado oblicuo forma con la base mayor un ángulo de 30º. Calcula el perímetro y el área del trapecio.

En el trapecio podemos formar un triángulo rectángulo donde el ángulo de 30º tenga de cateto contiguo (10-6) cm, de lado opuesto igual a la altura, y de hipotenusa la línea oblicua que une las dos bases.

$$tg\ 30^o = \frac{lado\ opuesto}{lado\ continuo}$$

$$tg\ 30^o = \frac{lado\ \ opuesto}{10-6} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{lado\ \ opuesto}{4} \quad \rightarrow \quad lado\ \ opuesto = \frac{4\cdot\sqrt{3}}{3}$$

La hipotenusa la obtenemos aplicando Pitágoras.

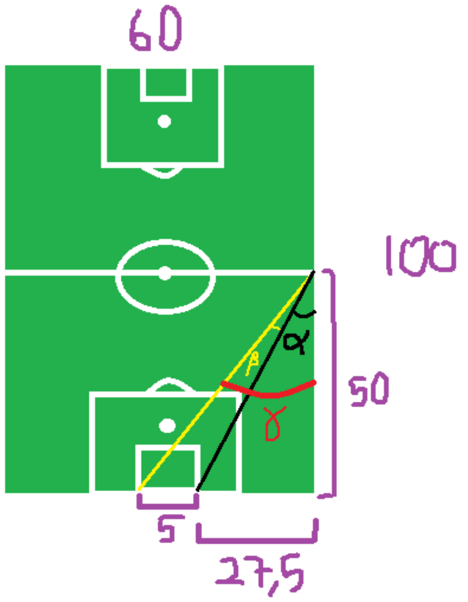
$$h^2 = 4^2 + \left(\frac{4\cdot\sqrt{3}}{3}\right)^2 \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{\frac{192}{9}} = \frac{8\cdot\sqrt{3}}{3}$$

Ya podemos obtener el perímetro y el área.

$$P = 10+6+(lado\ \ opuesto)+h = \frac{48+12\cdot\sqrt{3}}{3} \quad cm$$

$$A = \frac{(B+b)\cdot altura}{2} = \frac{(10+6)\dfrac{4\cdot\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{32\cdot\sqrt{3}}{3} \quad cm^2$$

6. Un campo de fútbol mide 100m de largo y 60m de ancho. Una portería tiene una longitud de 5m. Un jugador se encuentra en la intersección del centro del campo con una de las líneas laterales de saque de banda. Si dispara desde esa posición, ¿qué ángulo horizontal de tiro posee para que el disparo vaya entre los dos postes de la portería?



Hallamos los ángulos que hay entre la línea de fuera de banda hasta los 50m y hasta los 27,5m que separan el saque de esquina y el poste de la portería más cercano (ángulo α).

Para ello utilizamos la fórmula de la tangente en triángulos rectángulos como cociente entre cateto opuesto y cateto contiguo. Repetimos el proceso, pero esta vez con los 32,5m (27,5 + 5) que hay hasta el segundo poste (ángulo γ).

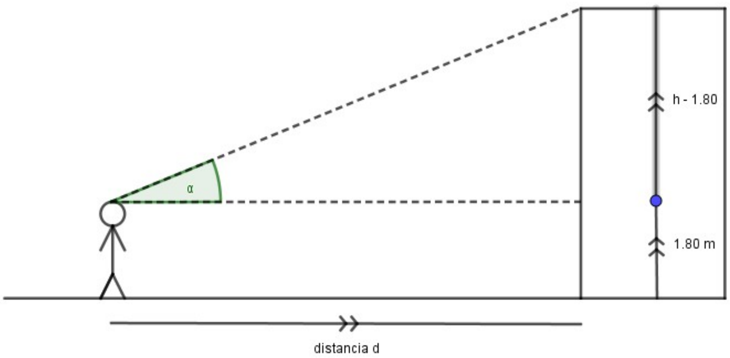
Restamos ambos ángulos y nos dará el ángulo necesario para que el balón vaya entre los dos palos de la portería ($\beta=\alpha-\gamma$).

$$tg\,\alpha=\frac{27{,}5}{50} \rightarrow \quad tg(\alpha)=0{,}55 \quad \rightarrow \quad \alpha=28{,}81^{o}$$

$$tg\,\gamma=\frac{32{,}5}{50} \rightarrow \quad tg\,\gamma=0{,}65 \quad \rightarrow \quad \gamma=33{,}02^{o}$$

$$\beta=\gamma-\alpha \quad \rightarrow \quad \beta=33{,}02-28{,}81 \quad \rightarrow \quad \beta=4{,}21^{o}$$

7. Una persona de 1,80 m de altura está en la calle. Ve el último piso de un edificio bajo un ángulo de 30º. Si avanza 10 metros hacia el edificio, ve el último piso bajo un ángulo de 45º. ¿Cuál es la altura del edificio? Haz un dibujo que ilustre el enunciado, indicando adecuadamente los datos de partida en el dibujo.



$$tg(30)=\frac{h-1.8}{d}$$

$$tg(30)\cdot d=h-1{,}8$$

$$tg(45)=\frac{h-1.8}{d-10}$$

$$tg(45)\cdot(d-10)=h-1{,}8$$

Igualamos → $tg(30)\cdot d=tg(45)\cdot(d-10)$

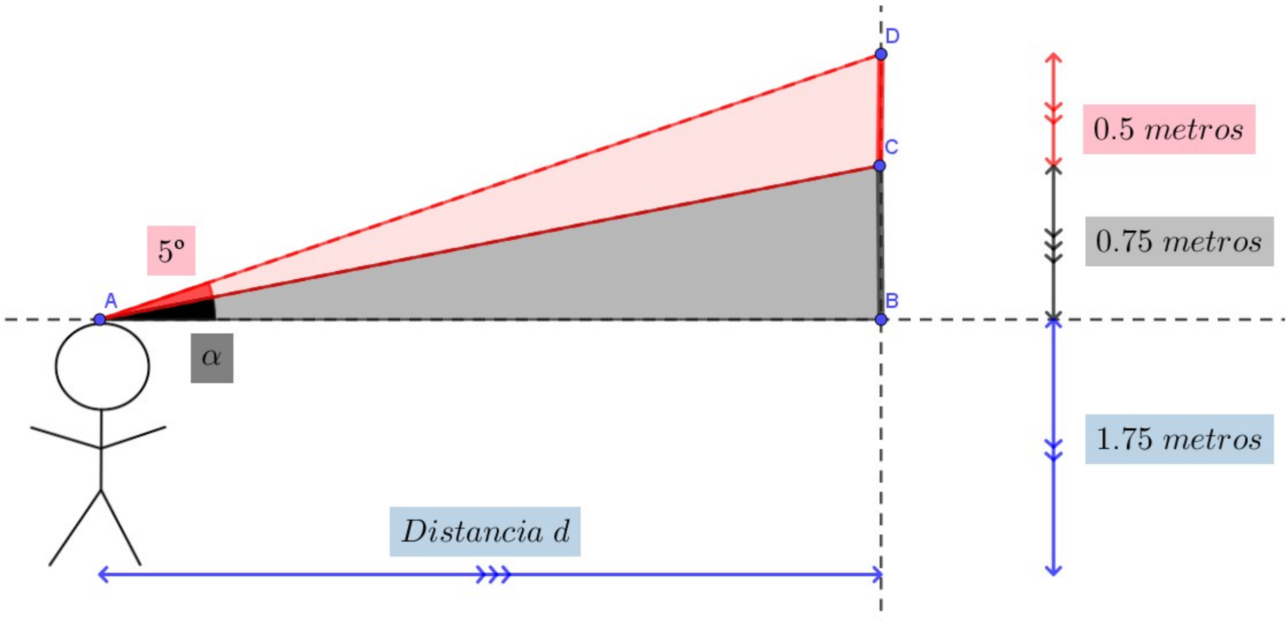
$$\frac{\sqrt{3}}{3}d=d-10 \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}-3}{3}d=-10$$

$$d=\frac{-30}{\sqrt{3}-3}=23{,}66\,m$$

Sustituimos para obtener la altura del edificio → $tg(30)\cdot d=h-1{,}8 \quad \rightarrow \quad h=15{,}46\,m$

8. Un cuadro está colocado en una pared de forma que su extremo más alto se encuentra a 3 metros del suelo, y su extremo más bajo a 2,5 metros. Una persona de 175 cm de altura ve todo el cuadro bajo un ángulo de 5º. ¿A qué distancia de la pared está situada esa persona?

Dibujamos un esquema de la situación.



En el triángulo rectángulo ABC podemos definir la tangente del ángulo α :

$$tg(\alpha)=\frac{0.75}{d}$$

Igualmente, en el triángulo rectángulo ABD definimos la tangente del ángulo suma $\alpha+5^{\circ}$. IMPORTANTE: el triángulo de vértices ACD NO ES RECTÁNGULO.

$$tg(\alpha+5^{\circ})=\frac{1.25}{d}$$

En esta expresión aplicamos el desarrollo de la tangente de la suma de dos ángulos:

$$tg(\alpha+5^{\circ})=\frac{tg(\alpha)+tg(5^{\circ})}{1-tg(\alpha)\cdot tg(5^{\circ})}$$

Igualamos ambas expresiones para la tangente de la suma de ángulos:

$$\frac{1.25}{d}=\frac{tg(\alpha)+tg(5^{\circ})}{1-tg(\alpha)\cdot tg(5^{\circ})}$$

Donde aparece la tangente de alfa, escribimos su valor tomado de la primera ecuación:

$$\frac{1.25}{d}=\frac{\frac{0.75}{d}+tg(5^{\circ})}{1-\frac{0.75}{d}\cdot tg(5^{\circ})}$$

El valor de la tangente de 5º lo obtenemos directamente de la calculadora:

$$\frac{1.25}{d}=\frac{\frac{0.75}{d}+0.087}{1-\frac{0.75}{d}\cdot 0.087} \quad \rightarrow \quad \frac{1.25}{d}=\frac{\frac{0.75+0.087\,d}{d}}{\frac{d-0.75\cdot 0.087}{d}}$$

Simplificamos los denominadores:

$$\frac{1.25}{d}=\frac{0.75+0.087\,d}{d-0.75\cdot 0.087}$$

Multiplicamos en cruz:

$$1.25\cdot(d-0.75\cdot 0.087)=d\cdot(0.75+0.087\,d)$$

$$1.25\,d-0.082=0.75\,d+0.087\,d^2$$

$$0=0.087\,d^2-0.5\,d+0.082$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado, y obtenemos dos soluciones:

$$d_1=5.58\,metros$$

$$d_2=0.169\,metros$$

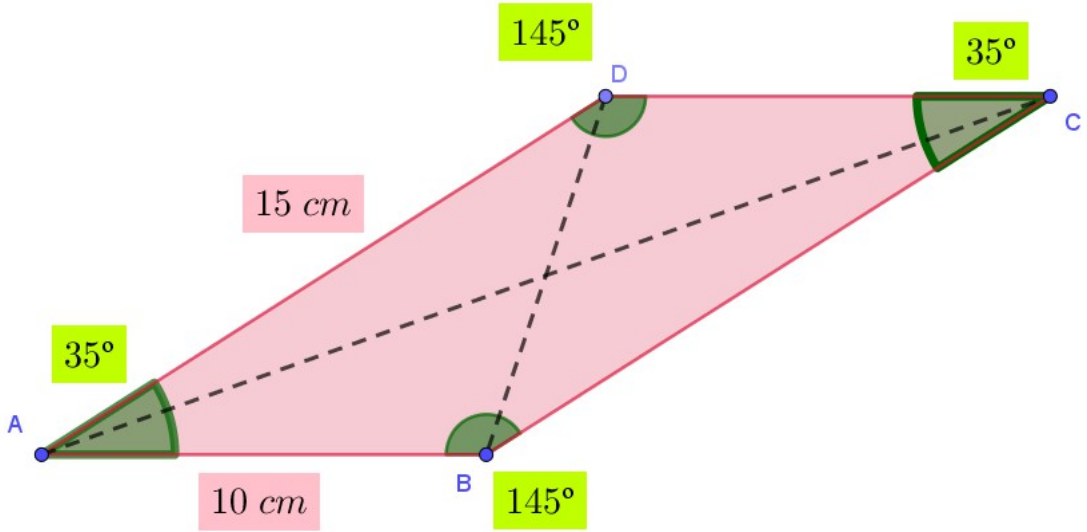
Es decir, hay dos soluciones porque el ángulo de giro de la cabeza de 5º puede ocurrir tanto si estamos muy lejos del cuadro (primera solución) como si estamos muy cerca (segunda solución).

9. Calcula las diagonales de un paralelogramo cuyos lados miden 10 y 15 centímetros respectivamente, si uno de sus ángulos mide 35º. (ayuda: un paralelogramo es un polígono de cuatro lados, que son paralelos dos a dos).

Dibujamos el parelogramo con las condiciones del enunciado. Si el vértice A es de 35º, por simetría, el vértice C también será 35º.

Los cuatro ángulos internos de un cuadrilátero suman 360º, por lo tanto si A y C suman 70º, los vértices B y C deben sumar 360º – 70º = 290º. Por lo que el vértice B será de 145º y el vértice D también será de 145º.

IMPORTANTE: Las diagonales NO dividen a los vértices internos por la mitad. Eso solo ocurre si los cuatro lados del paralelogramo tuvieran la misma longitud (como ocurre en el rombo o en el cuadrado).



En el triángulo ABD aplicamos el teorema del coseno para obtener la longitud del lado BD, que es una de las diagonales del paralelogramo. Conocemo el valor del ángulo A, conocemos la longitud d ellos dos lados que forman en vértice A, por lo que podemos sacar la longitud del lado opuesto al vértice A:

$$\overline{BD}^2 = 15^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \cos(35^o)$$

$$\overline{BD}^2 = 79.25$$

$\overline{BD} = 8.90\, cm$ (al ser una distancia, nos quedamos solo con la parte positivo de aplicar raíz cuadrada)

Razonamos igual con el triángulo de vértices ABC, donde conocemos el ángulo B de 145º y conocemos la longitud de los dos lados que forman ese vértice.

$$\overline{AC}^2 = 15^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \cos(145^o)$$

$$\overline{AC}^2 = 15^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \cos(145^o)$$

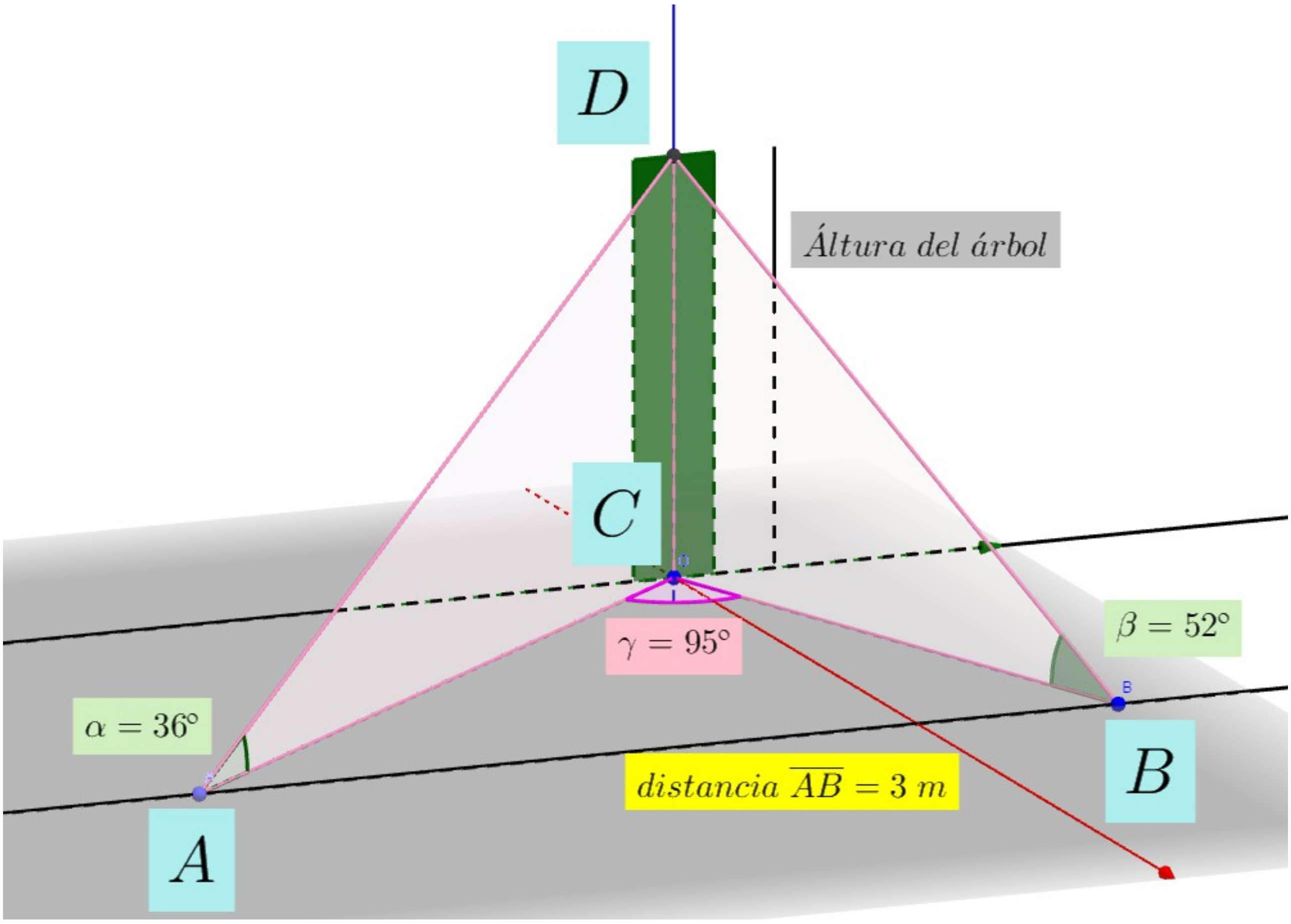
$$\overline{AC}^2 = 570.75$$

$$\overline{AC} = 23.89\, cm$$

10. Dos puntos A y B están separados por 3 m a lo largo de la orilla de un río. Desde A se ve la copa de un árbol situado en la otra orilla bajo un ángulo de 36º. Y desde B la copa del árbol se aprecia bajo un ángulo de 52º.

El ángulo que separa A y B, visto desde la base del árbol, es de 95º. Calcula la altura del árbol.

El dibujo es muy importante en este ejercicio, porque estamos ante un problema tridimensional. El plano del triángulo ACD es distino al plano del triángulo BCD, y también es distinto al plano del suelo que contiene al triángulo ABC.



El triábgulo ACD es rectángulo en el vértice C. Por lo que podemos definir la tangente como:

$tg(\alpha)=\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$ → siendo $\overline{CD}$ la altura del árbol, que llamaremos h → $tg(36°)=\frac{h}{\overline{AC}}$

De esta expresión, despejamos el valor del segmento $\overline{AC}$ → $\overline{AC}=\frac{h}{tg(36°)}$

Igualmente, el triábgulo BCD es rectábgulo en el vértice C. Por lo que definimos:

$tg(\beta)=\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}$ → siendo $\overline{CD}$ la altura del árbol, que llamaremos h → $tg(52°)=\frac{h}{\overline{BC}}$

Despejamos el valor del segmento $\overline{BC}$ → $\overline{BC}=\frac{h}{tg(52°)}$

En el triángulo ABC contenido en el suelo, podemos aplicar el Teorema del coseno:

$$3^2=(\overline{AC})^2+(\overline{BC})^2-2\cdot(\overline{AC})\cdot(\overline{BC})\cdot\cos(95^o)$$

Los valores de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ los sustituimos de las expresiones que obtuvimos anteriormente.

$$3^2=\left(\frac{h}{tg(36^o)}\right)^2+\left(\frac{h}{tg(52^o)}\right)^2-2\cdot\left(\frac{h}{tg(36^o)}\right)\cdot\left(\frac{h}{tg(52^o)}\right)\cdot\cos(95^o)$$

Operamos, calculando con la calculadora las razones trigonométricas de los ángulos que aparecen:

$$9=\frac{h^2}{0.53}+\frac{h^2}{1.64}-h^2\cdot(-0.19)$$

$$9=1.89\,h^2+0.61\,h^2+0.19\,h^2$$

$$9=2.69\,h^2$$

$$h=1.83\,m$$