Nama : Siti Nurkhofifah Aliyah
NIM : 23030130017
Kelas : Pendidikan Matematika A 2023

Visualisasi dan Perhitungan Geometri dengan EMT

Euler menyediakan beberapa fungsi untuk melakukan visualisasi dan perhitungan geometri, baik secara numerik maupun analitik (seperti biasanya tentunya, menggunakan Maxima). Fungsi-fungsi untuk visualisasi dan perhitungan geometeri tersebut disimpan di dalam file program "geometry.e", sehingga file tersebut harus dipanggil sebelum menggunakan fungsi-fungsi atau perintah-perintah untuk geometri.

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

Fungsi-fungsi Geometri

Fungsi-fungsi untuk Menggambar Objek Geometri:

```
defaultd:=textheight()*1.5: nilai asli untuk parameter d
setPlotrange(x1,x2,y1,y2): menentukan rentang x dan y padabidang
                           koordinat
setPlotRange(r): pusat bidang koordinat (0,0) dan batas-batas
                 sumbu-x dan y adalah -r sd r
plotPoint (P, "P"): menggambar titik P dan diberi label "P"
plotSegment (A,B, "AB", d): menggambar ruas garis AB, diberi label
                            "AB" sejauh d
plotLine (g, "g", d): menggambar garis g diberi label "g" sejauh d
plotCircle (c,"c",v,d): Menggambar lingkaran c dan diberi label "c"
plotLabel (label, P, V, d): menuliskan label pada posisi P
```

Fungsi-fungsi Geometri Analitik (numerik maupun simbolik):

```
turn(v, phi): memutar vektor v sejauh phi
turnLeft(v):   memutar vektor v ke kiri
turnRight(v):  memutar vektor v ke kanan
normalize(v): normal vektor v
crossProduct(v, w): hasil kali silang vektorv dan w.
lineThrough(A, B): garis melalui A dan B, hasilnya [a,b,c] sdh.
                   a+by=c.
lineWithDirection(A,v): garis melalui A searah vektor v
getLineDirection(g): vektor arah (gradien) garis g
getNormal(g): vektor normal (tegak lurus) garis g
getPointOnLine(g):  titik pada garis g
perpendicular(A, g):  garis melalui A tegak lurus garis g
parallel (A, g):  garis melalui A sejajar garis g
lineIntersection(g, h):  titik potong garis g dan h
projectToLine(A, g):   proyeksi titik A pada garis g
distance(A, B):  jarak titik A dan B
distanceSquared(A, B):  kuadrat jarak A dan B
quadrance(A, B): kuadrat jarak A dan B
areaTriangle(A, B, C):  luas segitiga ABC
computeAngle(A, B, C):   besar sudut <ABC
```

```
angleBisector(A, B, C): garis bagi sudut <ABC
circleWithCenter (A, r): lingkaran dengan pusat A dan jari-jari r
getCircleCenter(c):  pusat lingkaran c
getCircleRadius(c):  jari-jari lingkaran c
circleThrough(A,B,C):  lingkaran melalui A, B, C
middlePerpendicular(A, B): titik tengah AB
lineCircleIntersections(g, c): titik potong garis g dan lingkran c
circleCircleIntersections (c1,c2):  titik potong lingkaran c1 dan c2
planeThrough(A, B, C):  bidang melalui titik A, B, C
```

Fungsi-fungsi Khusus Untuk Geometri Simbolik:

```
getLineEquation (g,x,y): persamaan garis g dinyatakan dalam x dan y
getHesseForm (g,x,y,A): bentuk Hesse garis g dinyatakan dalam x dan
                        y dengan titik A pada sisi positif
                       (kanan/atas) garis
quad(A,B): kuadrat jarak AB
spread(a,b,c): Spread segitiga dengan panjang sisi-sisi a,b,c, yakni
               sin(alpha)^2 dengan alpha sudut yang menghadap sisi
               a.
crosslaw(a,b,c,sa): persamaan 3 quads dan 1 spread pada segitiga
                    dengan panjang sisi a, b, c.
triplespread(sa,sb,sc): persamaan 3 spread sa,sb,sc yang
                        memebntuk suatu segitiga
doublespread(sa): Spread sudut rangkap Spread 2*phi, dengan
                  sa=sin phi)^2 spread a.
```

Contoh 1: Luas, Lingkaran Luar, Lingkaran Dalam Segitiga

Untuk menggambar objek-objek geometri, langkah pertama adalah menentukan rentang sumbu-sumbu koordinat. Semua objek geometri akan digambar pada satu bidang koordinat, sampai didefinisikan bidang koordinat yang baru.

```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
```

Sekarang tetapkan tiga poin dan plot mereka.

```
>A=[1,0]; plotPoint(A,"A"); // definisi dan gambar tiga titik
>B=[0,1]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C");
```

Kemudian tiga segmen.

```
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
```

Fungsi geometri meliputi fungsi untuk membuat garis dan lingkaran. Format garis adalah [a,b,c], yang mewakili garis dengan persamaan ax+by=c.

```
>lineThrough(B,C) // garis yang melalui B dan C
```

```
[-1,  2,  2]
```

Hitunglah garis tegak lurus yang melalui A pada BC.

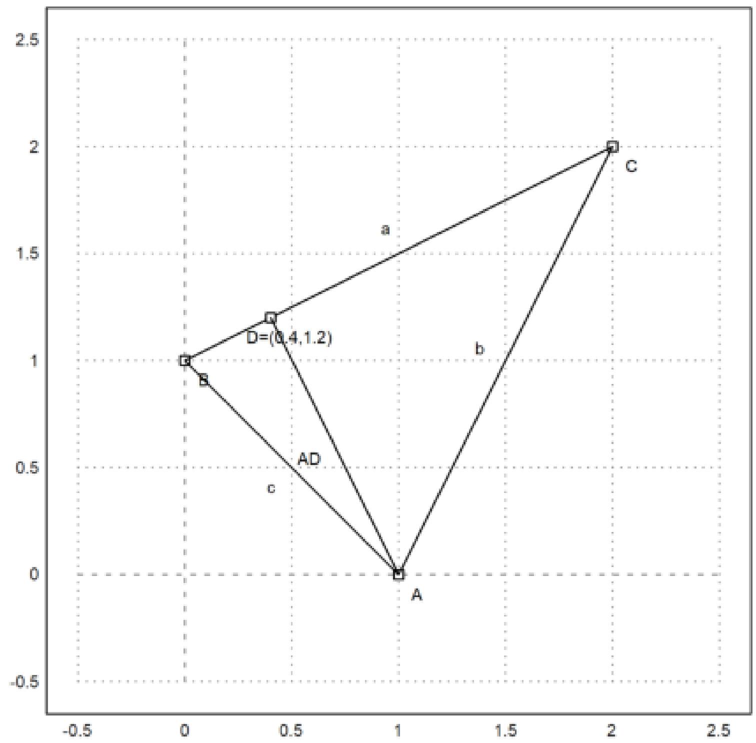
```
>h=perpendicular(A,lineThrough(B,C)); // garis h tegak lurus BC melalui A
```

Dan persimpangannya dengan BC.

```
>D=lineIntersection(h,lineThrough(B,C)); // D adalah titik potong h dan BC
```

Plot itu.

```
>plotPoint(D,value=1); // koordinat D ditampilkan
>aspect(1); plotSegment(A,D): // tampilkan semua gambar hasil plot...()
```



Hitung luas ABC:

$$L_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AD.BC.$$

```
>norm(A-D)*norm(B-C)/2 // AD=norm(A-D), BC=norm(B-C)
```

```
1.5
```

Bandingkan dengan rumus determinan.

```
>areaTriangle(A,B,C) // hitung luas segitiga langusng dengan fungsi
```

```
1.5
```

Cara lain menghitung luas segitigas ABC:

```
>distance(A,D)*distance(B,C)/2
```

```
1.5
```

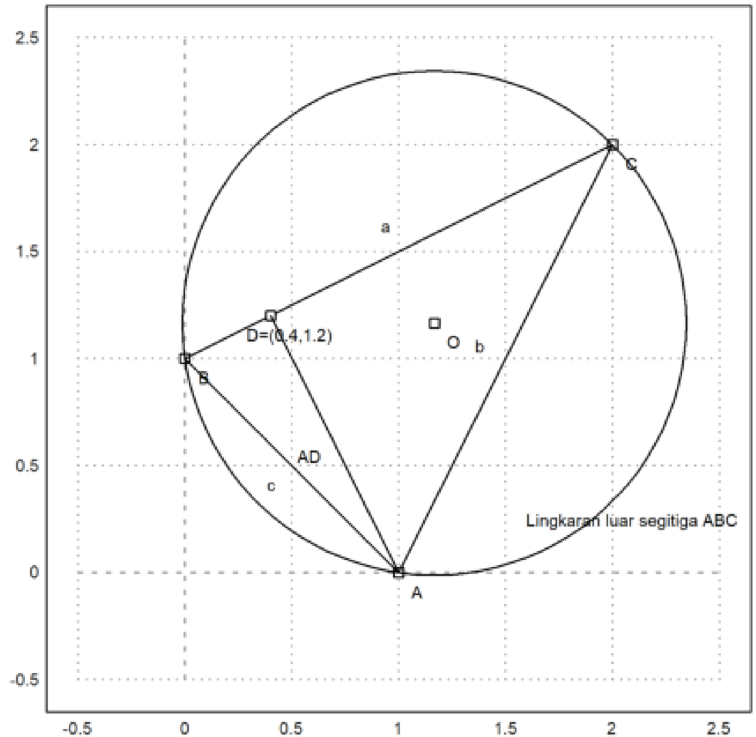
Sudut di C

```
>degprint(computeAngle(B,C,A))
```

```
36°52'11.63''
```

Sekarang lingkaran luar segitiga.

```
>c=circleThrough(A,B,C); // lingkaran luar segitiga ABC
>R=getCircleRadius(c); // jari2 lingkaran luar
>O=getCircleCenter(c); // titik pusat lingkaran c
>plotPoint(O,"O"); // gambar titik "O"
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC"):
```



Tampilkan koordinat titik pusat dan jari-jari lingkaran luar.

```
>O, R
```

```
[1.16667,  1.16667]
1.17851130198
```

Sekarang akan digambar lingkaran dalam segitiga ABC. Titik pusat lingkaran dalam adalah titik potong garis-garis bagi sudut.

```
>l=angleBisector(A,C,B); // garis bagi <ACB
>g=angleBisector(C,A,B); // garis bagi <CAB
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut
```

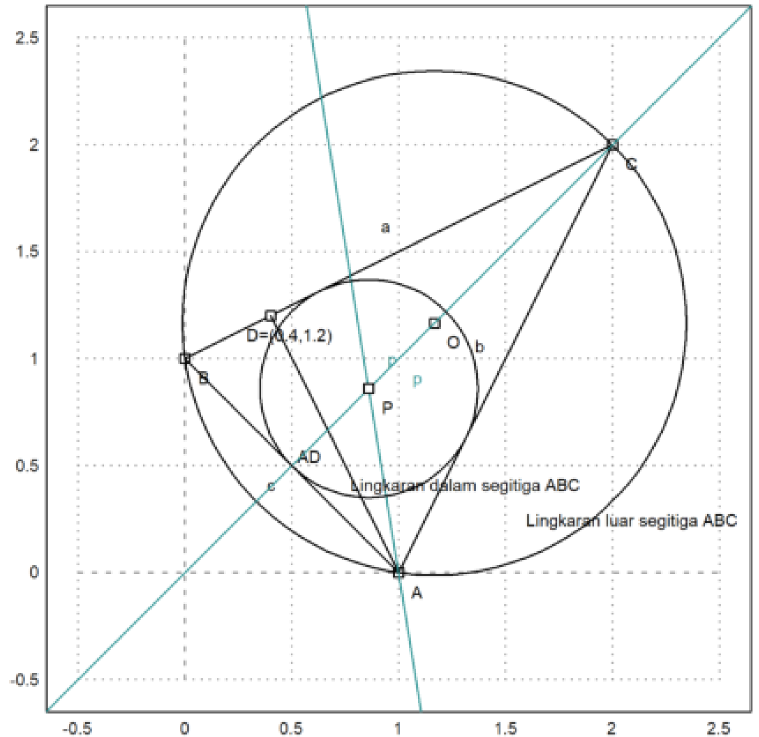
```
[0.86038,  0.86038]
```

Tambahkan semuanya ke plot.

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1); // gambar kedua garis bagi sudut
>plotPoint(P,"P"); // gambar titik potongnya
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))) // jari-jari lingkaran dalam
```

```
0.509653732104
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"): // gambar lingkaran dalam
```



a
D=(0.4,1.2)
O
b
B
P
AD
c
Lingkaran dalam segitiga ABC
Lingkaran luar segitiga ABC
C
A

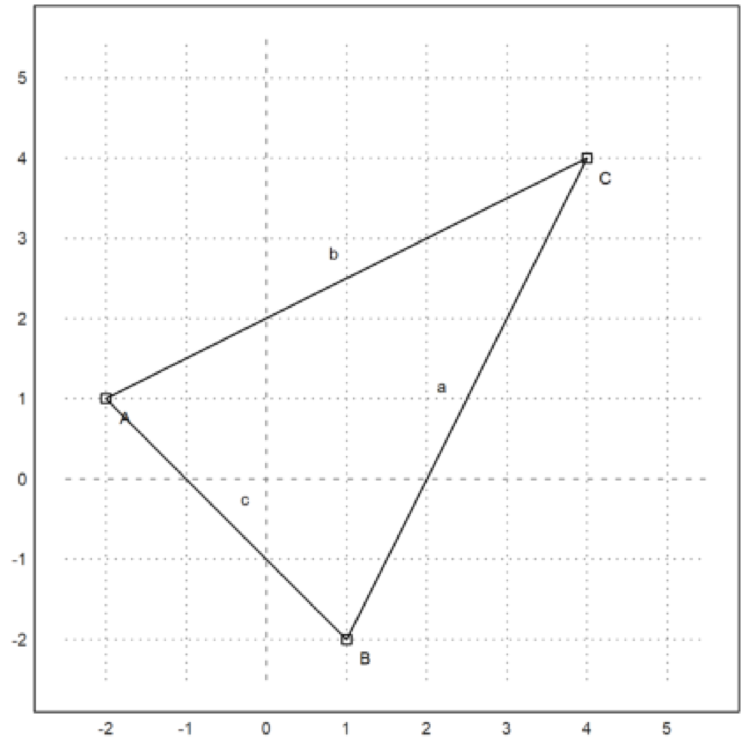
Latihan

1. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.

```
>setPlotRange(-2.5,5.5,-2.5,5.5);
>A=[-2,1]; plotPoint(A,"A");
>B=[1,-2]; plotPoint(B,"B");
>C=[4,4]; plotPoint(C,"C");
```

2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut. Merupakan segitiga apakah itu?

```
>plotSegment(A,B,"c")
>plotSegment(B,C,"a")
>plotSegment(A,C,"b")
>aspect(1):
```



Gambar di atas merupakan segitiga sama kaki

3. Hitung luas segitiga tersebut.

```
>areaTriangle(A,B,C) // hitung luas segitiga langusng dengan fungsi
```

```
13.5
```

4. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.

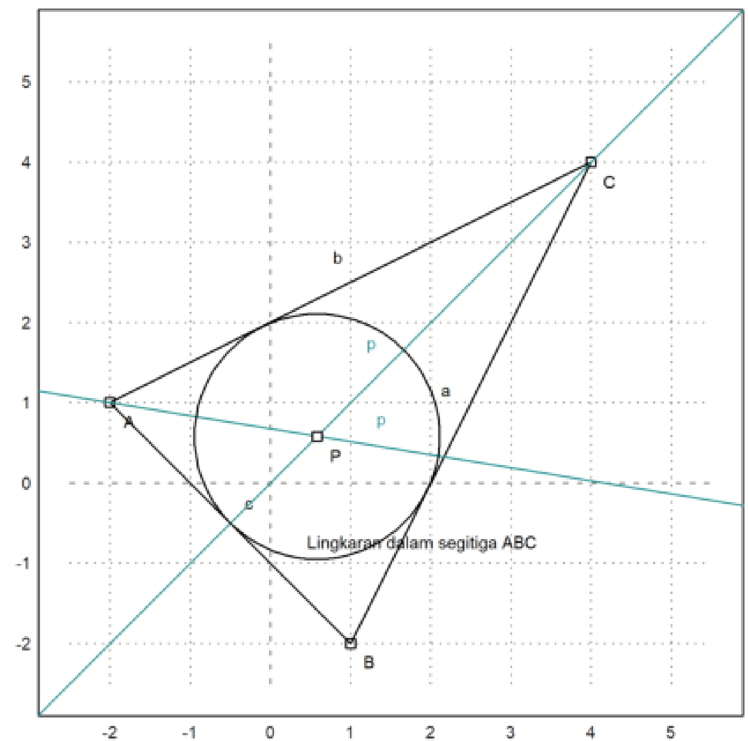
```
>l=angleBisector(A,C,B);
>g=angleBisector(C,A,B);
>P=lineIntersection(l,g)
```

```
[0.581139,  0.581139]
```

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1);
>plotPoint(P,"P");
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))) // jari-jari lingkaran dalam
```

```
1.52896119631
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"):
```



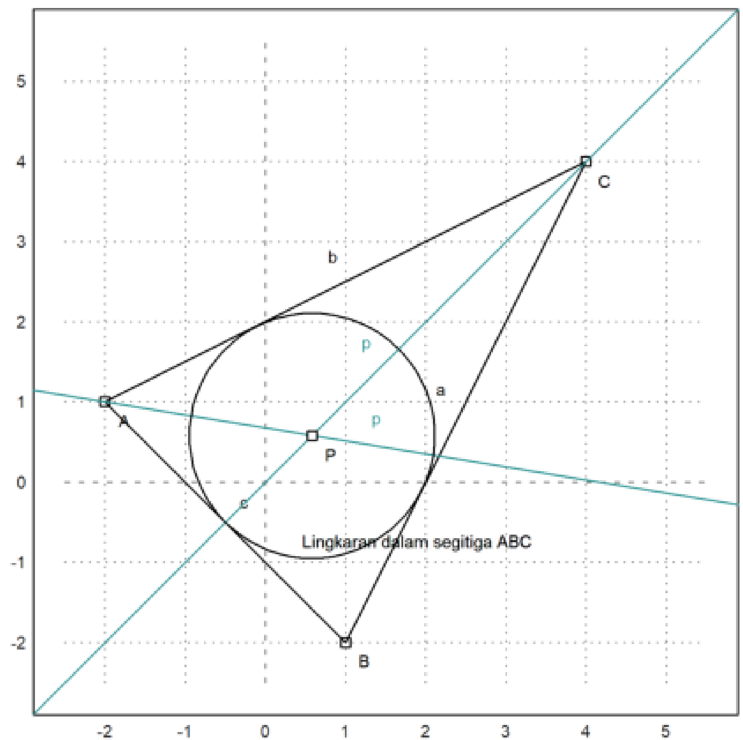
Jadi, terbukti bahwa garis bagi sudut yang ketiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.

5. Gambar jari-jari lingkaran dalam.

```
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))) // jari-jari lingkaran dalam
```

```
1.52896119631
```

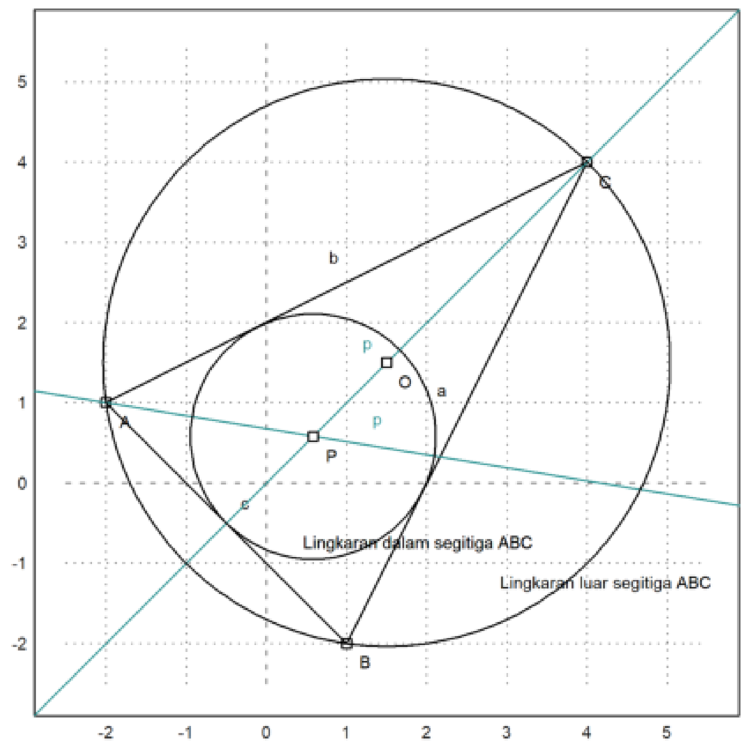
```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"):
```



6. Hitung luas lingkaran luar dan luas lingkaran dalam segitiga ABC. Adakah hubungan antara luas kedua lingkaran tersebut dengan luas segitiga ABC?

Lingkaran Luar

```
>c=circleThrough(A,B,C); // lingkaran luar segitiga ABC
>R=getCircleRadius(c); // jari2 lingkaran luar
>O=getCircleCenter(c); // titik pusat lingkaran c
>plotPoint(O,"O"); // gambar titik "O"
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC"):
```




```
>O, R
```

```
[1.5,  1.5]
3.53553390593
```

```
>pi*R^2 // Luas lingkaran luar
```

```
39.2699081699
```

Lingkaran Dalam

```
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B)))
```

```
1.52896119631
```

```
>pi*r^2
```

```
7.34417132895
```

```
>//reset
```

Contoh 2: Geometri Simbolik

Kita dapat menghitung geometri eksak dan simbolik menggunakan Maxima.

File geometri.e menyediakan fungsi yang sama (dan lebih banyak lagi) di Maxima. Namun, kita dapat menggunakan perhitungan simbolis sekarang.

```
>A &= [1,0]; B &= [0,1]; C &= [2,2]; // menentukan tiga titik A, B, C
```

Fungsi untuk garis dan lingkaran bekerja seperti fungsi Euler, tetapi memberikan perhitungan simbolis.

```
>c &= lineThrough(B,C) // c=BC
```

```
[- 1, 2, 2]
```

Kita bisa mendapatkan persamaan garis dengan mudah.

```
>$getLineEquation(c,x,y), $solve(%,y) | expand // persamaan garis c
```

$$\left[y=\frac{x}{2}+1\right]$$

$$\left[y=\frac{x}{2}+1\right]$$

```
>$getLineEquation(lineThrough(A,[x1,y1]),x,y) // persamaan garis melalui A dan (x1, y1)
```

$$\left(x_1-1\right)\,y-x\,y_1=-y_1$$

```
>h &= perpendicular(A,lineThrough(B,C)) // h melalui A tegak lurus BC
```

[2, 1, 2]

```
>Q &= lineIntersection(c,h) // Q titik potong garis c=BC dan h
```

```
2  6
[-, -]
5  5
```

```
>$projectToLine(A,lineThrough(B,C)) // proyeksi A pada BC
```

$$\left[\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right]$$

```
>$distance(A,Q) // jarak AQ
```

$$\frac{3}{\sqrt{5}}$$

```
>cc &= circleThrough(A,B,C); $cc // (titik pusat dan jari-jari) lingkaran melalui A, B, C
```

$$\left[\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \frac{5}{3\sqrt{2}}\right]$$

```
>r&=getCircleRadius(cc); $r , $float(r) // tampilkan nilai jari-jari
```

$$1.178511301977579$$

```
>$computeAngle(A,C,B) // nilai <ACB
```

$$\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$$

```
>$solve(getLineEquation(angleBisector(A,C,B),x,y),y)[1] // persamaan garis bagi <ACB
```

$$y = x$$

```
>P &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A)); $P // titik potong 2 garis bagi s
```

$$\left[\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{5}+2}{6}, \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{5}+2}{6}\right]$$

```
>P() // hasilnya sama dengan perhitungan sebelumnya
```

```
[0.86038,  0.86038]
```

```
>//reset
```

Garis dan Lingkaran yang Berpotongan

Tentu saja, kita juga dapat memotong garis dengan lingkaran, dan lingkaran dengan lingkaran.

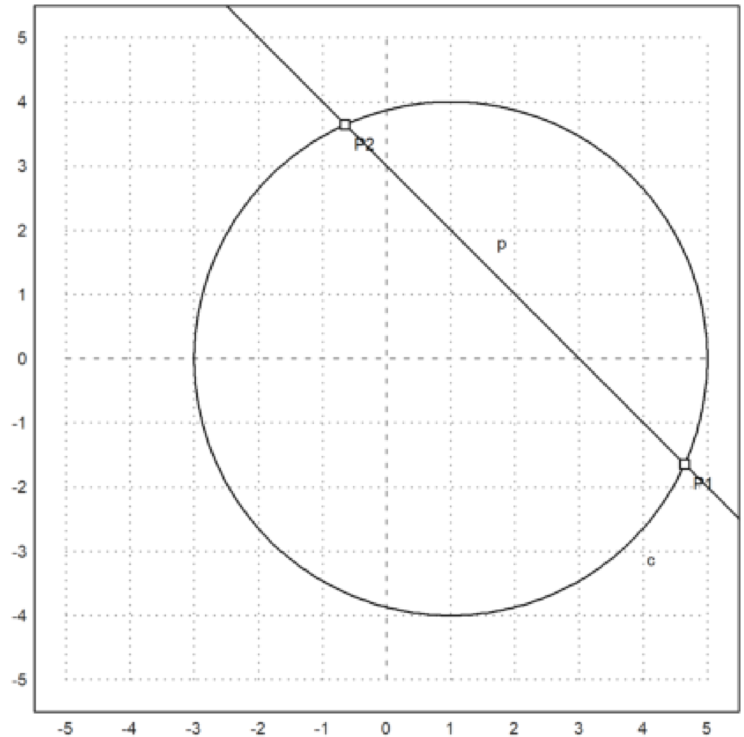
```
>A &:= [1,0]; c=circleWithCenter(A,4);
>B &:= [1,2]; C &:= [2,1]; l=lineThrough(B,C);
>setPlotRange(5); plotCircle(c); plotLine(l);
```

Perpotongan garis dengan lingkaran menghasilkan dua titik dan jumlah titik potong.

```
>{P1,P2,f}=lineCircleIntersections(l,c);
>P1, P2,
```

```
[4.64575,  -1.64575]
[-0.645751,  3.64575]
```

```
>plotPoint(P1); plotPoint(P2):
```



Begitu pula di Maxima.

```
>c &= circleWithCenter(A,4) // lingkaran dengan pusat A jari-jari 4
```

```
[1, 0, 4]
```

```
>l &= lineThrough(B,C) // garis l melalui B dan C
```

```
[1, 1, 3]
```

```
>$lineCircleIntersections(l,c) | radcan, // titik potong lingkaran c dan garis l
```

$$\left[\left[\sqrt{7}+2, 1-\sqrt{7}\right], \left[2-\sqrt{7}, \sqrt{7}+1\right]\right]$$

Akan ditunjukkan bahwa sudut-sudut yang menghadap bsuusr yang sama adalah sama besar.

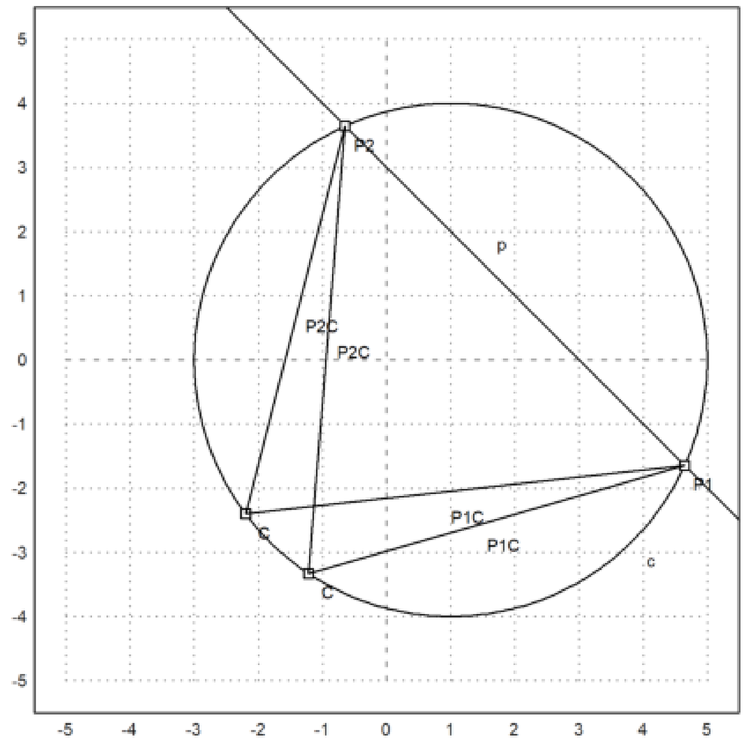
```
>C=A+normalize([-2,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

```
69°17'42.68''
```

```
>C=A+normalize([-4,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

69°17’42.68’’

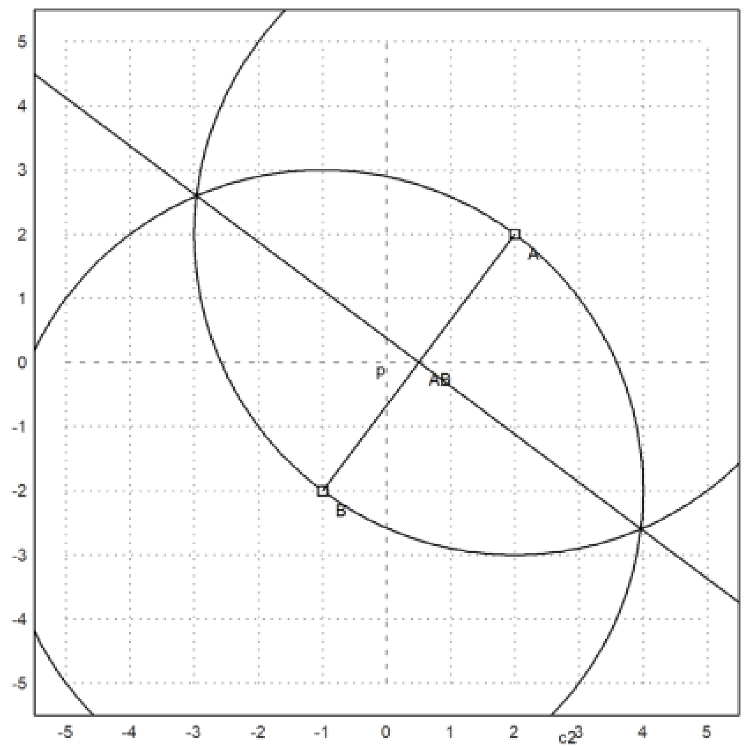
```
>insimg;
```



Berikut adalah langkah-langkah menggambar garis sumbu ruas garis AB:

1. Gambar lingkaran dengan pusat A melalui B.
2. Gambar lingkaran dengan pusat B melalui A.
3. Tarik garis melallui kedua titik potong kedua lingkaran tersebut. Garis ini merupakan garis sumbu (melalui titik tengah dan tegak lurus) AB.

```
>A=[2,2]; B=[-1,-2];
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B));
>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);
>l=lineThrough(P1,P2);
>setPlotRange(5); plotCircle(c1); plotCircle(c2);
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l):
```



Selanjutnya, kami melakukan hal yang sama di Maxima dengan koordinat umum.

```
>A &= [a1,a2]; B &= [b1,b2];
>c1 &= circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2 &= circleWithCenter(B,distance(A,B));
>P &= circleCircleIntersections(c1,c2); P1 &= P[1]; P2 &= P[2];
```

Persamaan untuk persimpangan cukup terlibat. Tetapi kita dapat menyederhanakannya, jika kita memecahkan y.

```
>g &= getLineEquation(lineThrough(P1,P2),x,y);
>$solve(g,y)
```

$$\left[y=\frac{-\left(2\,b_1-2\,a_1\right)\,x+{b_2}^2+{b_1}^2-{a_2}^2-{a_1}^2}{2\,b_2-2\,a_2}\right]$$

Ini memang sama dengan tegak lurus tengah, yang dihitung dengan cara yang sama sekali berbeda.

```
>$solve(getLineEquation(middlePerpendicular(A,B),x,y),y)
```

$$\left[y=\frac{-\left(2\,b_1-2\,a_1\right)\,x+{b_2}^2+{b_1}^2-{a_2}^2-{a_1}^2}{2\,b_2-2\,a_2}\right]$$

```
>h &=getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y);
>$solve(h,y)
```

$$\left[y=\frac{\left(b_2-a_2\right)\,x-a_1\,b_2+a_2\,b_1}{b_1-a_1}\right]$$

Perhatikan hasil kali gradien garis g dan h adalah:

$$\frac{-(b_1 - a_1)}{(b_2 - a_2)} \times \frac{(b_2 - a_2)}{(b_1 - a_1)} = -1.$$

Artinya kedua garis tegak lurus.

Rumus Heron menyatakan bahwa luas segitiga dengan panjang sisi-sisi a, b dan c adalah:

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{dengan } s = (a+b+c)/2,$$

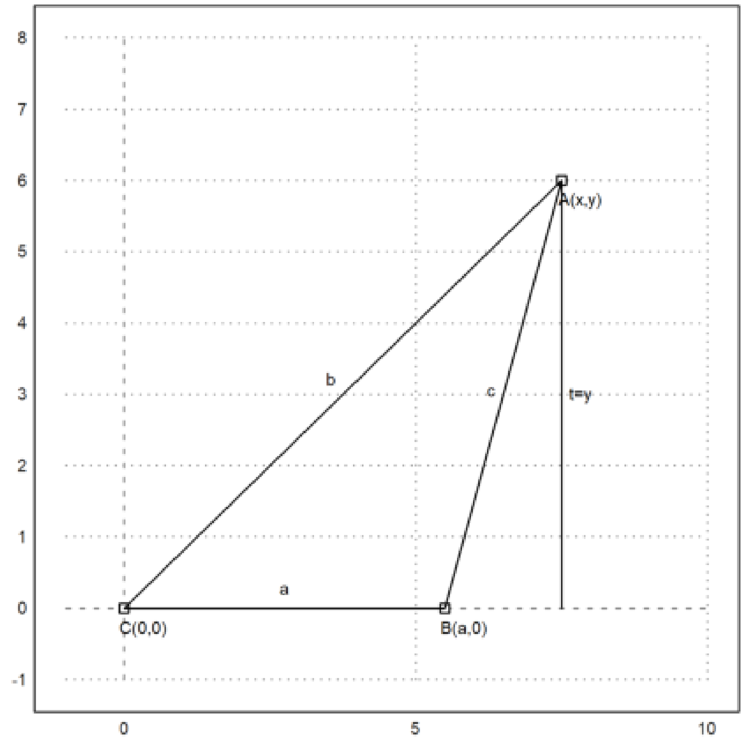
Untuk membuktikan hal ini kita misalkan C(0,0), B(a,0) dan A(x,y), b=AC, c=AB. Luas segitiga ABC adalah

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \times y.$$

Nilai y didapat dengan menyelesaikan sistem persamaan:

$$x^2 + y^2 = b^2, \quad (x-a)^2 + y^2 = c^2.$$

```
>setPlotRange(-1,10,-1,8); plotPoint([0,0], "C(0,0)"); plotPoint([5.5,0], "B(a,0)");  ...
>plotPoint([7.5,6], "A(x,y)");
>plotSegment([0,0],[5.5,0], "a",25); plotSegment([5.5,0],[7.5,6],"c",15);  ...
>plotSegment([0,0],[7.5,6],"b",25);
>plotSegment([7.5,6],[7.5,0],"t=y",25):
```




```
>sol &= solve([x^2+y^2=b^2,(x-a)^2+y^2=c^2],[x,y])
```

```
                 2    2    2
            - c  + b  + a
    [[x = --------------, y =
```

```
                   2 a
          4      2  2      2  2    4      2  2    4
  sqrt(- c  + 2 b  c  + 2 a  c  - b  + 2 a  b  - a )
- --------------------------------------------------],
                               2 a
        2    2    2
     - c  + b  + a
[x = --------------, y = 
          2 a
        4      2  2      2  2    4      2  2    4
sqrt(- c  + 2 b  c  + 2 a  c  - b  + 2 a  b  - a )
--------------------------------------------------]]
                             2 a
```

Ekstrak solusi y.

```
>ysol &= y with sol[2][2]; $'y=sqrt(factor(ysol^2))
```

$$y = \frac{\sqrt{(-c+b+a)\ (c-b+a)\ (c+b-a)\ (c+b+a)}}{2\ |a|}$$

Kami mendapatkan rumus Heron.

```
>function H(a,b,c) &= sqrt(factor((ysol*a/2)^2)); $'H(a,b,c)=H(a,b,c)
```

$$H\left(a , b , c\right)=\frac{\sqrt{\left(-c+b+a\right)\,\left(c-b+a\right)\,\left(c+b-a\right)\,\left(c+b+a\right)}}{4}$$

```
>$'Luas=H(3,4,5) // luas segitiga dengan panjang sisi-sisi 3, 4, 5
```

$$Luas=6$$

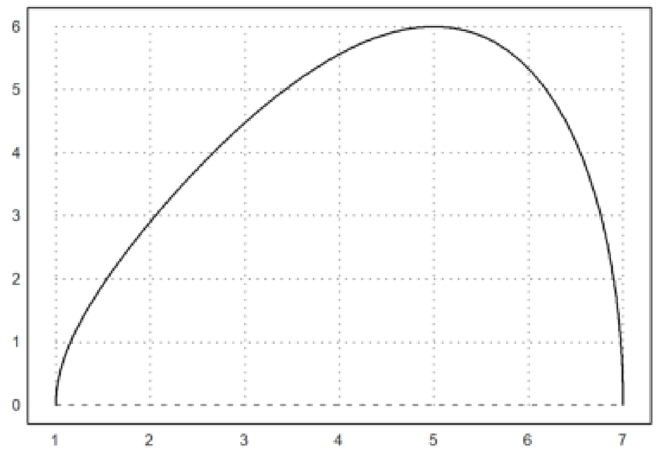
Tentu saja, setiap segitiga persegi panjang adalah kasus yang terkenal.

```
>H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5
```

6

Dan juga jelas, bahwa ini adalah segitiga dengan luas maksimal dan dua sisi 3 dan 4.

```
>aspect (1.5); plot2d(&H(3,4,x),1,7): // Kurva luas segitiga sengan panjang sisi 3, 4, x (1<= x <=7)
```



Kasus umum juga berfungsi.

```
>$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c)
```

$$\left[c=-\sqrt{b^2+a^2}, c=\sqrt{b^2+a^2}, c=0\right]$$

Sekarang mari kita cari himpunan semua titik di mana b+c=d untuk beberapa konstanta d. Diketahui bahwa ini adalah elips.

```
>s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1
```

$$\left[x=\frac{\left(d-c\right)^2-c^2+a^2}{2\,a} , y=\frac{\sqrt{-\left(d-c\right)^4+2\,c^2\,\left(d-c\right)^2+2\,a^2\,\left(d-c\right)^2-c^4+2\,a^2\,c^2-a^4}}{2\,a}\right]$$

Dan buat fungsi ini.

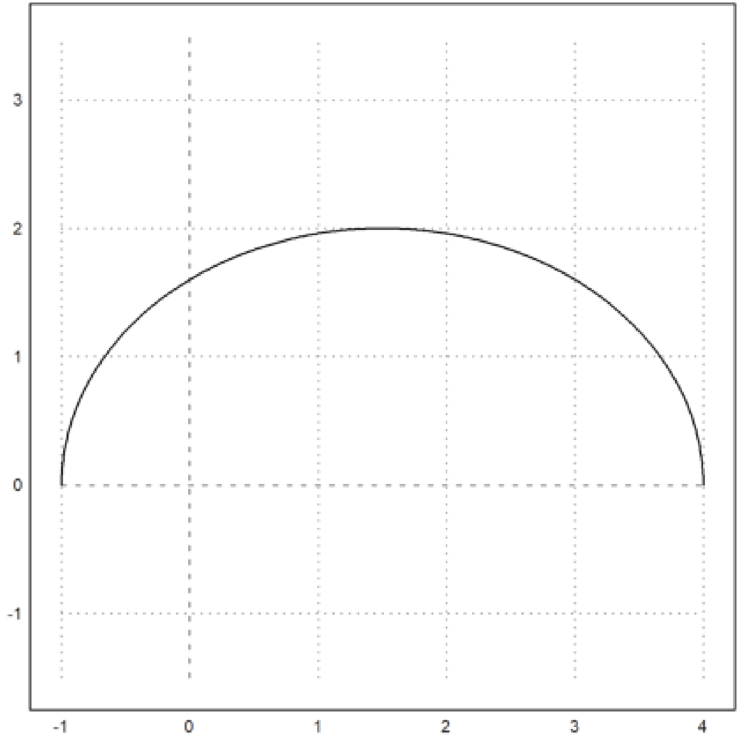
```
>function fx(a,c,d) &= rhs(s1[1]); $fx(a,c,d), function fy(a,c,d) &= rhs(s1[2]); $fy(a,c,d)
```

$$\frac{\sqrt{-\left(d-c\right)^4+2\,c^2\,\left(d-c\right)^2+2\,a^2\,\left(d-c\right)^2-c^4+2\,a^2\,c^2-a^4}}{2\,a}$$

$$\frac{\sqrt{-\left(d-c\right)^4+2\,c^2\,\left(d-c\right)^2+2\,a^2\,\left(d-c\right)^2-c^4+2\,a^2\,c^2-a^4}}{2\,a}$$

Sekarang kita bisa menggambar setnya. Sisi b bervariasi dari 1 hingga 4. Diketahui bahwa kita mendapatkan elips.

```
>aspect(1); plot2d(&fx(3,x,5),&fy(3,x,5),xmin=1,xmax=4,square=1):
```



Kita dapat memeriksa persamaan umum untuk elips ini, yaitu.

$$\frac{(x-x_m)^2}{u^2}+\frac{(y-y_m)}{v^2}=1,$$

di mana (xm,ym) adalah pusat, dan u dan v adalah setengah sumbu.

```
>$ratsimp((fx(a,c,d)-a/2)^2/u^2+fy(a,c,d)^2/v^2 with [u=d/2,v=sqrt(d^2-a^2)/2])
```

$$1$$

Kita lihat bahwa tinggi dan luas segitiga adalah maksimal untuk x=0. Jadi luas segitiga dengan a+b+c=d maksimal jika segitiga sama sisi. Kami ingin menurunkan ini secara analitis.

```
>eqns &= [diff(H(a,b,d-(a+b))^2,a)=0,diff(H(a,b,d-(a+b))^2,b)=0]; $eqns
```

$$\left[\frac{d\,\left(d-2\,a\right)\,\left(d-2\,b\right)}{8}-\frac{\left(-d+2\,b+2\,a\right)\,d\,\left(d-2\,b\right)}{8}=0 , \frac{d\,\left(d-2\,a\right)\,\left(d-2\,b\right)}{8}-\frac{\left(-d+2\,b+2\,a\right)\,d\,\left(d-2\,a\right)}{8}=0\right]$$

Kami mendapatkan beberapa minima, yang termasuk dalam segitiga dengan satu sisi 0, dan solusinya a=b=c=d/3.

```
>$solve(eqns,[a,b])
```

$$\left[\left[a=\frac{d}{3},b=\frac{d}{3}\right],\left[a=0,b=\frac{d}{2}\right],\left[a=\frac{d}{2},b=0\right],\left[a=\frac{d}{2},b=\frac{d}{2}\right]\right]$$

Ada juga metode Lagrange, memaksimalkan H(a,b,c)ˆ2 terhadap a+b+d=d.

```
>&solve([diff(H(a,b,c)^2,a)=la,diff(H(a,b,c)^2,b)=la, ...
>   diff(H(a,b,c)^2,c)=la,a+b+c=d],[a,b,c,la])
```

```
                     d      d
          [[a = 0, b = -, c = -, la = 0],
                     2      2
      d              d                   d      d
  [a = -, b = 0, c = -, la = 0], [a = -, b = -, c = 0, la = 0],
      2              2                   2      2
                                    3
      d      d      d              d
  [a = -, b = -, c = -, la = ---]]
      3      3      3              108
```

Kita bisa membuat plot situasinya

Pertama-tama atur poin di Maxima.

```
>A &= at([x,y],sol[2]); $A
```

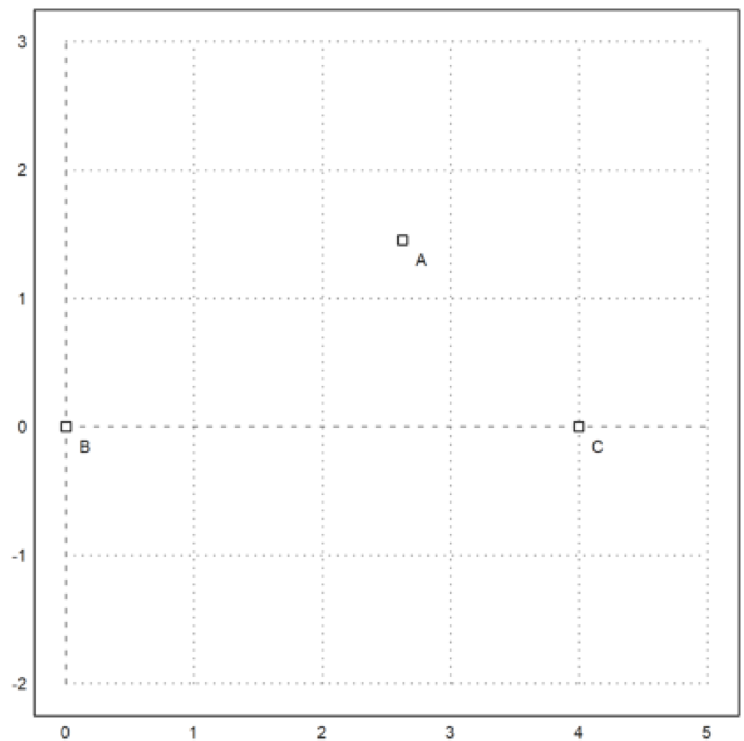
$$\left[\frac{-c^2+b^2+a^2}{2\,a} , \frac{\sqrt{-c^4+2\,b^2\,c^2+2\,a^2\,c^2-b^4+2\,a^2\,b^2-a^4}}{2\,a} \right]$$

```
>B &= [0,0]; $B, C &= [a,0]; $C
```

$$[a, 0]$$

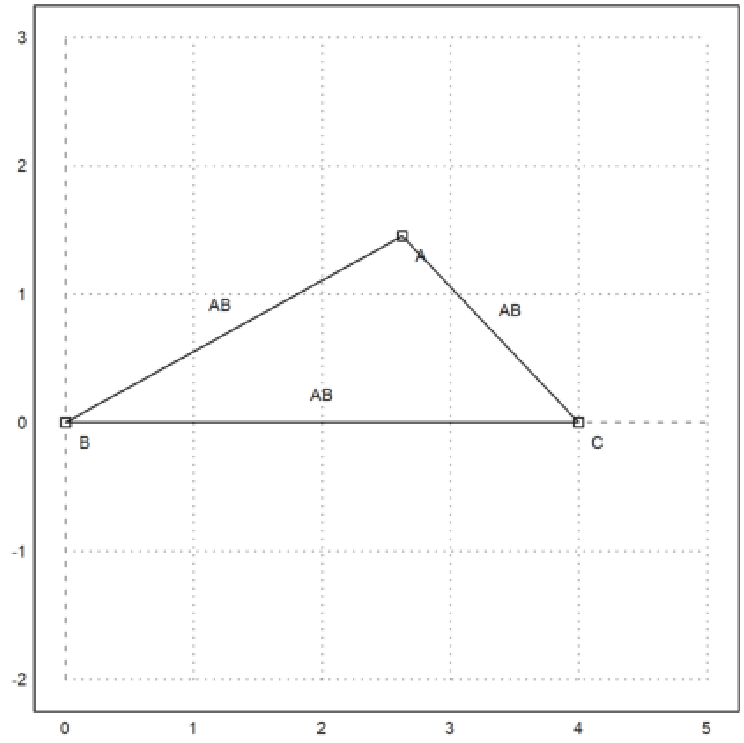
Kemudian atur rentang plot, dan plot titik-titiknya.

```
>setPlotRange(0,5,-2,3); ...
>a=4; b=3; c=2; ...
>plotPoint(mxmeval("B"),"B"); plotPoint(mxmeval("C"),"C"); ...
>plotPoint(mxmeval("A"),"A"):
```



Plot segmen.

```
>plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); ...
>plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("C")); ...
>plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("A")):
```



Hitung tegak lurus tengah di Maxima.

```
>h &= middlePerpendicular(A,B); g &= middlePerpendicular(B,C);
```

Dan pusat lingkaran.

```
>U &= lineIntersection(h,g);
```

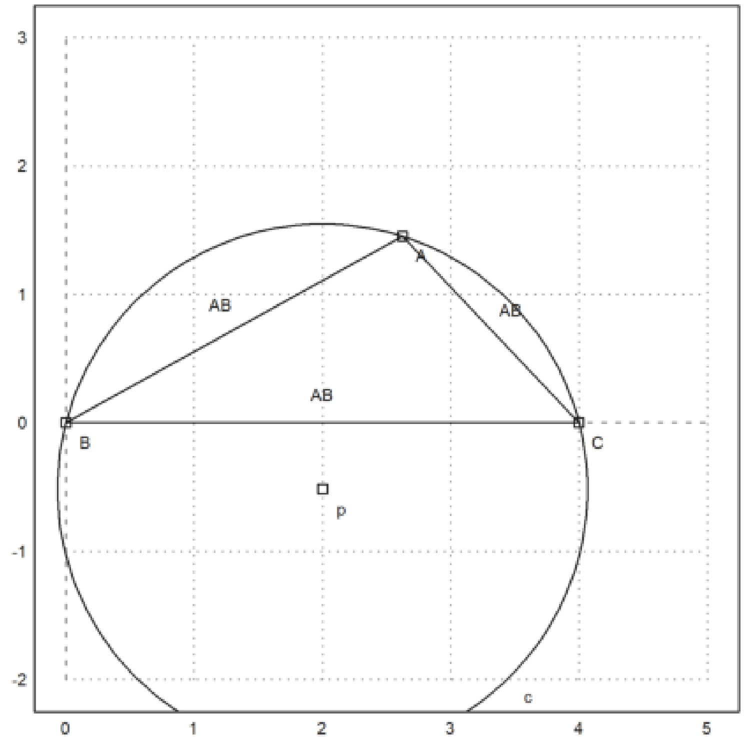
Kami mendapatkan rumus untuk jari-jari lingkaran.

```
>&assume(a>0,b>0,c>0); $distance(U,B) | radcan
```

$$\frac{i\,a\,b\,c}{\sqrt{c-b-a}\,\sqrt{c-b+a}\,\sqrt{c+b-a}\,\sqrt{c+b+a}}$$

Mari kita tambahkan ini ke plot.

```
>plotPoint(U()); ...
>plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmeval("distance(U,C)"))):
```



Menggunakan geometri, kami memperoleh rumus sederhana

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = 2r$$

untuk radiusnya. Kami dapat memeriksa, apakah ini benar dengan Maxima. Maxima akan memfaktorkan ini hanya jika kita kuadratkan.

```
>$c^2/sin(computeAngle(A,B,C))^2  | factor
```

$$-\frac{4\,a^2\,b^2\,c^2}{\left(c-b-a\right)\,\left(c-b+a\right)\,\left(c+b-a\right)\,\left(c+b+a\right)}$$

Contoh 4: Garis Euler dan Parabola

Garis Euler adalah garis yang ditentukan dari sembarang segitiga yang tidak sama sisi. Ini adalah garis tengah segitiga, dan melewati beberapa titik penting yang ditentukan dari segitiga, termasuk orthocenter, circumcenter, centroid, titik Exeter dan pusat lingkaran sembilan titik segitiga.

Untuk demonstrasi, kami menghitung dan memplot garis Euler dalam sebuah segitiga.

Pertama, kita mendefinisikan sudut-sudut segitiga di Euler. Kami menggunakan definisi, yang terlihat dalam ekspresi simbolis.

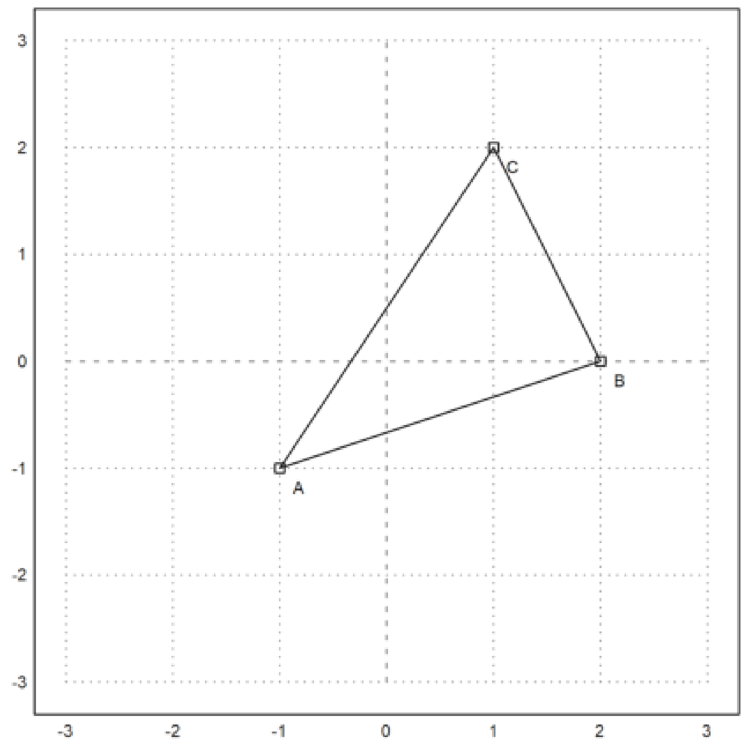
```
>A::=[-1,-1]; B::=[2,0]; C::=[1,2];
```

Untuk memplot objek geometris, kami menyiapkan area plot, dan menambahkan titik ke sana. Semua plot objek geometris ditambahkan ke plot saat ini.

```
>setPlotRange(3); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
```

Kita juga bisa menambahkan sisi segitiga.

```
>plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,A,""):
```



Berikut adalah luas segitiga, menggunakan rumus determinan. Tentu saja, kita harus mengambil nilai absolut dari hasil ini.

```
>$areaTriangle(A,B,C)
```

$$-\frac{7}{2}$$

Kita dapat menghitung koefisien sisi c.

```
>c &= lineThrough(A,B)
```

```
[- 1, 3, - 2]
```

Dan juga dapatkan rumus untuk baris ini.

```
>$getLineEquation(c,x,y)
```

$$3\,y-x=-2$$

Untuk bentuk Hesse, kita perlu menentukan sebuah titik, sehingga titik tersebut berada di sisi positif dari bentuk Hesse. Memasukkan titik menghasilkan jarak positif ke garis.

```
>$getHesseForm(c,x,y,C), $at(%,[x=C[1],y=C[2]])
```

$$\frac{7}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{7}{\sqrt{10}}$$

Sekarang kita hitung lingkaran luar ABC.

```
>LL &= circleThrough(A,B,C); $getCircleEquation(LL,x,y)
```

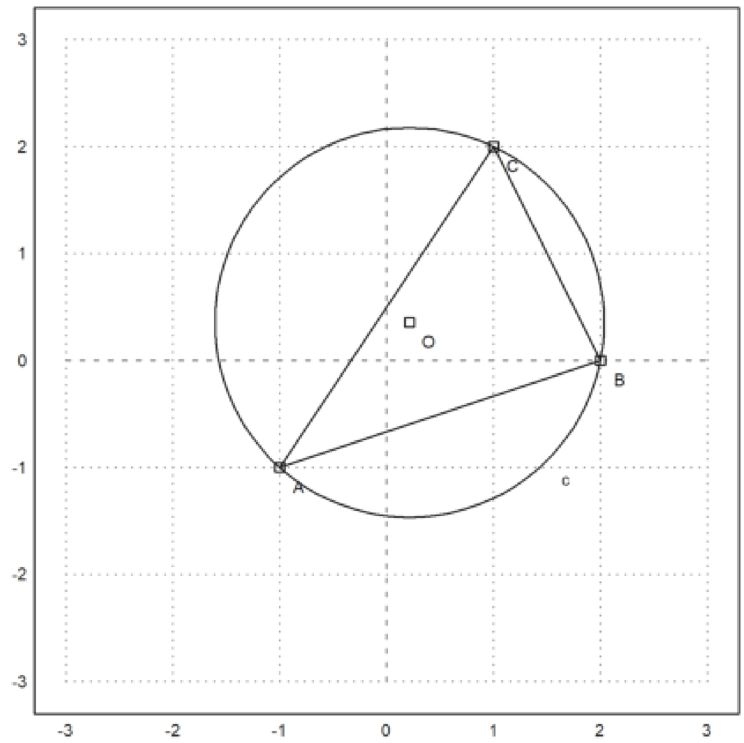
$$\left(y-\frac{5}{14}\right)^2+\left(x-\frac{3}{14}\right)^2=\frac{325}{98}$$

```
>O &= getCircleCenter(LL); $O
```

$$\left[\frac{3}{14},\frac{5}{14}\right]$$

Gambarkan lingkaran dan pusatnya. Cu dan U adalah simbolis. Kami mengevaluasi ekspresi ini untuk Euler.

```
>plotCircle(LL()); plotPoint(O(),"O"):
```



Kita dapat menghitung perpotongan ketinggian di ABC (orthocenter) secara numerik dengan perintah berikut.

```
>H &= lineIntersection(perpendicular(A,lineThrough(C,B)),...
>  perpendicular(B,lineThrough(A,C))); $H
```

$$\left[\frac{11}{7},\frac{2}{7}\right]$$

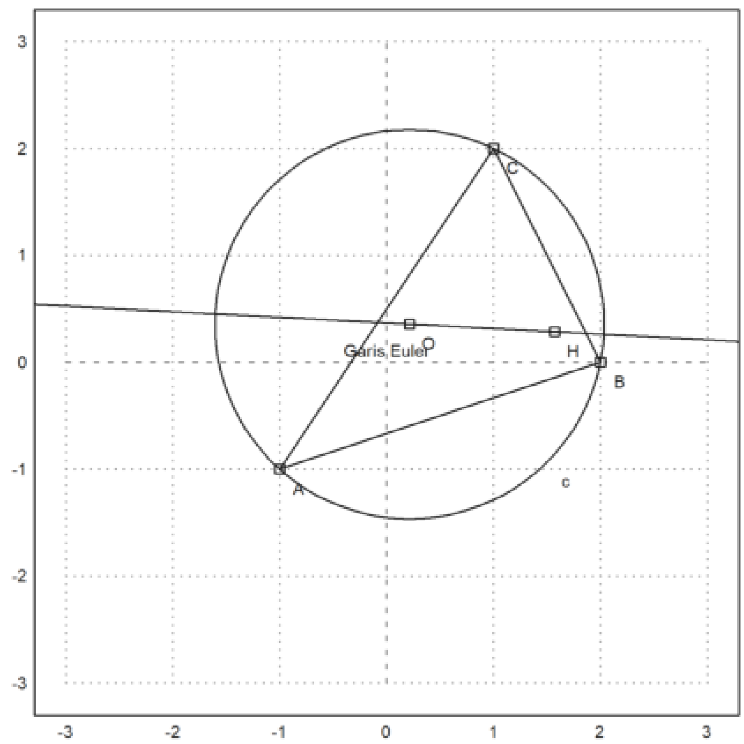
Sekarang kita dapat menghitung garis Euler dari segitiga.

```
>el &= lineThrough(H,O); $getLineEquation(el,x,y)
```

$$-\frac{19\,y}{14}-\frac{x}{14}=-\frac{1}{2}$$

Tambahkan ke plot kami.

```
>plotPoint(H(),"H"); plotLine(el(),"Garis Euler"):
```

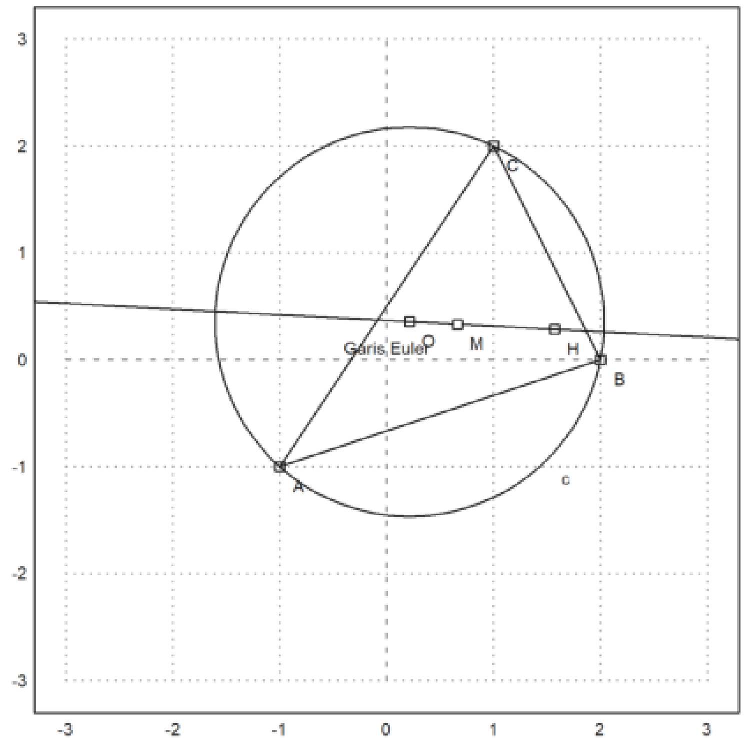


Pusat gravitasi harus berada di garis ini.

```
>M &= (A+B+C)/3; $getLineEquation(el,x,y) with [x=M[1],y=M[2]]
```

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

```
>plotPoint(M(),"M"): // titik berat
```



Teorinya memberitahu kita MH=2*MO. Kita perlu menyederhanakan dengan radcan untuk mencapai ini.

```
>$distance(M,H)/distance(M,O)|radcan
```

$$2$$

Fungsi termasuk fungsi untuk sudut juga.

```
>$computeAngle(A,C,B), degprint(%())
```

$$\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{5}\,\sqrt{13}}\right)$$

```
60°15’18.43’’
```

Persamaan untuk pusat incircle tidak terlalu bagus.

```
>Q &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A))|radcan; $Q
```

$$\left[\frac{\left(2^{\frac{3}{2}}+1\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}-15\,\sqrt{2}+3}{14}, \frac{\left(\sqrt{2}-3\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}+5\,2^{\frac{3}{2}}+5}{14}\right]$$

Mari kita hitung juga ekspresi untuk jari-jari lingkaran yang tertulis.

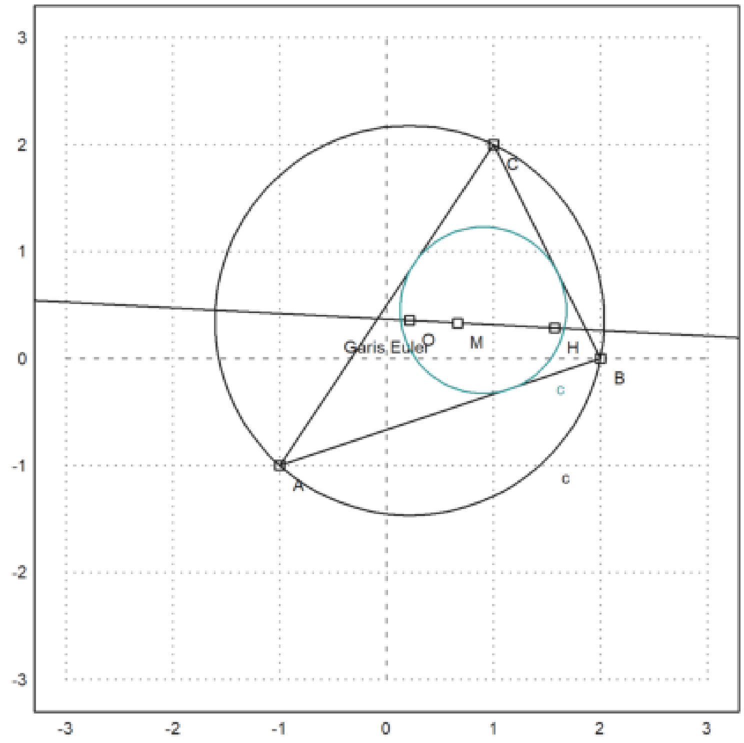
```
>r &= distance(Q,projectToLine(Q,lineThrough(A,B)))|ratsimp; $r
```

$$\frac{\sqrt{\left(-41\,\sqrt{2}-31\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}+115\,\sqrt{2}+614}}{7\,\sqrt{2}}$$

```
>LD &=  circleWithCenter(Q,r); // Lingkaran dalam
```

Mari kita tambahkan ini ke plot.

```
>color(5); plotCircle(LD()):
```



Parabola

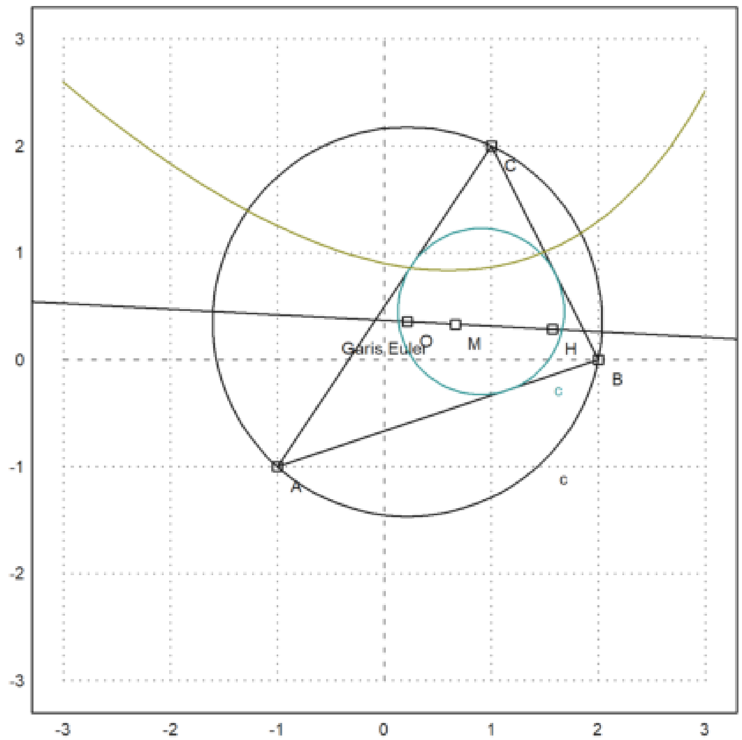
Selanjutnya akan dicari persamaan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama ke titik C dan ke garis AB.

```
>p &= getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

$$\frac{3\,y-x+2}{\sqrt{10}}-\sqrt{\left(2-y\right)^2+\left(1-x\right)^2}=0$$

Persamaan tersebut dapat digambar menjadi satu dengan gambar sebelumnya.

```
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=6):
```



Ini seharusnya menjadi beberapa fungsi, tetapi pemecah default Maxima hanya dapat menemukan solusinya, jika kita kuadratkan persamaannya. Akibatnya, kami mendapatkan solusi palsu.

```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y)
```

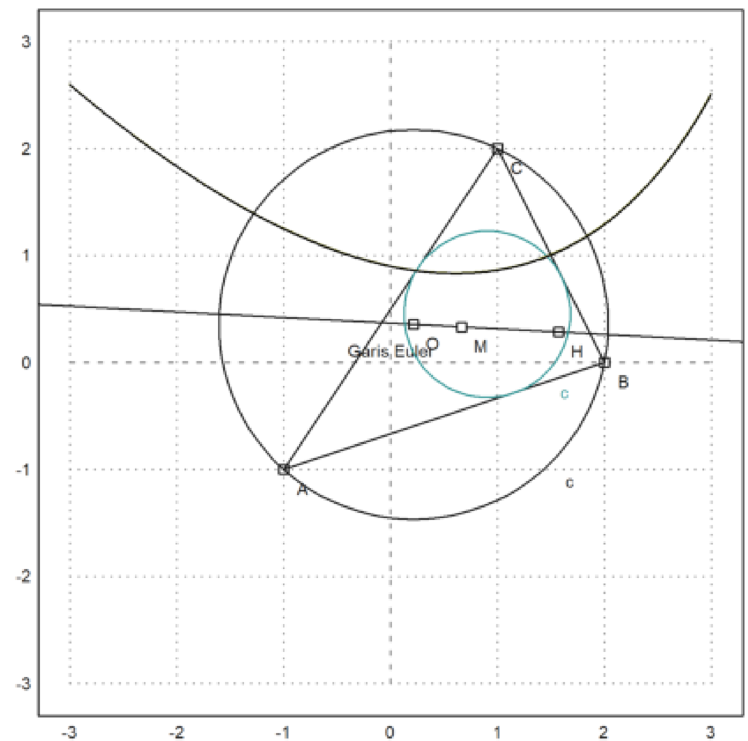
```
[y = - 3 x - sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) + 26,
                              y = - 3 x + sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) + 26]
```

Solusi pertama adalah

maxima: akar[1]

Menambahkan solusi pertama ke plot menunjukkan, bahwa itu memang jalan yang kita cari. Teorinya memberi tahu kita bahwa itu adalah parabola yang diputar.

```
>plot2d(&rhs(akar[1]),add=1):
```




```
>function g(x) &= rhs(akar[1]); $'g(x)= g(x)// fungsi yang mendefinisikan kurva di atas
```

$$g\left(x\right)=-3\,x-\sqrt{70}\,\sqrt{9-2\,x}+26$$

```
>T &=[-1, g(-1)]; // ambil sebarang titik pada kurva tersebut
>dTC &= distance(T,C); $fullratsimp(dTC), $float(%) // jarak T ke C
```

$$2.135605779339061$$

```
>U &= projectToLine(T,lineThrough(A,B)); $U // proyeksi T pada garis AB
```

$$\left[\frac{80-3\,\sqrt{11}\,\sqrt{70}}{10} , \frac{20-\sqrt{11}\,\sqrt{70}}{10}\right]$$

```
>dU2AB &= distance(T,U); $fullratsimp(dU2AB), $float(%) // jatak T ke AB
```

$$2.135605779339061$$

Ternyata jarak T ke C sama dengan jarak T ke AB. Coba Anda pilih titik T yang lain dan ulangi perhitungan-perhitungan di atas untuk menunjukkan bahwa hasilnya juga sama.

Contoh 5:

Trigonometri Rasional

Ini terinspirasi dari ceramah N.J.Wildberger. Dalam bukunya ”Divine Proportions”, Wildberger mengusulkan untuk mengganti pengertian klasik tentang jarak dan sudut dengan kuadrat dan penyebaran. Dengan menggunakan ini, memang mungkin untuk menghindari fungsi trigonometri dalam banyak contoh, dan tetap ”rasional”.

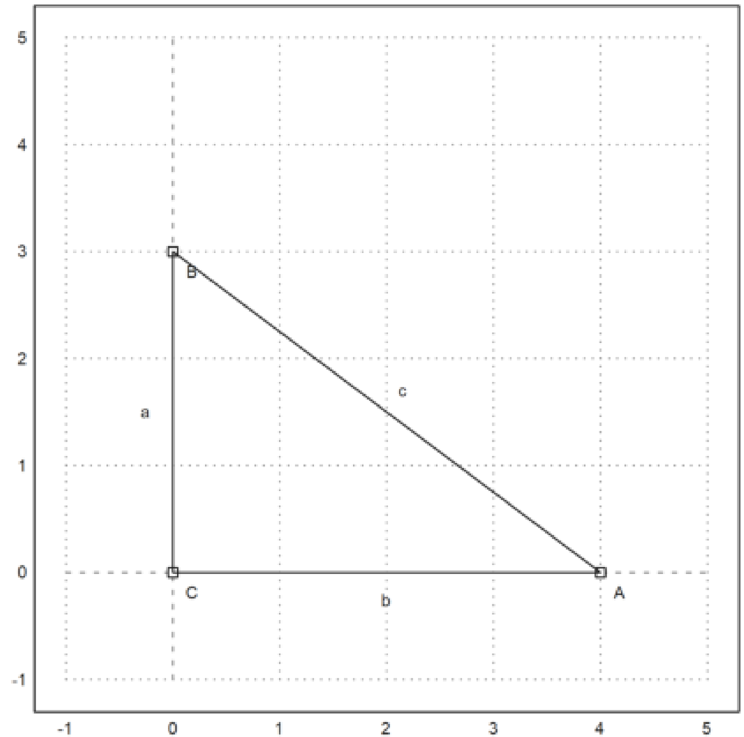
Berikut ini, saya memperkenalkan konsep, dan memecahkan beberapa masalah. Saya menggunakan perhitungan simbolik Maxima di sini, yang menyembunyikan keuntungan utama dari trigonometri rasional bahwa perhitungan hanya dapat dilakukan dengan kertas dan pensil. Anda diundang untuk memeriksa hasil tanpa komputer.

Intinya adalah bahwa perhitungan rasional simbolis sering kali menghasilkan hasil yang sederhana. Sebaliknya, trigonometri klasik menghasilkan hasil trigonometri yang rumit, yang hanya mengevaluasi perkiraan numerik.

```
>load geometry;
```

Untuk pengenalan pertama, kami menggunakan segitiga persegi panjang dengan proporsi Mesir terkenal 3, 4 dan 5. Perintah berikut adalah perintah Euler untuk merencanakan geometri bidang yang terdapat dalam file Euler ”geometry.e”.

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
>setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg(30);
```



Tentu saja,

$$\sin(w_a) = \frac{a}{c},$$

di mana wa adalah sudut di A. Cara yang biasa untuk menghitung sudut ini, adalah dengan mengambil invers dari fungsi sinus. Hasilnya adalah sudut yang tidak dapat dicerna, yang hanya dapat dicetak kira-kira.

```
>wa := arcsin(3/5); degprint(wa)
```

```
36°52'11.63''
```

Trigonometri rasional mencoba menghindari hal ini.

Gagasan pertama trigonometri rasional adalah kuadran, yang menggantikan jarak. Sebenarnya, itu hanya jarak kuadrat. Berikut ini, a, b, dan c menunjukkan kuadrat dari sisi-sisinya.

Teorema Pythogoras menjadi a+b=c.

```
>a &= 3^2; b &= 4^2; c &= 5^2; &a+b=c
```

$$25 = 25$$

Pengertian kedua dari trigonometri rasional adalah penyebaran. Spread mengukur pembukaan antar baris. Ini adalah 0, jika garis-garisnya sejajar, dan 1, jika garis-garisnya persegi panjang. Ini adalah kuadrat sinus sudut antara dua garis.

Penyebaran garis AB dan AC pada gambar di atas didefinisikan sebagai:

$$s_a = \sin(\alpha)^2 = \frac{a}{c},$$

di mana a dan c adalah kuadrat dari sembarang segitiga siku-siku dengan salah satu sudut di A.

```
>sa &= a/c; $sa
```

$$\frac{9}{25}$$

Ini lebih mudah dihitung daripada sudut, tentu saja. Tetapi Anda kehilangan properti bahwa sudut dapat ditambahkan dengan mudah.

Tentu saja, kita dapat mengonversi nilai perkiraan untuk sudut wa menjadi sprad, dan mencetaknya sebagai pecahan.

```
>fracprint(sin(wa)^2)
```

```
9/25
```

Hukum kosinus trgonometri klasik diterjemahkan menjadi "hukum silang" berikut.

$$(c+b-a)^2 = 4bc\,(1-s_a)$$

Di sini a, b, dan c adalah kuadrat dari sisi-sisi segitiga, dan sa adalah penyebaran sudut A. Sisi a, seperti biasa, berhadapan dengan sudut A.

Hukum ini diimplementasikan dalam file geometri.e yang kami muat ke Euler.

```
>$crosslaw(aa,bb,cc,saa)
```

$$\left(cc+bb-aa\right)^2=4\,bb\,cc\,\left(1-saa\right)$$

Dalam kasus kami, kami mendapatkan

```
>$crosslaw(a,b,c,sa)
```

$$1024=1024$$

Mari kita gunakan crosslaw ini untuk mencari spread di A. Untuk melakukan ini, kita buat crosslaw untuk kuadran a, b, dan c, dan selesaikan untuk spread yang tidak diketahui sa.

Anda dapat melakukannya dengan tangan dengan mudah, tetapi saya menggunakan Maxima. Tentu saja, kami mendapatkan hasilnya, kami sudah memilikinya.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x)
```

$$\left[x=\frac{9}{25}\right]$$

$$\left[x=\frac{9}{25}\right]$$

Kita sudah tahu ini. Definisi spread adalah kasus khusus dari crosslaw.

Kita juga dapat menyelesaikan ini untuk umum a,b,c. Hasilnya adalah rumus yang menghitung penyebaran sudut segitiga yang diberikan kuadrat dari ketiga sisinya.

```
>$solve(crosslaw(aa,bb,cc,x),x)
```

$$\left[x=\frac{-cc^2-\left(-2\,bb-2\,aa\right)\,cc-bb^2+2\,aa\,bb-aa^2}{4\,bb\,cc}\right]$$

Kita bisa membuat fungsi dari hasilnya. Fungsi seperti itu sudah didefinisikan dalam file geometri.e dari Euler.

```
>$spread(a,b,c)
```

$$\frac{9}{25}$$

Sebagai contoh, kita dapat menggunakannya untuk menghitung sudut segitiga dengan sisi

$$a,\quad a,\quad \frac{4a}{7}$$

Hasilnya rasional, yang tidak begitu mudah didapat jika kita menggunakan trigonometri klasik.

```
>$spread(a,a,4*a/7)
```

$$\frac{6}{7}$$

Ini adalah sudut dalam derajat.

```
>degprint(arcsin(sqrt(6/7)))
```

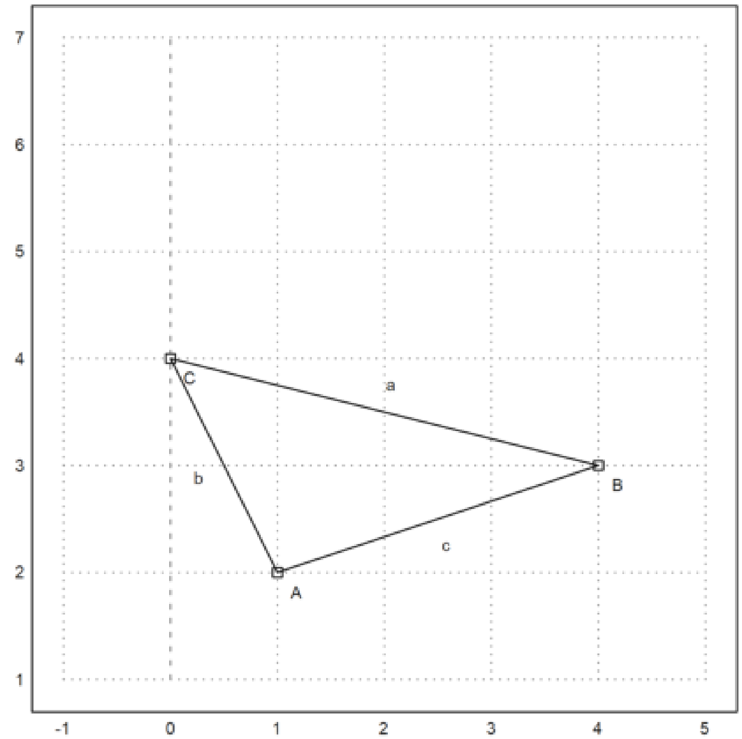
```
67°47'32.44''
```

Contoh lain

Sekarang, mari kita coba contoh yang lebih maju.

Kami mengatur tiga sudut segitiga sebagai berikut.

```
>A&:=[1,2]; B&:=[4,3]; C&:=[0,4]; ...
>setPlotRange(-1,5,1,7); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg;
```



Menggunakan Pythogoras, mudah untuk menghitung jarak antara dua titik. Saya pertama kali menggunakan jarak fungsi file Euler untuk geometri. Jarak fungsi menggunakan geometri klasik.

```
>$distance(A,B)
```

$$\sqrt{10}$$

Euler juga mengandung fungsi untuk kuadran antara dua titik.

Dalam contoh berikut, karena c+b bukan a, maka segitiga itu bukan persegi panjang.

```
>c &= quad(A,B); $c, b &= quad(A,C); $b, a &= quad(B,C); $a,
```

17

Pertama, mari kita hitung sudut tradisional. Fungsi computeAngle menggunakan metode biasa berdasarkan hasil kali titik dua vektor. Hasilnya adalah beberapa pendekatan floating point.

$$A =< 1, 2 > \quad B =< 4, 3 >, \quad C =< 0, 4 >$$

$$\mathbf{a} = C - B =< -4, 1 >, \quad \mathbf{c} = A - B =< -3, -1 >, \quad \beta = \angle ABC$$

$$\mathbf{a}.\mathbf{c} = |\mathbf{a}|.|\mathbf{c}| \cos \beta$$

$$\cos \angle ABC = \cos \beta = \frac{\mathbf{a}.\mathbf{c}}{|\mathbf{a}|.|\mathbf{c}|} = \frac{12 - 1}{\sqrt{17}\sqrt{10}} = \frac{11}{\sqrt{17}\sqrt{10}}$$

```
>wb &= computeAngle(A,B,C); $wb, $(wb/pi*180)()
```

$$\arccos\left(\frac{11}{\sqrt{10}\,\sqrt{17}}\right)$$

```
32.4711922908
```

Dengan menggunakan pensil dan kertas, kita dapat melakukan hal yang sama dengan hukum silang. Kami memasukkan kuadran a, b, dan c ke dalam hukum silang dan menyelesaikan x.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x), //(b+c-a)^=4b.c(1-x)
```

$$\left[x = \frac{49}{50}\right]$$

$$\left[x = \frac{49}{50}\right]$$

Yaitu, apa yang dilakukan oleh penyebaran fungsi yang didefinisikan dalam ”geometry.e”.

```
>sb &= spread(b,a,c); $sb
```

$$\frac{49}{170}$$

Maxima mendapatkan hasil yang sama menggunakan trigonometri biasa, jika kita memaksanya. Itu menyelesaikan istilah sin(arccos(...)) menjadi hasil pecahan. Sebagian besar siswa tidak dapat melakukan ini.

```
>$sin(computeAngle(A,B,C))^2
```

$$\frac{49}{170}$$

Setelah kita memiliki spread di B, kita dapat menghitung tinggi ha di sisi a. Ingat bahwa

$$s_b = \frac{h_a}{c}$$

Menurut definisi.

```
>ha &= c*sb; $ha
```

$$\frac{49}{17}$$

Gambar berikut telah dihasilkan dengan program geometri C.a.R., yang dapat menggambar kuadrat dan menyebar.

image: (20) Rational_Geometry_CaR.png

Menurut definisi, panjang ha adalah akar kuadrat dari kuadratnya.

```
>$sqrt(ha)
```

$$\frac{7}{\sqrt{17}}$$

Sekarang kita dapat menghitung luas segitiga. Jangan lupa, bahwa kita berhadapan dengan kuadrat!

```
>$sqrt(ha)*sqrt(a)/2
```

$$\frac{7}{2}$$

Rumus determinan biasa menghasilkan hasil yang sama.

```
>$areaTriangle(B,A,C)
```

$$\frac{7}{2}$$

Rumus Heron

Sekarang, mari kita selesaikan masalah ini secara umum!

```
>&remvalue(a,b,c,sb,ha);
```

Pertama kita hitung spread di B untuk segitiga dengan sisi a, b, dan c. Kemudian kita menghitung luas kuadrat ("quadrea"?), faktorkan dengan Maxima, dan kita mendapatkan rumus Heron yang terkenal.

Memang, ini sulit dilakukan dengan pensil dan kertas.

```
>$spread(b^2,c^2,a^2), $factor(%*c^2*a^2/4)
```

$$\frac{(-c+b+a)\,(c-b+a)\,(c+b-a)\,(c+b+a)}{16}$$

$$\frac{(-c+b+a)\,(c-b+a)\,(c+b-a)\,(c+b+a)}{16}$$

Aturan Triple Spread

Kerugian dari spread adalah mereka tidak lagi hanya menambahkan sudut yang sama. Namun, tiga spread dari sebuah segitiga memenuhi aturan "triple spread" berikut.

```
>&remvalue(sa,sb,sc); $triplespread(sa,sb,sc)
```

$$(sc+sb+sa)^2 = 2\left(sc^2+sb^2+sa^2\right)+4\,sa\,sb\,sc$$

Aturan ini berlaku untuk setiap tiga sudut yang menambah 180 °.

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

Sejak menyebar

$$\alpha, \pi-\alpha$$

sama, aturan triple spread juga benar, jika

$$\alpha+\beta=\gamma$$

Karena penyebaran sudut negatif adalah sama, aturan penyebaran rangkap tiga juga berlaku, jika

$$\alpha+\beta+\gamma=0$$

Misalnya, kita dapat menghitung penyebaran sudut 60°. Ini 3/4. Persamaan memiliki solusi kedua, bagaimanapun, di mana semua spread adalah 0.

```
>$solve(triplespread(x,x,x),x)
```

$$\left[x = \frac{3}{4}, x = 0\right]$$

Sebaran 90° jelas 1. Jika dua sudut dijumlahkan menjadi 90°, sebarannya menyelesaikan persamaan sebaran rangkap tiga dengan a,b,1. Dengan perhitungan berikut kita mendapatkan a+b=1.

```
>$triplespread(x,y,1), $solve(%,x)
```

$$[x = 1 - y]$$

Karena sebaran 180°-t sama dengan sebaran t, rumus sebaran rangkap tiga juga berlaku, jika satu sudut adalah jumlah atau selisih dua sudut lainnya.

Jadi kita dapat menemukan penyebaran sudut berlipat ganda. Perhatikan bahwa ada dua solusi lagi. Kami membuat ini fungsi.

```
>$solve(triplespread(a,a,x),x), function doublespread(a) &= factor(rhs(%[1]))
```

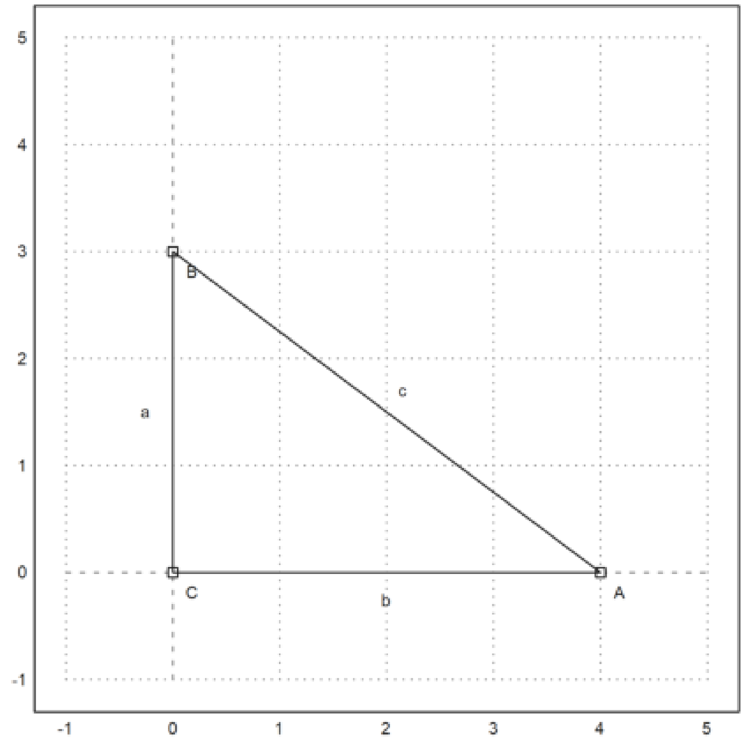
$$\left[x=4\,a-4\,a^2 , x=0\right]$$

```
- 4 (a - 1) a
```

Pembagi Sudut

Ini situasinya, kita sudah tahu.

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
>setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg;
```



Mari kita hitung panjang garis bagi sudut di A. Tetapi kita ingin menyelesaikannya untuk umum a,b,c.

```
>&remvalue(a,b,c);
```

Jadi pertama-tama kita hitung penyebaran sudut yang dibagi dua di A, dengan menggunakan rumus sebaran rangkap tiga.

Masalah dengan rumus ini muncul lagi. Ini memiliki dua solusi. Kita harus memilih yang benar. Solusi lainnya mengacu pada sudut terbelah 180 °-wa.

```
>$triplespread(x,x,a/(a+b)), $solve(%,x), sa2 &= rhs(%[1]); $sa2
```

$$\frac{-\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a}$$

$$\left[x=\frac{-\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a} , x=\frac{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a}\right]$$

$$\frac{-\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a}$$

Mari kita periksa persegi panjang Mesir.

```
>$sa2 with [a=3^2,b=4^2]
```

$$\frac{1}{10}$$

Kami dapat mencetak sudut dalam Euler, setelah mentransfer penyebaran ke radian.

```
>wa2 := arcsin(sqrt(1/10)); degprint(wa2)
```

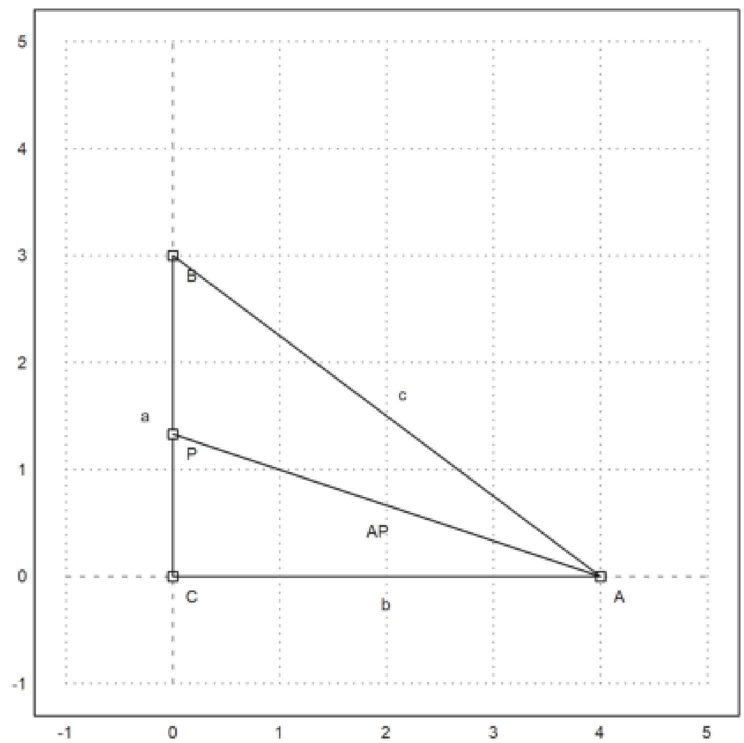
```
18°26'5.82''
```

Titik P adalah perpotongan garis bagi sudut dengan sumbu y.

```
>P := [0,tan(wa2)*4]
```

```
[0,  1.33333]
```

```
>plotPoint(P,"P"); plotSegment(A,P):
```



Mari kita periksa sudut dalam contoh spesifik kita.

```
>computeAngle(C,A,P), computeAngle(P,A,B)
```

```
0.321750554397
0.321750554397
```

Sekarang kita hitung panjang garis bagi AP.

Kami menggunakan teorema sinus dalam segitiga APC. Teorema ini menyatakan bahwa

$$\frac{BC}{\sin(w_a)} = \frac{AC}{\sin(w_b)} = \frac{AB}{\sin(w_c)}$$

berlaku dalam segitiga apa pun. Kuadratkan, itu diterjemahkan ke dalam apa yang disebut "hukum penyebaran"

$$\frac{a}{s_a} = \frac{b}{s_b} = \frac{c}{s_b}$$

di mana a,b,c menunjukkan qudrances.

Karena spread CPA adalah 1-sa2, kita dapatkan darinya bisa/1=b/(1-sa2) dan dapat menghitung bisa (kuadran dari garis-bagi sudut).

```
>&factor(ratsimp(b/(1-sa2))); bisa &= %; $bisa
```

$$\frac{2\,b\,\left(b+a\right)}{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}$$

Mari kita periksa rumus ini untuk nilai-nilai Mesir kita.

```
>sqrt(mxmeval("at(bisa,[a=3^2,b=4^2])")), distance(A,P)
```

```
4.21637021356
4.21637021356
```

Kita juga dapat menghitung P menggunakan rumus spread.

```
>py&=factor(ratsimp(sa2*bisa)); $py
```

$$-\frac{b\left(\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}-b-a\right)}{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}$$

Nilainya sama dengan yang kita dapatkan dengan rumus trigonometri.

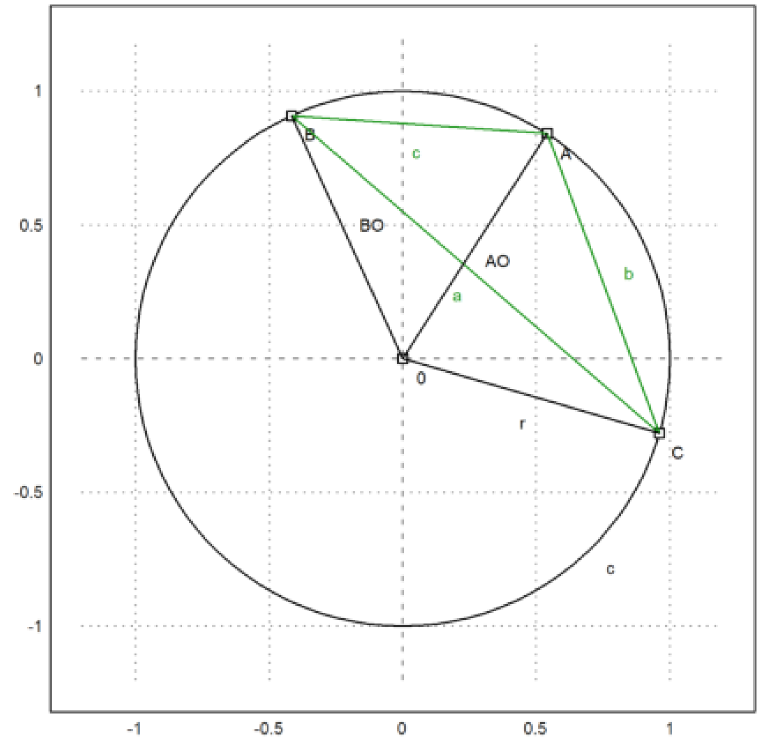
```
>sqrt(mxmeval("at(py,[a=3^2,b=4^2])"))
```

```
1.33333333333
```

Sudut Akord

Perhatikan situasi berikut.

```
>setPlotRange(1.2); ...
>color(1); plotCircle(circleWithCenter([0,0],1)); ...
>A:=[cos(1),sin(1)]; B:=[cos(2),sin(2)]; C:=[cos(6),sin(6)]; ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>color(3); plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>color(1); O:=[0,0];  plotPoint(O,"0"); ...
>plotSegment(A,O); plotSegment(B,O); plotSegment(C,O,"r"); ...
>insimg;
```



Kita dapat menggunakan Maxima untuk menyelesaikan rumus penyebaran rangkap tiga untuk sudut-sudut di pusat O untuk r. Jadi kita mendapatkan rumus untuk jari-jari kuadrat dari pericircle dalam hal kuadrat dari sisi.

Kali ini, Maxima menghasilkan beberapa nol kompleks, yang kita abaikan.

```
>&remvalue(a,b,c,r); // hapus nilai-nilai sebelumnya untuk perhitungan baru
>rabc &= rhs(solve(triplespread(spread(b,r,r),spread(a,r,r),spread(c,r,r)),r)[4]); $rabc
```

$$-\frac{a\,b\,c}{c^2-2\,b\,c+a\,\left(-2\,c-2\,b\right)+b^2+a^2}$$

Kita dapat menjadikannya sebagai fungsi Euler.

```
>function periradius(a,b,c) &= rabc;
```

Mari kita periksa hasilnya untuk poin A,B,C.

```
>a:=quadrance(B,C); b:=quadrance(A,C); c:=quadrance(A,B);
```

Jari-jarinya memang 1.

```
>periradius(a,b,c)
```

```
1
```

Faktanya, spread CBA hanya bergantung pada b dan c. Ini adalah teorema sudut chord.

```
>$spread(b,a,c)*rabc | ratsimp
```

$$\frac{b}{4}$$

Sebenarnya spreadnya adalah b/(4r), dan kita melihat bahwa sudut chord dari chord b adalah setengah dari sudut pusat.

```
>$doublespread(b/(4*r))-spread(b,r,r) | ratsimp
```

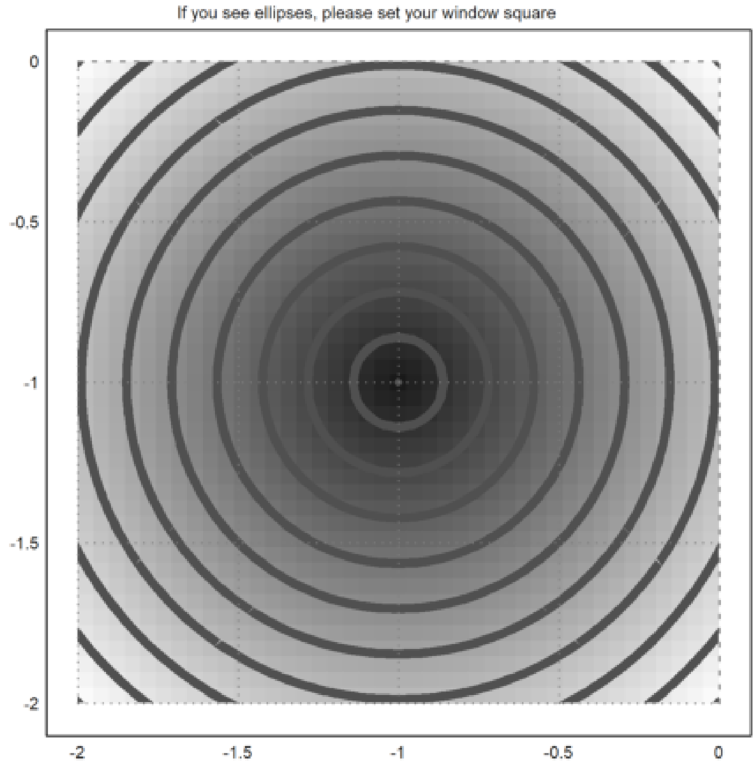
$$0$$

Contoh 6: Jarak Minimal pada Bidang

Catatan awal

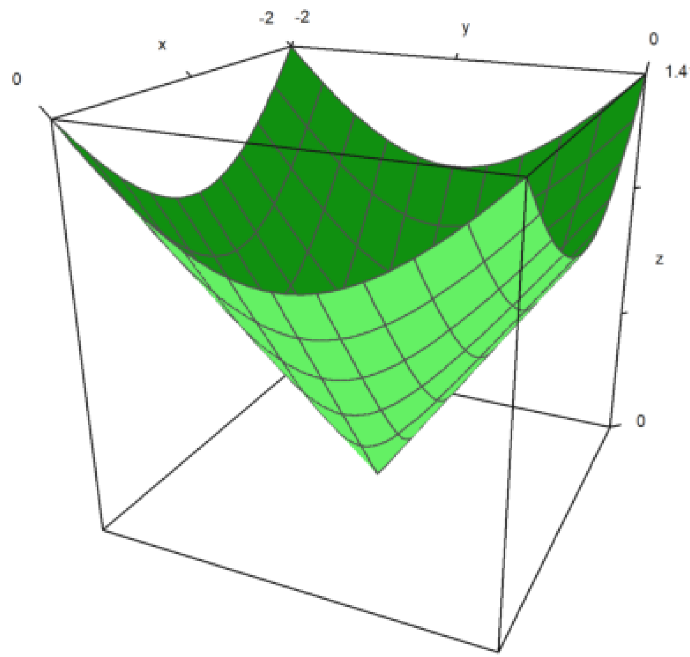
Fungsi yang, ke titik M di bidang, menetapkan jarak AM antara titik tetap A dan M, memiliki garis level yang agak sederhana: lingkaran berpusat di A.

```
>&remvalue();
>A=[-1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-A[1])^2+(y-A[2])^2)
>fcontour("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0,hue=1, ...
>title="If you see ellipses, please set your window square"):
```



dan grafiknya juga agak sederhana: bagian atas kerucut:

```
>plot3d("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0):
```

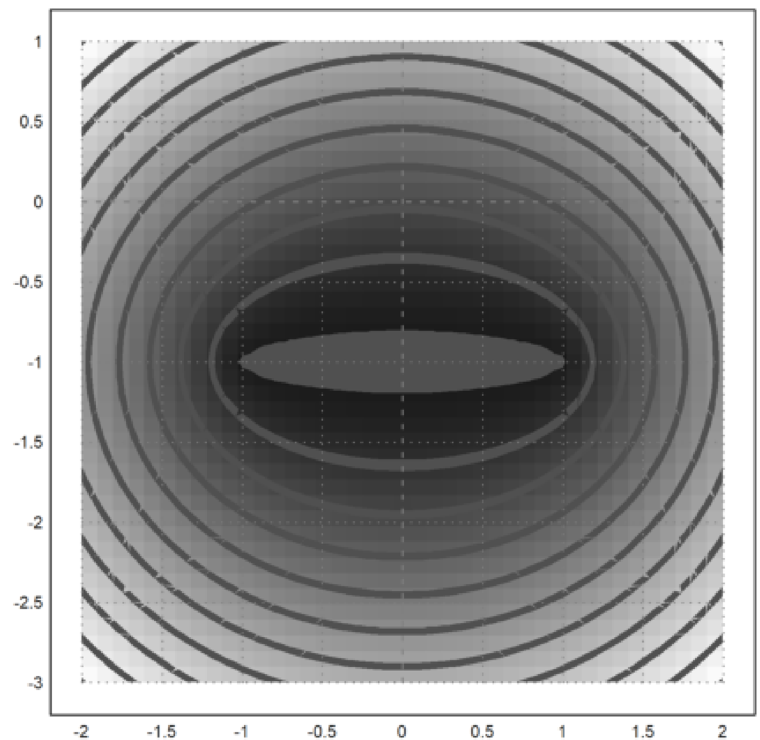


Tentu saja minimal 0 dicapai di A.

Dua poin

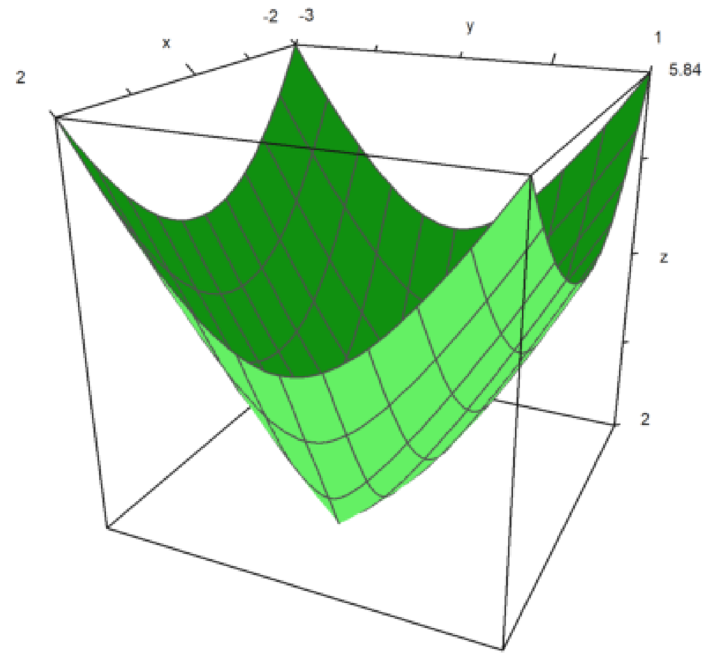
Sekarang kita lihat fungsi MA+MB dimana A dan B adalah dua titik (tetap). Ini adalah "fakta yang diketahui" bahwa kurva level adalah elips, titik fokusnya adalah A dan B; kecuali untuk AB minimum yang konstan pada segmen [AB]:

```
>B=[1,-1];
>function d2(x,y):=d1(x,y)+sqrt((x-B[1])^2+(y-B[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```



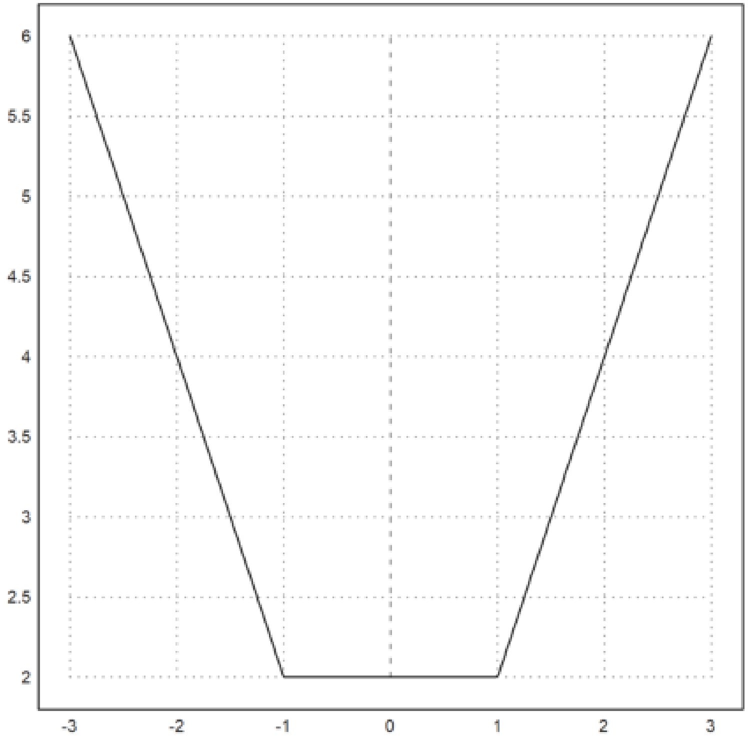
Grafiknya lebih menarik:

```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```



Pembatasan garis (AB) lebih terkenal:

```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```

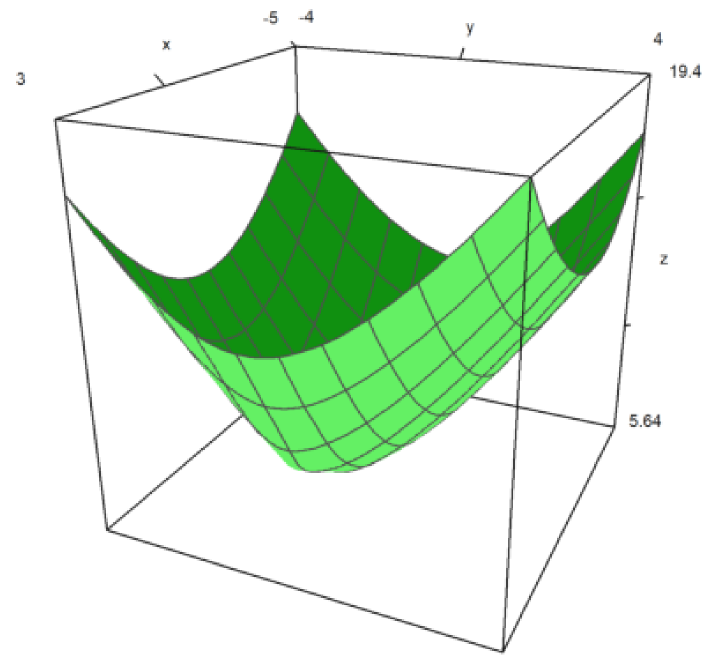


Sekarang hal-hal yang kurang sederhana: Ini sedikit kurang terkenal bahwa MA+MB+MC mencapai minimum pada satu titik pesawat tetapi untuk menentukan itu kurang sederhana:

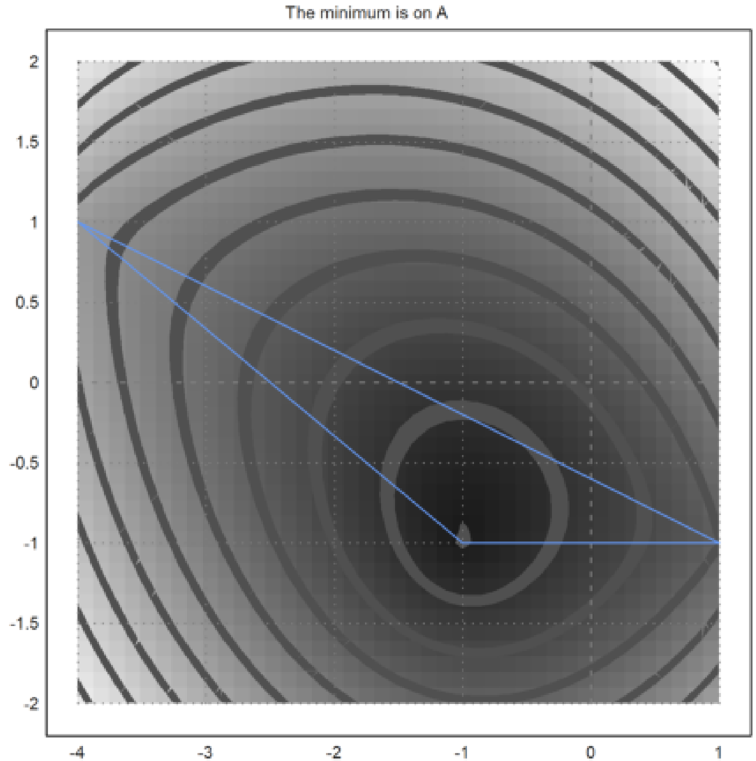
1) Jika salah satu sudut segitiga ABC lebih dari 120° (katakanlah di A), maka minimum dicapai pada titik ini (misalnya AB+AC).

Contoh:

```
>C=[-4,1];
>function d3(x,y):=d2(x,y)+sqrt((x-C[1])^2+(y-C[2])^2)
>plot3d("d3",xmin=-5,xmax=3,ymin=-4,ymax=4);
>insimg;
```

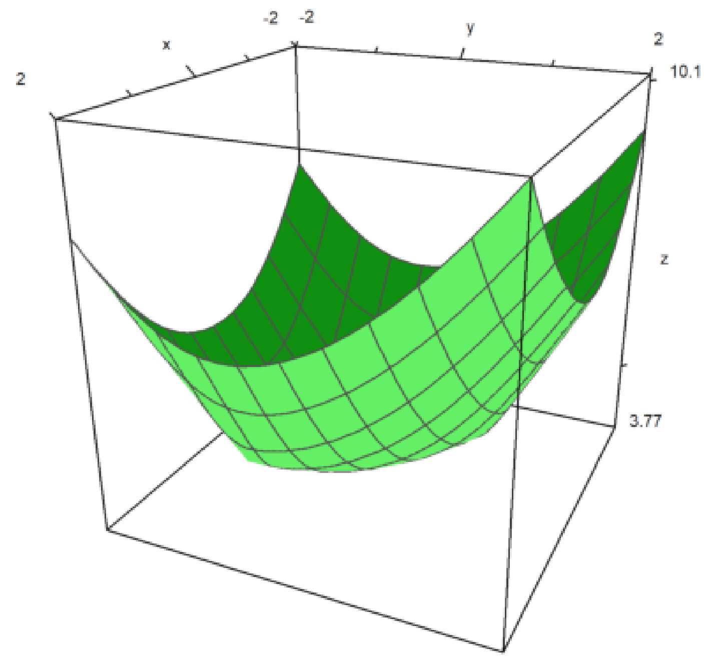



```
>fcontour("d3",xmin=-4,xmax=1,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The minimum is on A");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

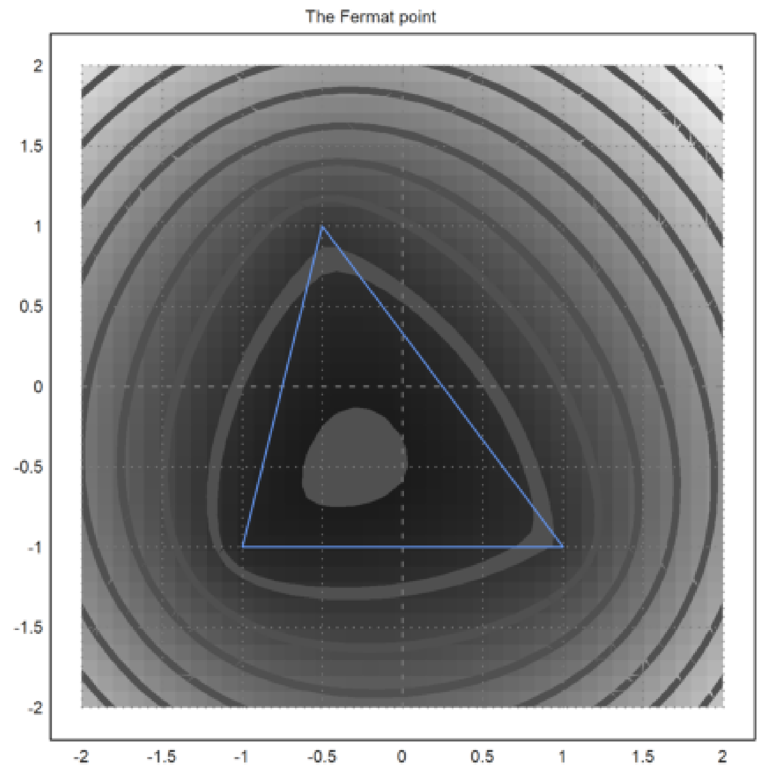


2) Tetapi jika semua sudut segitiga ABC kurang dari 120 °, minimumnya adalah pada titik F di bagian dalam segitiga, yang merupakan satu-satunya titik yang melihat sisi-sisi ABC dengan sudut yang sama (maka masing-masing 120 °):

```
>C=[-0.5,1];
>plot3d("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2):
```




```
>fcontour("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The Fermat point");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

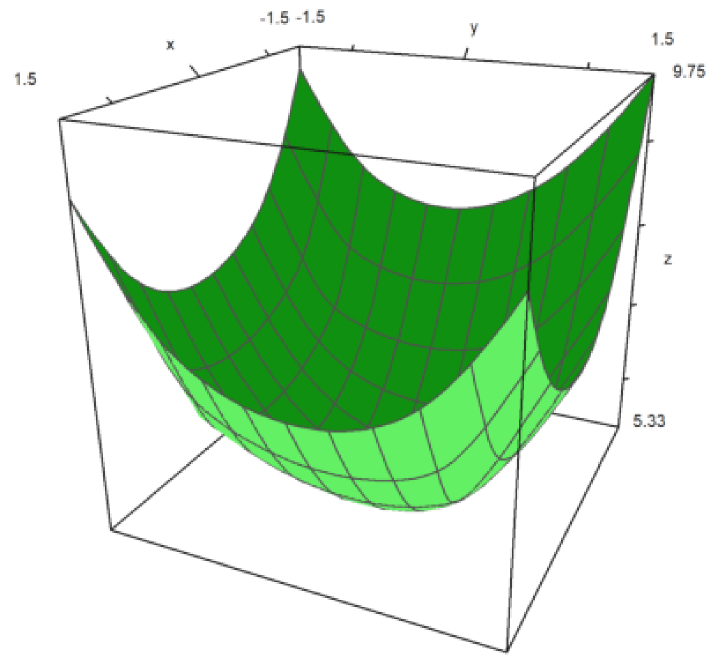


Merupakan kegiatan yang menarik untuk mewujudkan gambar di atas dengan perangkat lunak geometri; misalnya, saya tahu soft yang ditulis di Jawa yang memiliki instruksi ”garis kontur” ...

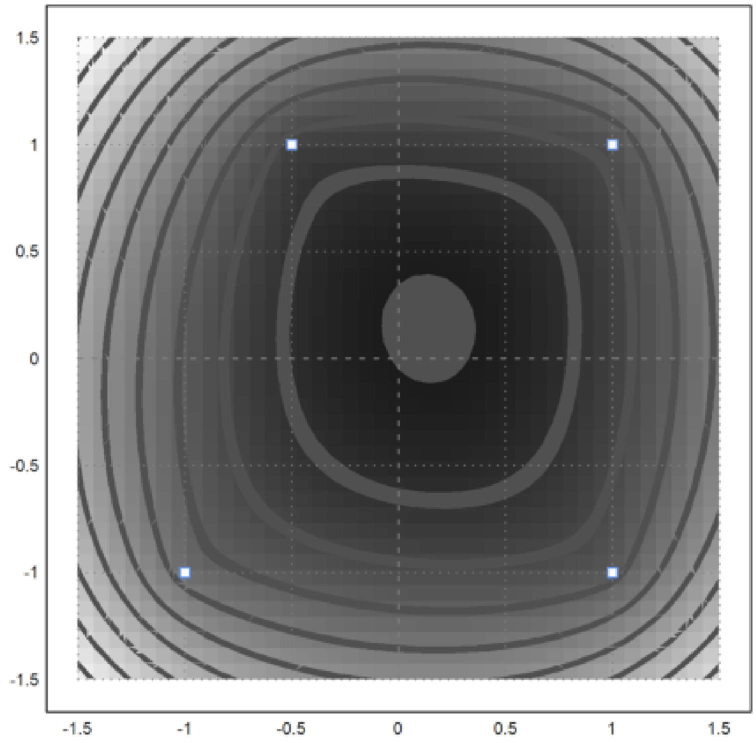
Semua ini di atas telah ditemukan oleh seorang hakim Perancis bernama Pierre de Fermat; dia menulis surat kepada dilettants lain seperti pendeta Marin Mersenne dan Blaise Pascal yang bekerja di pajak penghasilan. Jadi titik unik F sedemikian rupa sehingga FA+FB+FC minimal, disebut titik Fermat segitiga. Tetapi tampaknya beberapa tahun sebelumnya, Torriccelli Italia telah menemukan titik ini sebelum Fermat melakukannya! Bagaimanapun tradisinya adalah mencatat poin ini F...

Langkah selanjutnya adalah menambahkan 4 titik D dan mencoba meminimalkan MA+MB+MC+MD; katakan bahwa Anda adalah operator TV kabel dan ingin mencari di bidang mana Anda harus meletakkan antena sehingga Anda dapat memberi makan empat desa dan menggunakan panjang kabel sesedikit mungkin!

```
>D=[1,1];
>function d4(x,y):=d3(x,y)+sqrt((x-D[1])^2+(y-D[2])^2)
>plot3d("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5):
```




```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],points=1,add=1,color=12);
>insimg;
```



Masih ada minimum dan tidak tercapai di salah satu simpul A, B, C atau D:

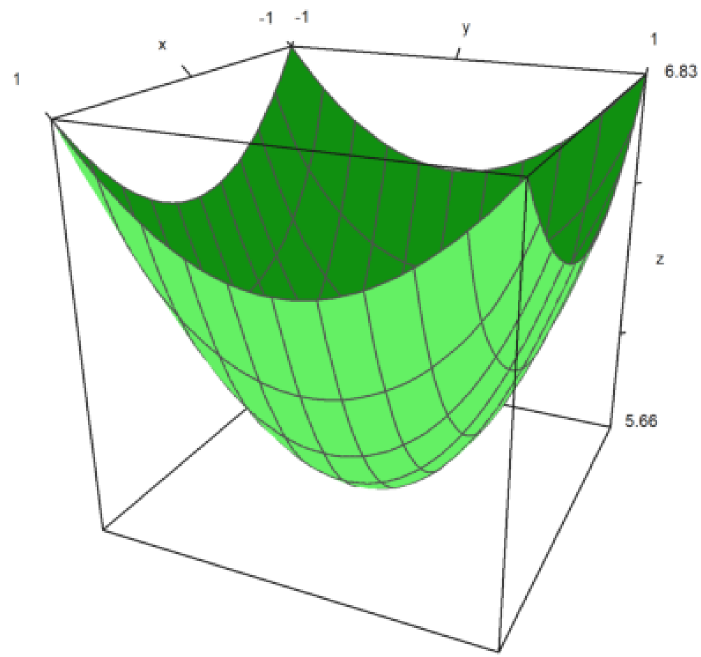
```
>function f(x):=d4(x[1],x[2])
>neldermin("f",[0.2,0.2])
```

```
[0.142858,  0.142857]
```

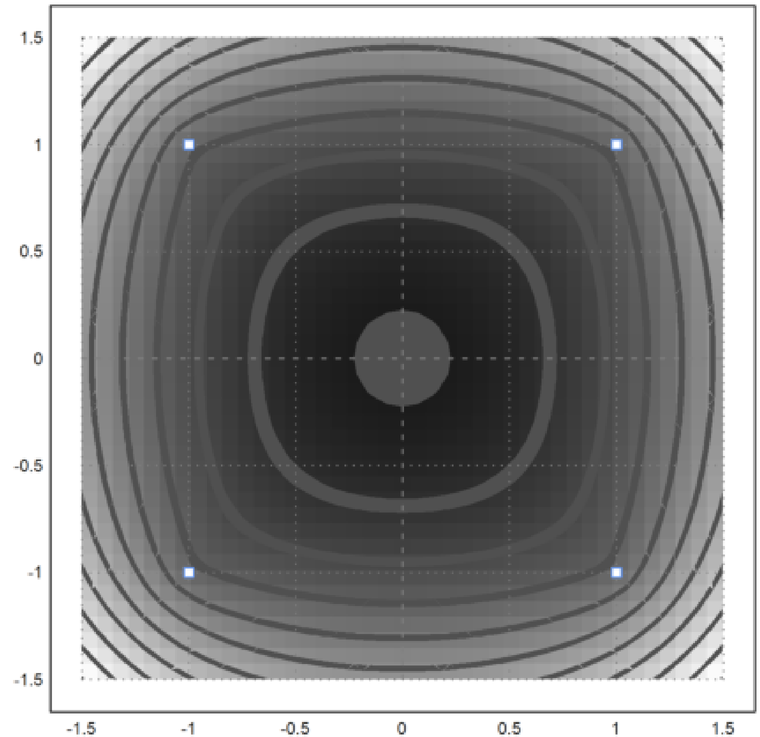
Tampaknya dalam kasus ini, koordinat titik optimal adalah rasional atau mendekati rasional...

Sekarang ABCD adalah persegi, kami berharap bahwa titik optimal akan menjadi pusat ABCD:

```
>C=[-1,1];
>plot3d("d4",xmin=-1,xmax=1,ymin=-1,ymax=1):
```




```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12,points=1);
>insimg;
```



1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5

Contoh 7: Bola Dandelin dengan Povray

Anda dapat menjalankan demonstrasi ini, jika Anda telah menginstal Povray, dan pvengine.exe di jalur program.

Pertama kita hitung jari-jari bola.

Jika Anda melihat gambar di bawah, Anda melihat bahwa kita membutuhkan dua lingkaran yang menyentuh dua garis yang membentuk kerucut, dan satu garis yang membentuk bidang yang memotong kerucut.

Kami menggunakan file geometri.e dari Euler untuk ini.

```
>load geometry;
```

Pertama dua garis yang membentuk kerucut.

```
>g1 &= lineThrough([0,0],[1,a])
```

```
[- a, 1, 0]
```

```
>g2 &= lineThrough([0,0],[-1,a])
```

```
[- a, - 1, 0]
```

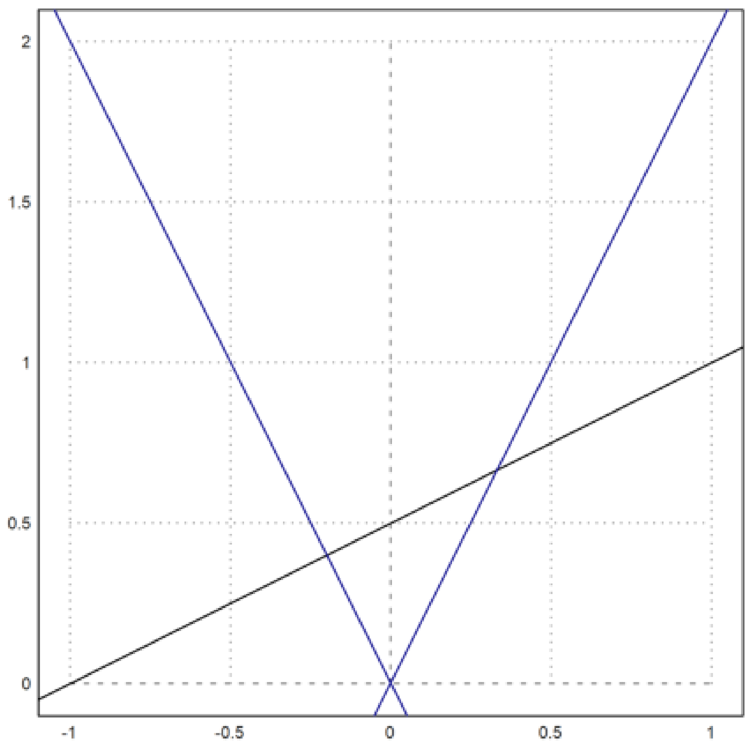
Kemudian saya baris ketiga.

```
>g &= lineThrough([-1,0],[1,1])
```

```
[- 1, 2, 1]
```

Kami merencanakan semuanya sejauh ini.

```
>setPlotRange(-1,1,0,2);
>color(black); plotLine(g(),"")
>a:=2; color(blue); plotLine(g1(),""), plotLine(g2(),""):
```



Sekarang kita ambil titik umum pada sumbu y.

```
>P &= [0,u]
```

```
[0, u]
```

Hitung jarak ke g1.

```
>d1 &= distance(P,projectToLine(P,g1)); $d1
```

$$\sqrt{\left(\frac{a^2\,u}{a^2+1}-u\right)^2+\frac{a^2\,u^2}{\left(a^2+1\right)^2}}$$

Hitung jarak ke g.

```
>d &= distance(P,projectToLine(P,g)); $d
```

$$\sqrt{\left(\frac{u+2}{5}-u\right)^2+\frac{\left(2\,u-1\right)^2}{25}}$$

Dan temukan pusat kedua lingkaran yang jaraknya sama.

```
>sol &= solve(d1^2=d^2,u); $sol
```

$$\left[u=\frac{-\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+1}+2\,a^2+2}{4\,a^2-1},u=\frac{\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+1}+2\,a^2+2}{4\,a^2-1}\right]$$

Ada dua solusi.

Kami mengevaluasi solusi simbolis, dan menemukan kedua pusat, dan kedua jarak.

```
>u := sol()
```

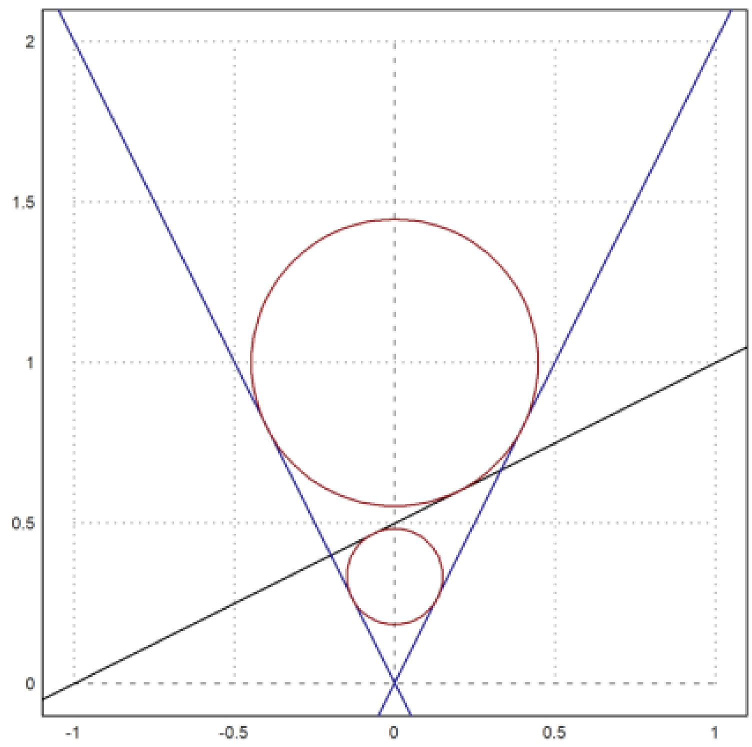
```
[0.333333,  1]
```

```
>dd := d()
```

```
[0.149071,  0.447214]
```

Plot lingkaran ke dalam gambar.

```
>color(red);
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[1]),"");
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[2]],dd[2]),"");
>insimg;
```



Plot dengan Povray

Selanjutnya kami merencanakan semuanya dengan Povray. Perhatikan bahwa Anda mengubah perintah apa pun dalam urutan perintah Povray berikut, dan menjalankan kembali semua perintah dengan Shift-Return.

Pertama kita memuat fungsi povray.

```
>load povray;
>defaultpovray="C:\Users\Nurkhofifah\AppData\Roaming\POV-Ray\v3.6\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Users\Nurkhofifah\AppData\Roaming\POV-Ray\v3.6\bin\pvengine.exe
```

Kami mengatur adegan dengan tepat.

```
>povstart(zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```

Selanjutnya kita menulis dua bidang ke file Povray.

```
>writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
>writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
```

Dan kerucutnya, transparan.

```
>writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
```

Kami menghasilkan bidang terbatas pada kerucut.

```
>gp=g();
>pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
>vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
>writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
```

Sekarang kita menghasilkan dua titik pada lingkaran, di mana bola menyentuh kerucut.

```
>function turnz(v) := return [-v[2],v[1],v[3]]
>P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
>writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
>P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
>writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
```

Kemudian kami menghasilkan dua titik di mana bola menyentuh bidang. Ini adalah fokus dari elips.

```
>P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
>writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
>P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
>writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
```

Selanjutnya kita hitung perpotongan P1P2 dengan bidang.

```
>t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
>writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
```

Kami menghubungkan titik-titik dengan segmen garis.

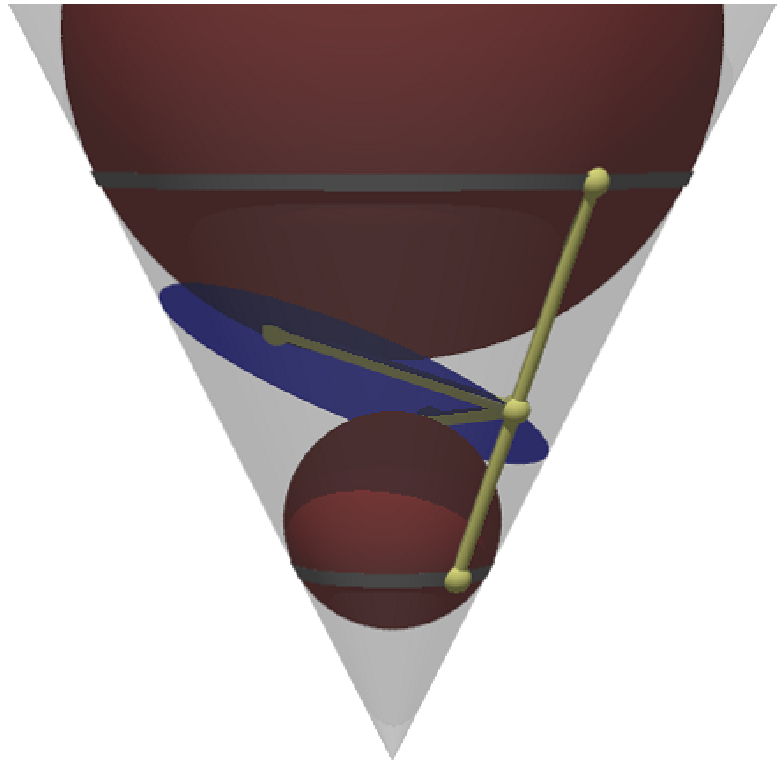
```
>writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
```

Sekarang kita menghasilkan pita abu-abu, di mana bola menyentuh kerucut.

```
>pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
>pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
>pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
```

Mulai program Povray.

```
>povend();
```



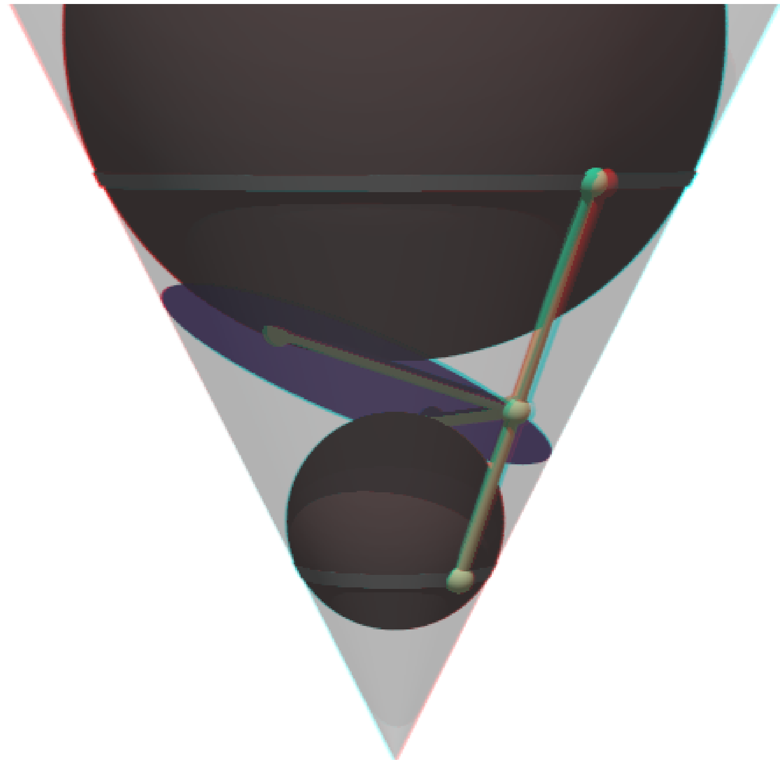
Untuk mendapatkan Anaglyph ini kita perlu memasukkan semuanya ke dalam fungsi scene. Fungsi ini akan digunakan dua kali kemudian.

```
>function scene () ...
```

```
global a,u,dd,g,g1,defaultpointsize;
writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
gp=g();
pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
endfunction
```

Anda membutuhkan kacamata merah/sian untuk menghargai efek berikut.

```
>povanaglyph("scene",zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```



Contoh 8: Geometri Bumi

Dalam buku catatan ini, kami ingin melakukan beberapa perhitungan sferis. Fungsi-fungsi tersebut terdapat dalam file ”spherical.e” di folder contoh. Kita perlu memuat file itu terlebih dahulu.

```
>load "spherical.e";
```

Untuk memasukkan posisi geografis, kami menggunakan vektor dengan dua koordinat dalam radian (utara dan timur, nilai negatif untuk selatan dan barat). Berikut koordinat Kampus FMIPA UNY.

```
>FMIPA=[rad(-7,-46.467),rad(110,23.05)]
```

```
[-0.13569,  1.92657]
```

Anda dapat mencetak posisi ini dengan sposprint (cetak posisi spherical).

```
>sposprint(FMIPA) // posisi garis lintang dan garis bujur FMIPA UNY
```

```
S 7°46.467’ E 110°23.050’
```

Mari kita tambahkan dua kota lagi, Solo dan Semarang.

```
>Solo=[rad(-7,-34.333),rad(110,49.683)]; Semarang=[rad(-6,-59.05),rad(110,24.533)];
>sposprint(Solo), sposprint(Semarang),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 6°59.050' E 110°24.533'
```

Pertama kita menghitung vektor dari satu ke yang lain pada bola ideal. Vektor ini [pos,jarak] dalam radian. Untuk menghitung jarak di bumi, kita kalikan dengan jari-jari bumi pada garis lintang 7°.

```
>br=svector(FMIPA,Solo); degprint(br[1]), br[2]*rearth(7°)->km // perkiraan jarak FMIPA-Solo
```

```
65°20'26.60''
53.8945384608
```

Ini adalah perkiraan yang baik. Rutinitas berikut menggunakan perkiraan yang lebih baik. Pada jarak yang begitu pendek hasilnya hampir sama.

```
>esdist(FMIPA,Semarang)->" km", // perkiraan jarak FMIPA-Semarang
```

```
88.0114026318 km
```

Ada fungsi untuk heading, dengan mempertimbangkan bentuk elips bumi. Sekali lagi, kami mencetak dengan cara yang canggih.

```
>sdegprint(esdir(FMIPA,Solo))
```

```
     65.34°
```

Sudut segitiga melebihi 180° pada bola.

```
>asum=sangle(Solo,FMIPA,Semarang)+sangle(FMIPA,Solo,Semarang)+sangle(FMIPA,Semarang,Solo); degprint(
```

```
  180°0'10.77''
```

Ini dapat digunakan untuk menghitung luas segitiga. Catatan: Untuk segitiga kecil, ini tidak akurat karena kesalahan pengurangan dalam asum-pi.

```
>(asum-pi)*rearth(48°)^2->" km^2", // perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang
```

```
  2116.02948749 km^2
```

Ada fungsi untuk ini, yang menggunakan garis lintang rata-rata segitiga untuk menghitung jari-jari bumi, dan menangani kesalahan pembulatan untuk segitiga yang sangat kecil.

```
>esarea(Solo,FMIPA,Semarang)->" km^2", //perkiraan yang sama dengan fungsi esarea()
```

```
2123.64310526 km^2
```

Kita juga dapat menambahkan vektor ke posisi. Sebuah vektor berisi heading dan jarak, keduanya dalam radian. Untuk mendapatkan vektor, kami menggunakan vektor. Untuk menambahkan vektor ke posisi, kami menggunakan vektor sadd.

```
>v=svector(FMIPA,Solo); sposprint(saddvector(FMIPA,v)), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333’ E 110°49.683’
S 7°34.333’ E 110°49.683’
```

Fungsi-fungsi ini mengasumsikan bola yang ideal. Hal yang sama di bumi.

```
>sposprint(esadd(FMIPA,esdir(FMIPA,Solo),esdist(FMIPA,Solo))), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333’ E 110°49.683’
S 7°34.333’ E 110°49.683’
```

Mari kita beralih ke contoh yang lebih besar, Tugu Jogja dan Monas Jakarta (menggunakan Google Earth untuk mencari koordinatnya).

```
>Tugu=[-7.7833°,110.3661°]; Monas=[-6.175°,106.811944°];
>sposprint(Tugu), sposprint(Monas)
```

```
S 7°46.998’ E 110°21.966’
S 6°10.500’ E 106°48.717’
```

Menurut Google Earth, jaraknya adalah 429,66 km. Kami mendapatkan pendekatan yang baik.

```
>esdist(Tugu,Monas)->" km", // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta
```

```
431.565659488 km
```

Judulnya sama dengan judul yang dihitung di Google Earth.

```
>degprint(esdir(Tugu,Monas))
```

```
294°17’2.85’’
```

Namun, kita tidak lagi mendapatkan posisi target yang tepat, jika kita menambahkan heading dan jarak ke posisi semula. Hal ini terjadi, karena kita tidak menghitung fungsi invers secara tepat, tetapi mengambil perkiraan jari-jari bumi di sepanjang jalan.

```
>sposprint(esadd(Tugu,esdir(Tugu,Monas),esdist(Tugu,Monas)))
```

```
S 6°10.500’ E 106°48.717’
```

Namun, kesalahannya tidak besar.

```
>sposprint(Monas),
```

```
S 6°10.500’ E 106°48.717’
```

Tentu kita tidak bisa berlayar dengan tujuan yang sama dari satu tujuan ke tujuan lainnya, jika kita ingin menempuh jalur terpendek. Bayangkan, Anda terbang NE mulai dari titik mana pun di bumi. Kemudian Anda akan berputar ke kutub utara. Lingkaran besar tidak mengikuti heading yang konstan!

Perhitungan berikut menunjukkan bahwa kami jauh dari tujuan yang benar, jika kami menggunakan pos yang sama selama perjalanan kami.

```
>dist=esdist(Tugu,Monas); hd=esdir(Tugu,Monas);
```

Sekarang kita tambahkan 10 kali sepersepuluh dari jarak, menggunakan pos ke Monas, kita sampai di Tugu.

```
>p=Tugu; loop 1 to 10; p=esadd(p,hd,dist/10); end;
```

Hasilnya jauh.

```
>sposprint(p), skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
S 6°11.250’ E 106°48.372’
     1.529km
```

Sebagai contoh lain, mari kita ambil dua titik di bumi pada garis lintang yang sama.

```
>P1=[30°,10°]; P2=[30°,50°];
```

Jalur terpendek dari P1 ke P2 bukanlah lingkaran garis lintang 30°, melainkan jalur terpendek yang dimulai 10° lebih jauh ke utara di P1.

```
>sdegprint(esdir(P1,P2))
```

```
79.69°
```

Tapi, jika kita mengikuti pembacaan kompas ini, kita akan berputar ke kutub utara! Jadi kita harus menyesuaikan arah kita di sepanjang jalan. Untuk tujuan kasar, kami menyesuaikannya pada 1/10 dari total jarak.

```
>p=P1;  dist=esdist(P1,P2); ...
>  loop 1 to 10; dir=esdir(p,P2); sdegprint(dir), p=esadd(p,dir,dist/10); end;
```

```
79.69°
81.67°
83.71°
85.78°
87.89°
90.00°
92.12°
94.22°
96.29°
98.33°
```

Jaraknya tidak tepat, karena kita akan menambahkan sedikit kesalahan, jika kita mengikuti heading yang sama terlalu lama.

```
>skmprint(esdist(p,P2))
```

```
0.203km
```

Kami mendapatkan perkiraan yang baik, jika kami menyesuaikan pos setelah setiap 1/100 dari total jarak dari Tugu ke Monas.

```
>p=Tugu; dist=esdist(Tugu,Monas); ...
>  loop 1 to 100; p=esadd(p,esdir(p,Monas),dist/100); end;
>skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
0.000km
```

Untuk keperluan navigasi, kita bisa mendapatkan urutan posisi GPS di sepanjang lingkaran besar menuju Monas dengan fungsi navigasi.

```
>load spherical; v=navigate(Tugu,Monas,10); ...
>  loop 1 to rows(v); sposprint(v[#]), end;
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'
S 7°37.422' E 110°0.573'
S 7°27.829' E 109°39.196'
S 7°18.219' E 109°17.834'
S 7°8.592' E 108°56.488'
S 6°58.948' E 108°35.157'
S 6°49.289' E 108°13.841'
S 6°39.614' E 107°52.539'
S 6°29.924' E 107°31.251'
S 6°20.219' E 107°9.977'
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

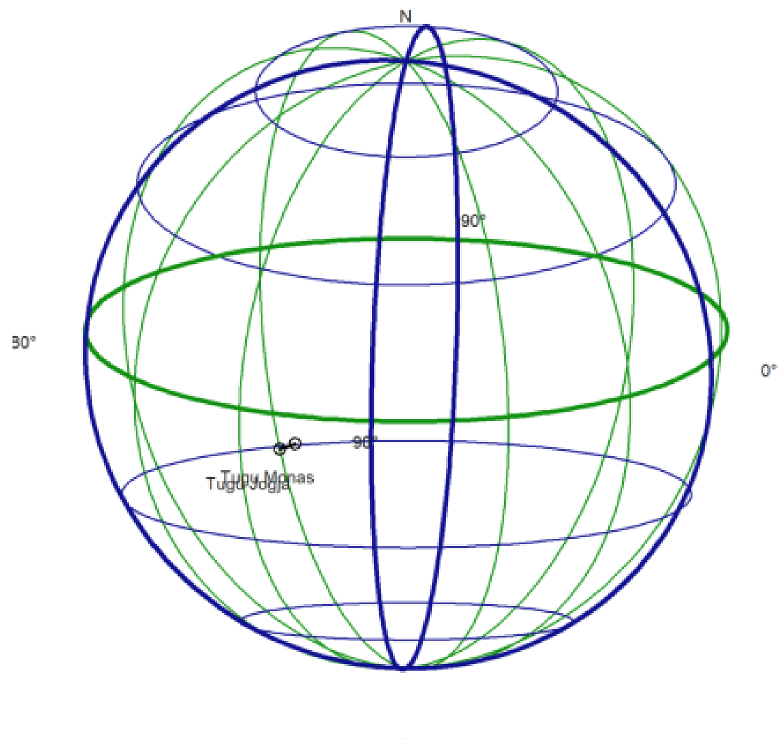
Kami menulis sebuah fungsi, yang memplot bumi, dua posisi, dan posisi di antaranya.

```
>function testplot ...
```

```
useglobal;
plotearth;
plotpos(Tugu,"Tugu Jogja"); plotpos(Monas,"Tugu Monas");
plotposline(v);
endfunction
```

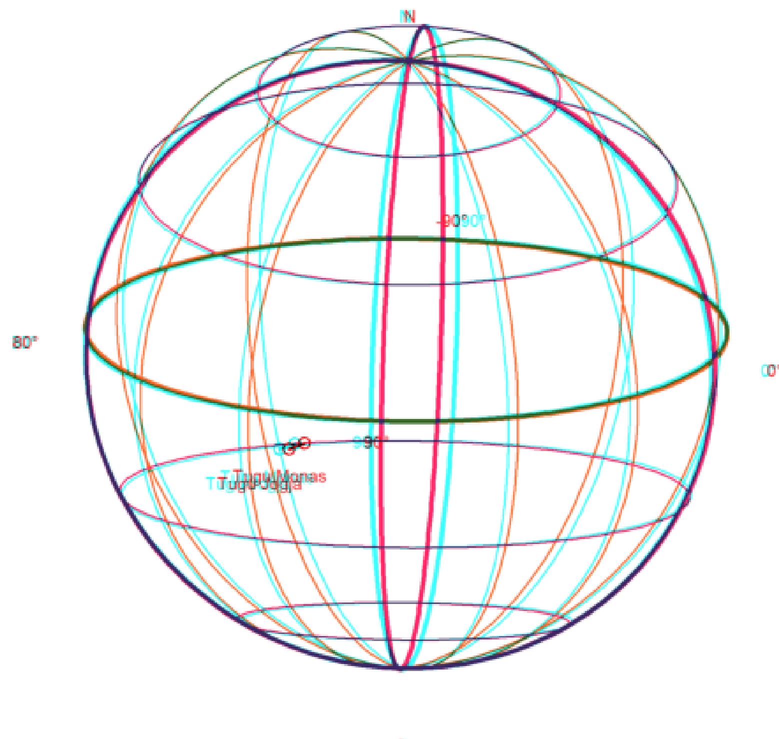
Sekarang rencanakan semuanya.

```
>plot3d("testplot",angle=25, height=6,>own,>user,zoom=4):
```



Atau gunakan plot3d untuk mendapatkan tampilan anaglyph. Ini terlihat sangat bagus dengan kacamata merah/sian.

```
>plot3d("testplot",angle=25,height=6,distance=5,own=1,anaglyph=1,zoom=4):
```



Mengubah/Mengedit Perintah-perintah pada Materi di Atas

Geometri Simbolik

```
>A &= [2,0]; B &= [0,2]; C &= [3,3]; // menentukan tiga titik A, B, C
>c &= lineThrough(B,C) // c=BC
```

[- 1, 3, 6]

```
>$getLineEquation(c,x,y), $solve(%,y) | expand // persamaan garis c
```

$$\left[y=\frac{x}{3}+2\right]$$

$$\left[y=\frac{x}{3}+2\right]$$

```
>h &= perpendicular(A,lineThrough(B,C)) // h melalui A tegak lurus BC
```

[3, 1, 6]

```
>Q &= lineIntersection(c,h) // Q titik potong garis c=BC dan h
```

```
 6  12
[-, --]
 5  5
```

```
>$projectToLine(A,lineThrough(B,C)) // proyeksi A pada BC
```

$$\left[\frac{6}{5},\frac{12}{5}\right]$$

```
>$distance(A,Q) // jarak AQ
```

$$\frac{2^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{5}}$$

```
>cc &= circleThrough(A,B,C); $cc // (titik pusat dan jari-jari) lingkaran melalui A, B, C
```

$$\left[\frac{7}{4},\frac{7}{4},\frac{5}{2^{\frac{3}{2}}}\right]$$

```
>r&=getCircleRadius(cc); $r , $float(r) // tampilkan nilai jari-jari
```

$$1.767766952966368$$

```
>$computeAngle(A,C,B) // nilai <ACB
```

$$\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$$

```
>$solve(getLineEquation(angleBisector(A,C,B),x,y),y)[1] // persamaan garis bagi <ACB
```

$$y = x$$

```
>P &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A)); $P // titik potong 2
```

$$\left[\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{10}+2}{4}, \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{10}+2}{4}\right]$$

```
>P() //
```

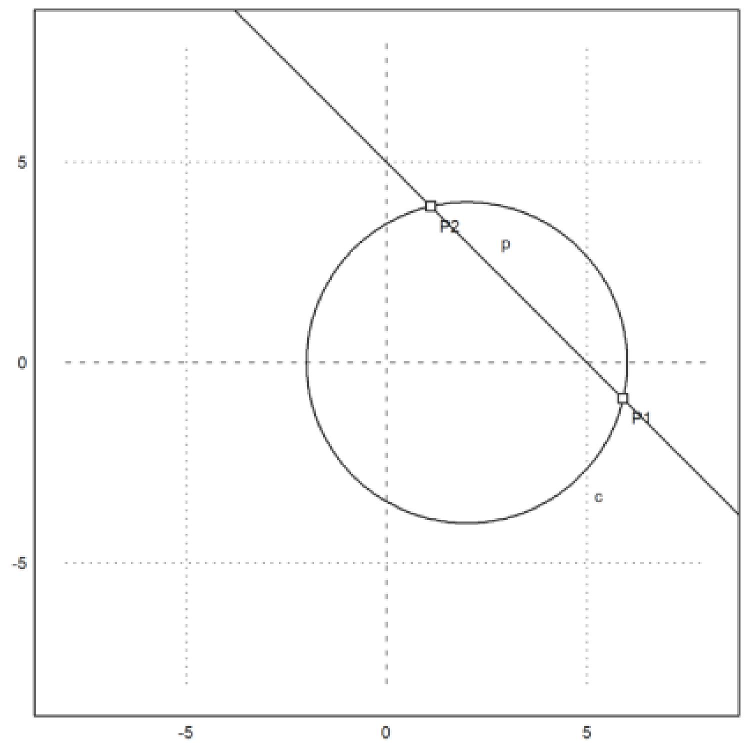
```
[1.61803,  1.61803]
```

Garis dan Lingkaran yang berpotongan

```
>A &:= [2,0]; c=circleWithCenter(A,4);
>B &:= [2,3]; C &:= [3,2]; l=lineThrough(B,C);
>setPlotRange(8); plotCircle(c); plotLine(l);
>{P1,P2,f}=lineCircleIntersections(l,c);
>P1, P2,
```

```
[5.89792,  -0.897916]
[1.10208,  3.89792]
```

```
>plotPoint(P1); plotPoint(P2):
```




```
>c &= circleWithCenter(A,4) // lingkaran dengan pusat A jari-jari 4
```

[2, 0, 4]

```
>l &= lineThrough(B,C) // garis l melalui B dan C
```

[1, 1, 5]

```
>$lineCircleIntersections(l,c) | radcan, // titik potong lingkaran c dan garis l
```

$$\left[\left[\frac{\sqrt{23}+7}{2},\frac{3-\sqrt{23}}{2}\right],\left[\frac{7-\sqrt{23}}{2},\frac{\sqrt{23}+3}{2}\right]\right]$$

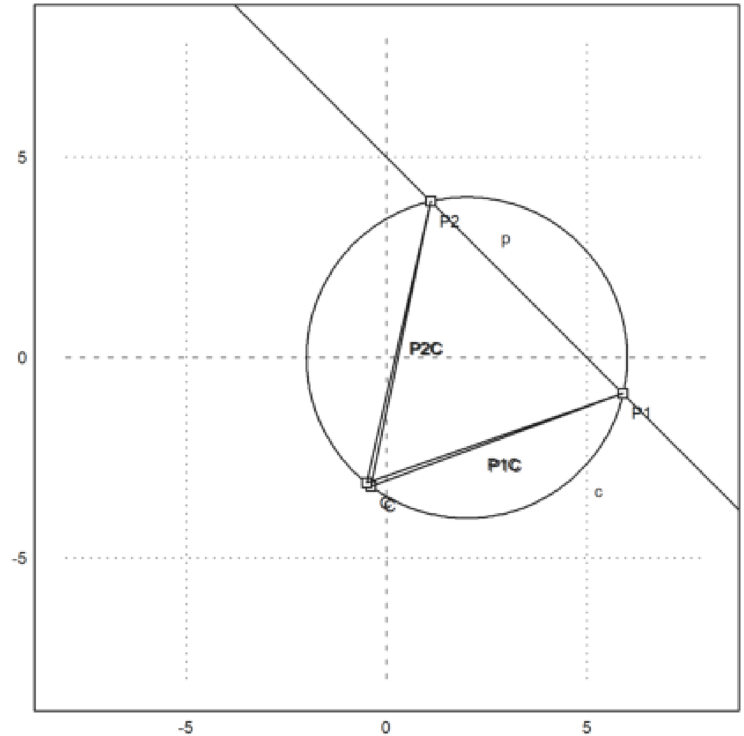
```
>C=A+normalize([-3,-4])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

57°58’20.06’’

```
>C=A+normalize([-4,-5])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

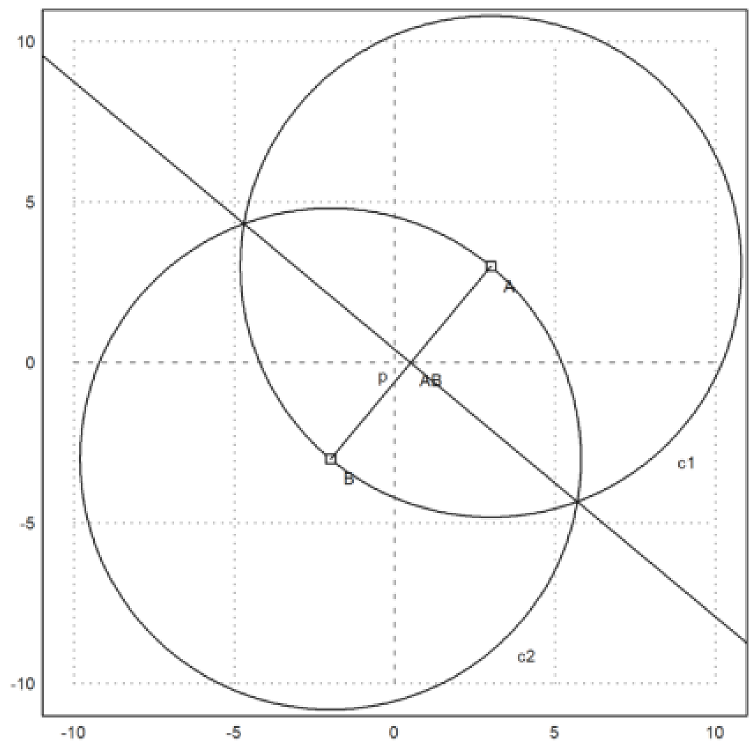
57°58’20.06’’

```
>insimg;
```




```
>//reset
```

```
>A=[3,3]; B=[-2,-3];
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B));
>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);
>l=lineThrough(P1,P2);
>setPlotRange(10); plotCircle(c1); plotCircle(c2);
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l):
```




```
>A &= [a1,a2]; B &= [b1,b2];
>c1 &= circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2 &= circleWithCenter(B,distance(A,B));
>P &= circleCircleIntersections(c1,c2); P1 &= P[1]; P2 &= P[2];
>g &= getLineEquation(lineThrough(P1,P2),x,y);
>$solve(g,y)
```

$$\left[y=\frac{-\left(2\,b_1-2\,a_1\right)\,x+{b_2}^2+{b_1}^2-{a_2}^2-{a_1}^2}{2\,b_2-2\,a_2}\right]$$

```
>$solve(getLineEquation(middlePerpendicular(A,B),x,y),y)
```

$$\left[y=\frac{-\left(2\,b_1-2\,a_1\right)\,x+{b_2}^2+{b_1}^2-{a_2}^2-{a_1}^2}{2\,b_2-2\,a_2}\right]$$

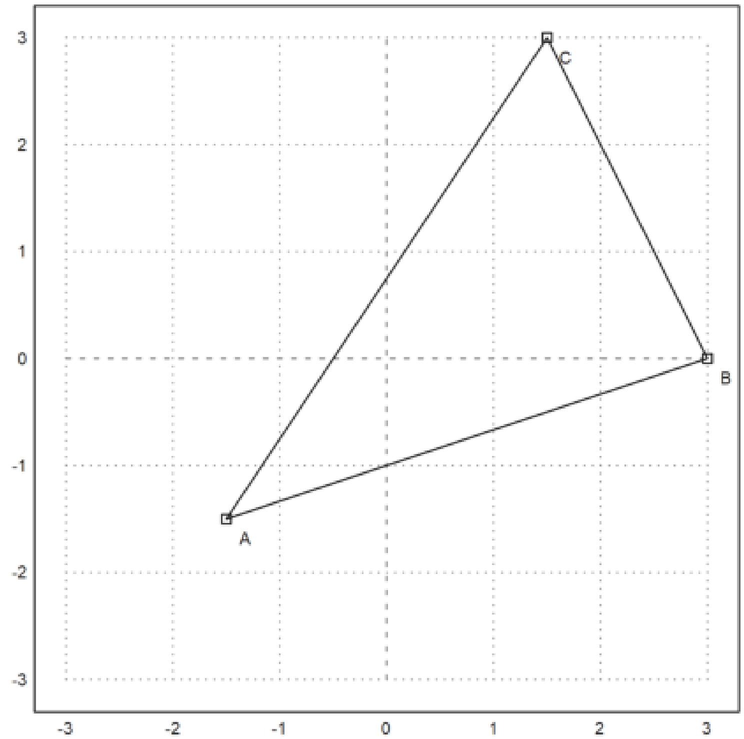
```
>h &=getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y);
>$solve(h,y)
```

$$\left[y=\frac{\left(b_2-a_2\right)\,x-a_1\,b_2+a_2\,b_1}{b_1-a_1}\right]$$

Garis Euler dan Parabola

```
>A::=[-1.5,-1.5]; B::=[3,0]; C::=[1.5,3];
>setPlotRange(3); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
```

```
>plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,A,""):
```




```
>$areaTriangle(A,B,C)
```

$$-\frac{63}{8}$$

```
>c &= lineThrough(A,B)
```

```
     3  9    9
[- -, -, - -]
     2  2    2
```

```
>$getLineEquation(c,x,y)
```

$$\frac{9\,y}{2}-\frac{3\,x}{2}=-\frac{9}{2}$$

```
>$getHesseForm(c,x,y,C), $at(%,[x=C[1],y=C[2]])
```

$$\frac{21}{2^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{5}}$$

$$\frac{21}{2^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{5}}$$

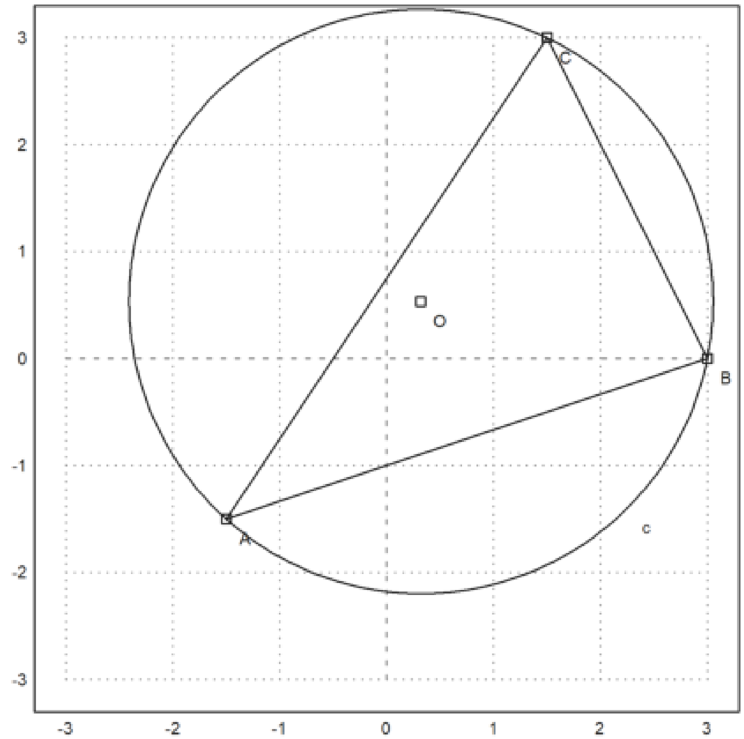
```
>LL &= circleThrough(A,B,C); $getCircleEquation(LL,x,y)
```

$$\left(y-\frac{15}{28}\right)^2+\left(x-\frac{9}{28}\right)^2=\frac{2925}{392}$$

```
>O &= getCircleCenter(LL); $O
```

$$\left[\frac{9}{28},\frac{15}{28}\right]$$

```
>plotCircle(LL()); plotPoint(O(),"O"):
```



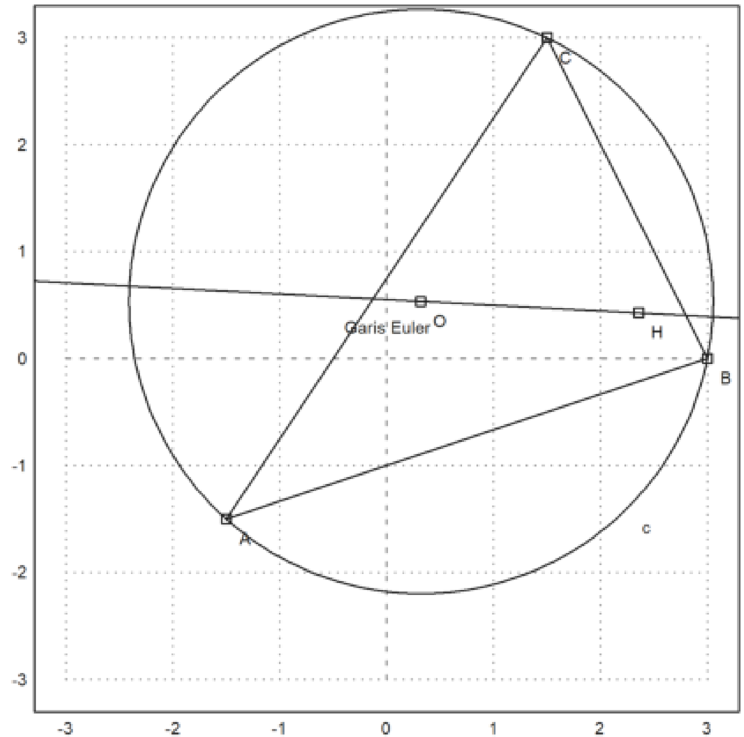

```
>H &= lineIntersection(perpendicular(A,lineThrough(C,B)),...
>  perpendicular(B,lineThrough(A,C))); $H
```

$$\left[\frac{33}{14}, \frac{3}{7}\right]$$

```
>el &= lineThrough(H,O); $getLineEquation(el,x,y)
```

$$-\frac{57\,y}{28}-\frac{3\,x}{28}=-\frac{9}{8}$$

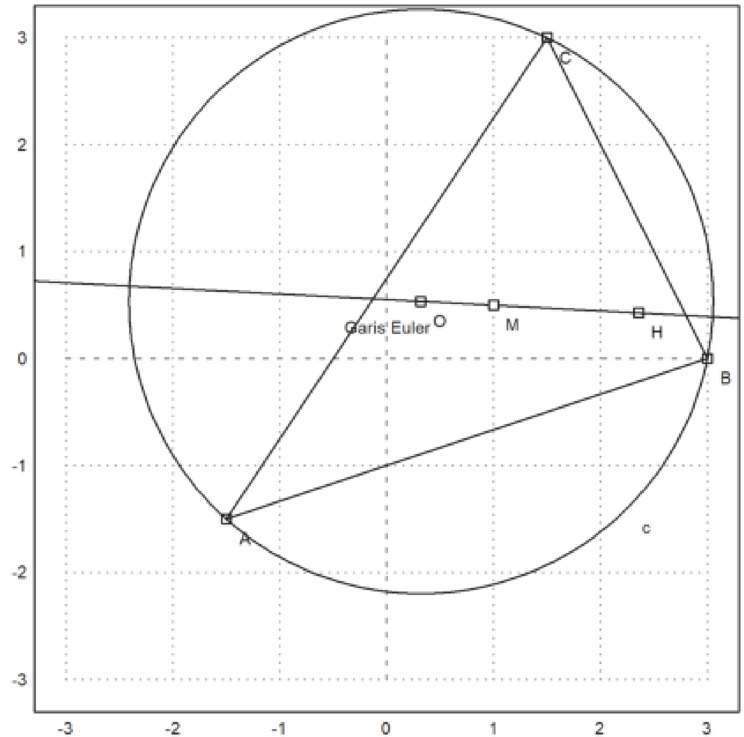
```
>plotPoint(H(),"H"); plotLine(el(),"Garis Euler"):
```




```
>M &= (A+B+C)/3; $getLineEquation(el,x,y) with [x=M[1],y=M[2]]
```

$$-\frac{9}{8} = -\frac{9}{8}$$

```
>plotPoint(M(),"M"): // titik berat
```




```
>$distance(M,H)/distance(M,O)|radcan
```

$$2$$

```
>$computeAngle(A,C,B), degprint(%())
```

$$\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{5}\,\sqrt{13}}\right)$$

60°15'18.43''

```
>Q &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A))|radcan; $Q
```

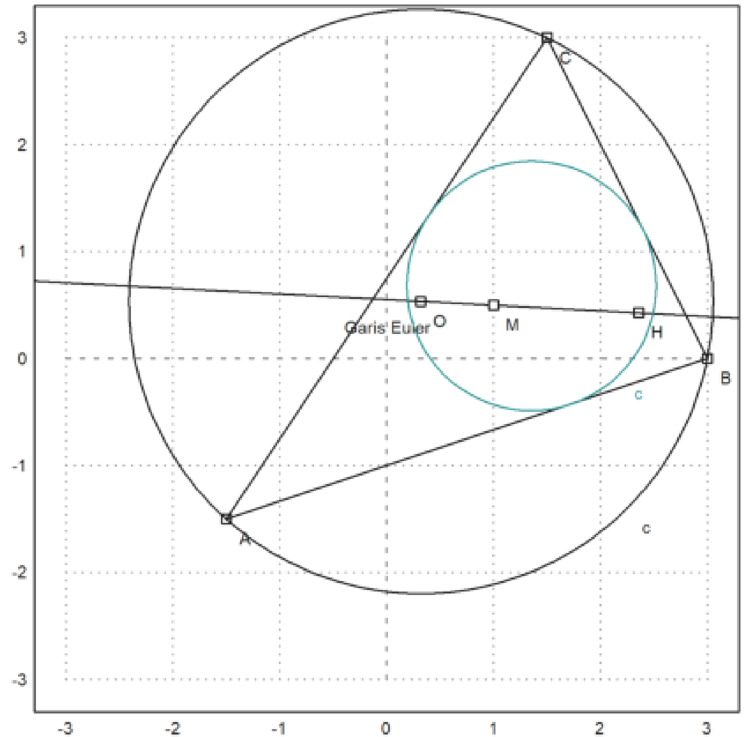
$$\left[\frac{\left(3\,2^{\frac{3}{2}}+3\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}-45\,\sqrt{2}+9}{28},\frac{\left(3\,\sqrt{2}-9\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}+15\,2^{\frac{3}{2}}+15}{28}\right]$$

```
>r &= distance(Q,projectToLine(Q,lineThrough(A,B)))|ratsimp; $r
```

$$\frac{\sqrt{\left(-369\,\sqrt{2}-279\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}+1035\,\sqrt{2}+5526}}{7\,2^{\frac{3}{2}}}$$

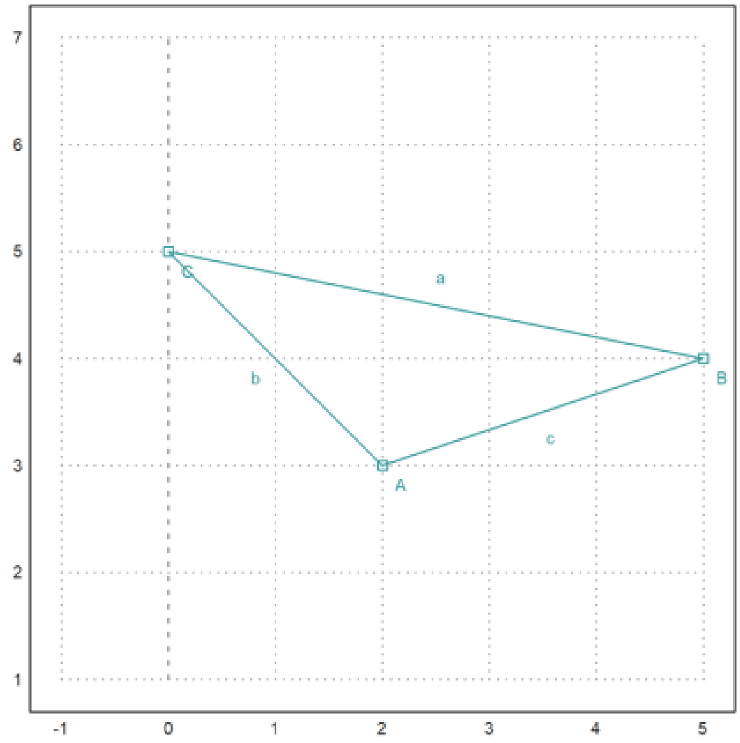
```
>LD &=  circleWithCenter(Q,r); // Lingkaran dalam
```

```
>color(5); plotCircle(LD()):
```



contoh lain dari materi trigonometri rasional

```
>A&:=[2,3]; B&:=[5,4]; C&:=[0,5]; ...
>setPlotRange(-1,5,1,7); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg;
```




```
>$distance(A,B)
```

$$\sqrt{10}$$

```
>c &= quad(A,B); $c, b &= quad(A,C); $b, a &= quad(B,C); $a,
```

$$26$$

```
>wb &= computeAngle(A,B,C); $wb, $(wb/pi*180)()
```

$$\arccos\left(\frac{14}{\sqrt{10}\,\sqrt{26}}\right)$$

29.7448812969

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x), //(b+c-a)^=4b.c(1-x)
```

$$\left[x=\frac{4}{5}\right]$$

$$\left[x=\frac{4}{5}\right]$$

```
>sb &= spread(b,a,c); $sb
```

$$\frac{16}{65}$$

```
>$sin(computeAngle(A,B,C))^2
```

$$\frac{16}{65}$$

```
>ha &= c*sb; $ha
```

$$\frac{32}{13}$$

```
>$sqrt(ha)
```

$$\frac{2^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{13}}$$

```
>$sqrt(ha)*sqrt(a)/2
```

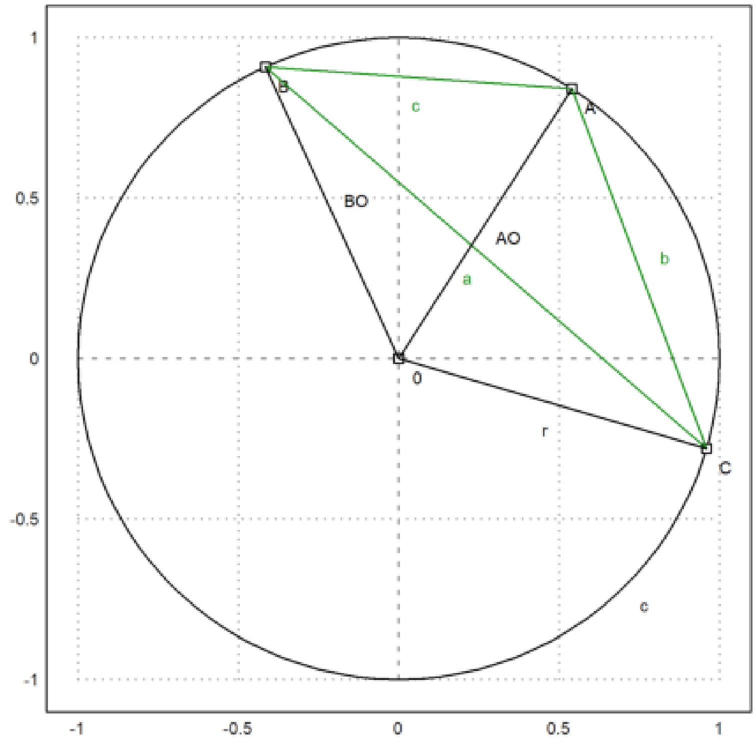
$$\frac{2^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{26}}{\sqrt{13}}$$

```
>$areaTriangle(B,A,C)
```

$$4$$

Aturan penyebaran 3 kali lipat

```
>setPlotRange(1); ...
>color(1); plotCircle(circleWithCenter([0,0],1)); ...
>A:=[cos(1),sin(1)]; B:=[cos(2),sin(2)]; C:=[cos(6),sin(6)]; ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>color(3); plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>color(1); O:=[0,0];  plotPoint(O,"0"); ...
>plotSegment(A,O); plotSegment(B,O); plotSegment(C,O,"r"); ...
>insimg;
```




```
>&remvalue(a,b,c,r); // hapus nilai-nilai sebelumnya untuk perhitungan baru
>rabc &= rhs(solve(triplespread(spread(b,r,r),spread(a,r,r),spread(c,r,r)),r)[4]); $rabc
```

$$-\frac{a\,b\,c}{c^2-2\,b\,c+a\,\left(-2\,c-2\,b\right)+b^2+a^2}$$

```
>function periradius(a,b,c) &= rabc;
```

```
>a:=quadrance(B,C); b:=quadrance(A,C); c:=quadrance(A,B);
```

```
>periradius(a,b,c)
```

```
1
```

```
>$spread(b,a,c)*rabc | ratsimp
```

$$\frac{b}{4}$$

```
>$doublespread(b/(4*r))-spread(b,r,r) | ratsimp
```

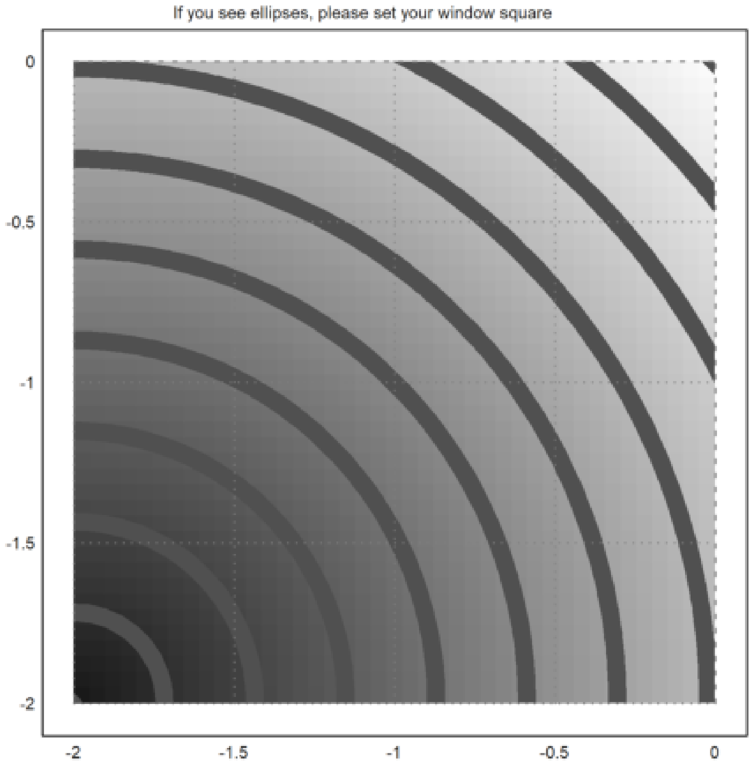
$$0$$

Jarak Minimal pada Bidang

Catatan awal

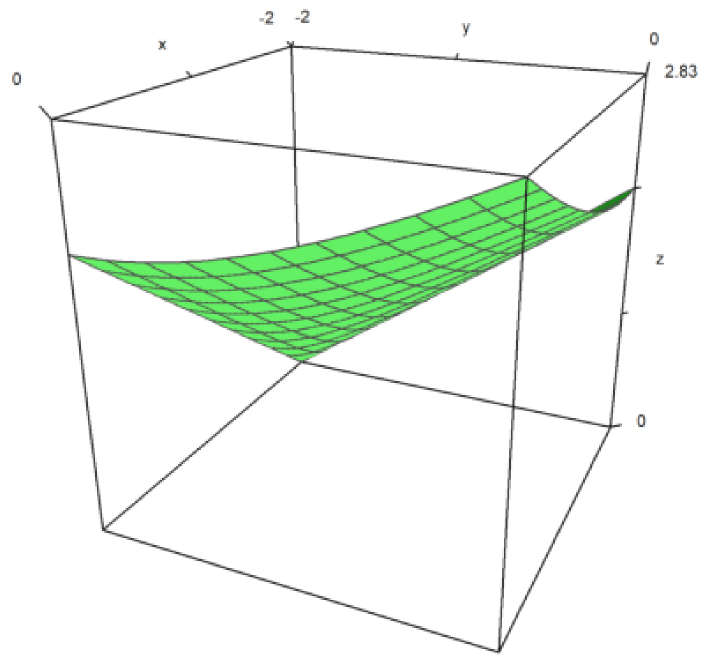
Fungsi yang, ke titik M di bidang, menetapkan jarak AM antara titik tetap A dan M, memiliki garis level yang agak sederhana: lingkaran berpusat di A.

```
>&remvalue();
>A=[-2,-2];
>function d1(x,y):=sqrt((x-A[1])^2+(y-A[2])^2)
>fcontour("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0,hue=1, ...
>title="If you see ellipses, please set your window square"):
```



dan grafiknya juga agak sederhana: bagian atas kerucut:

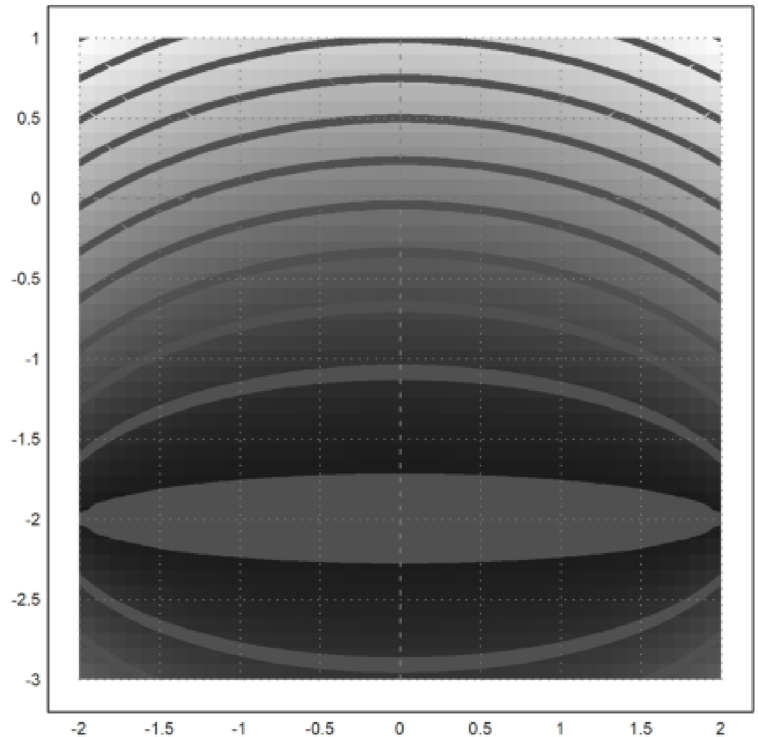
```
>plot3d("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0):
```



Ternyata setelah mencoba yang bisa hanya dengan memasukkan angka 1, karena ketika memakai angka 2, plot tidak membentuk kerucut diatas.

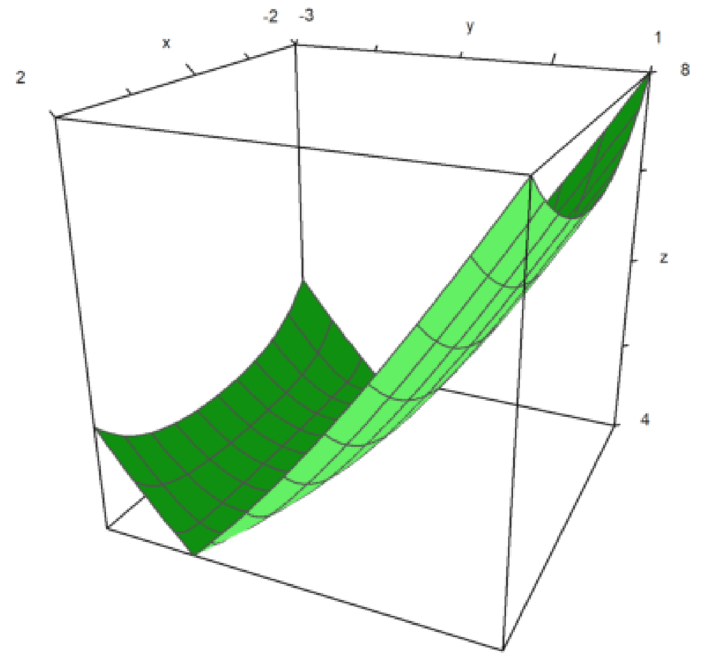
Dua poin

```
>B=[2,-2];
>function d2(x,y):=d1(x,y)+sqrt((x-B[1])^2+(y-B[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```



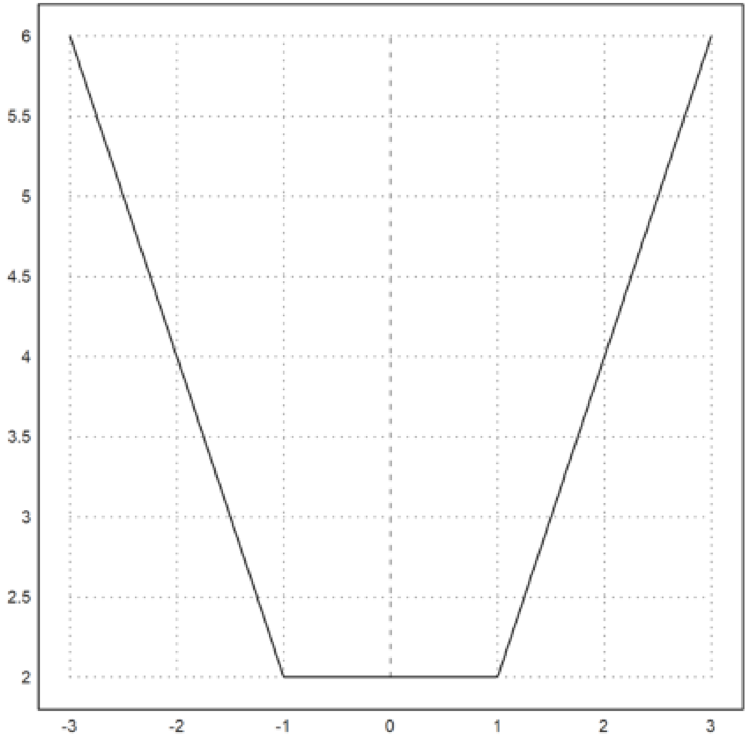
Grafiknya lebih menarik:

```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```



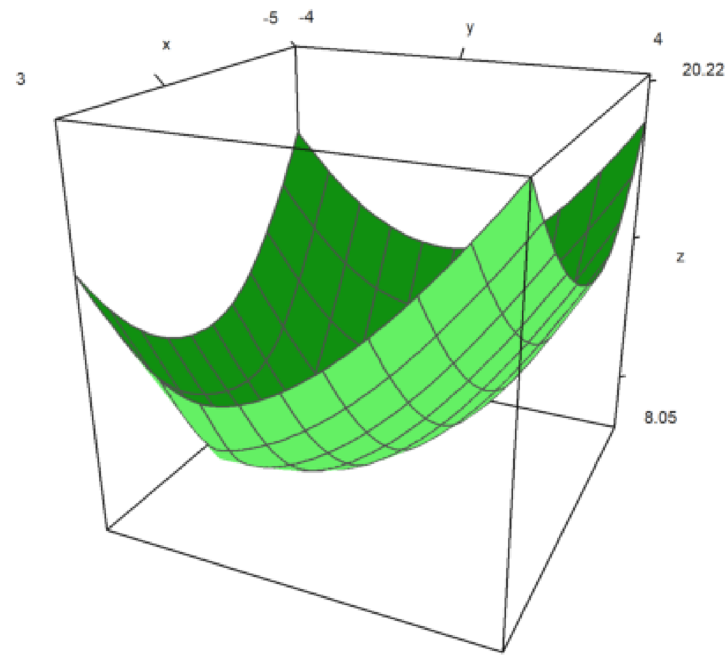
Pembatasan garis (AB) lebih terkenal:

```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```

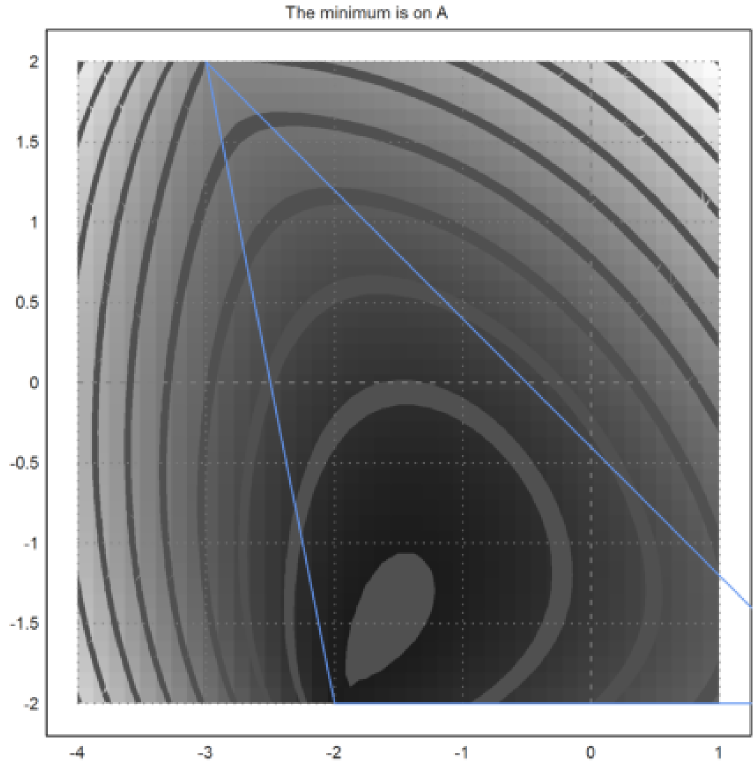


Contoh:

```
>C=[-3,2];
>function d3(x,y):=d2(x,y)+sqrt((x-C[1])^2+(y-C[2])^2)
>plot3d("d3",xmin=-5,xmax=3,ymin=-4,ymax=4);
>insimg;
```

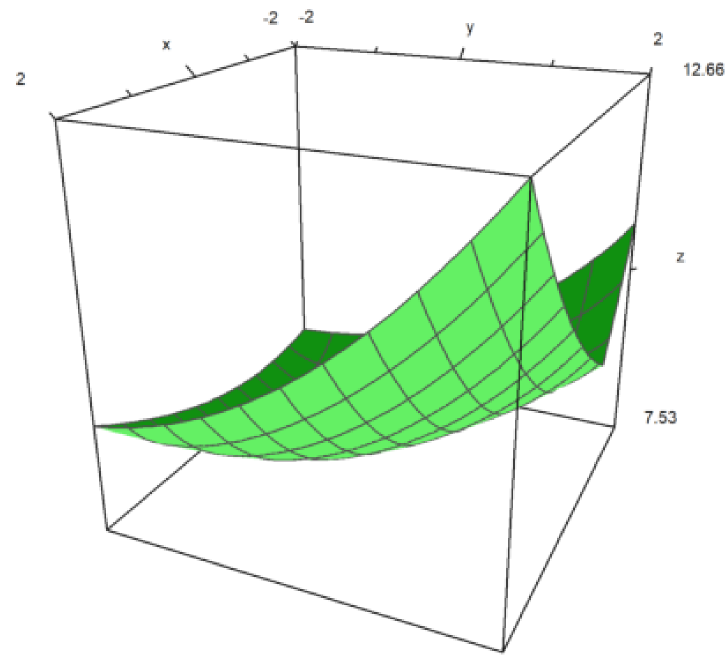



```
>fcontour("d3",xmin=-4,xmax=1,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The minimum is on A");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

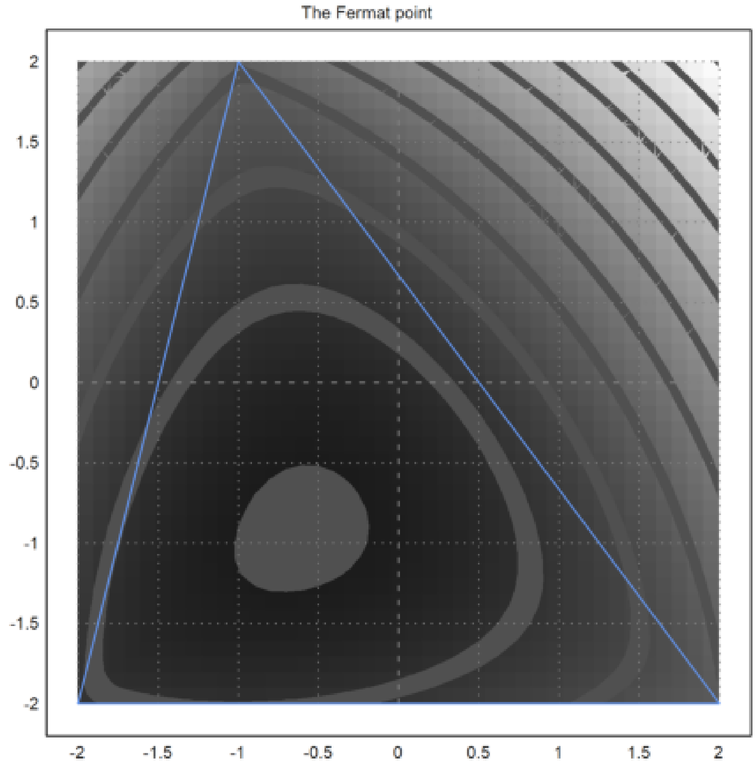


Tetapi jika semua sudut segitiga ABC kurang dari 120 °, minimumnya adalah pada titik F di bagian dalam segitiga, yang merupakan satu-satunya titik yang melihat sisi-sisi ABC dengan sudut yang sama (maka masing-masing 120 °):

```
>C=[-1,2];
>plot3d("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2):
```

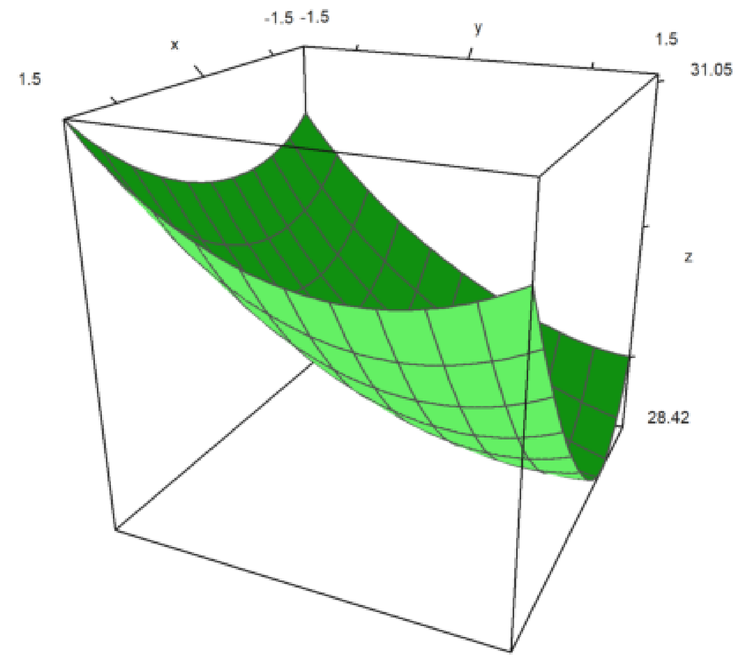



```
>fcontour("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The Fermat point");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

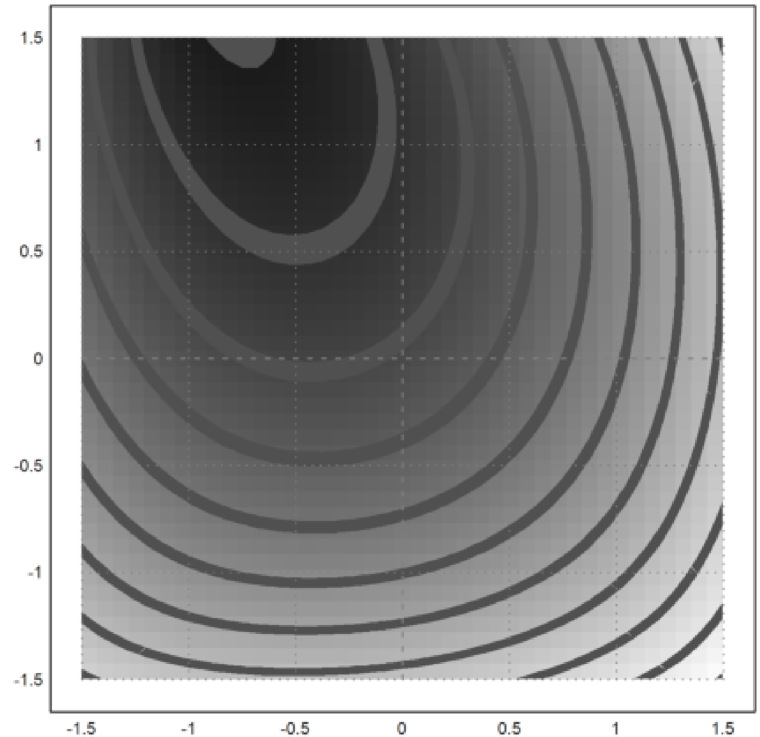

The Fermat point
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

Langkah selanjutnya adalah menambahkan 4 titik D dan mencoba meminimalkan MA+MB+MC+MD; katakan bahwa Anda adalah operator TV kabel dan ingin mencari di bidang mana Anda harus meletakkan antena sehingga Anda dapat memberi makan empat desa dan menggunakan panjang kabel sesedikit mungkin!

```
>D=[2,21];
>function d4(x,y):=d3(x,y)+sqrt((x-D[1])^2+(y-D[2])^2)
>plot3d("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5):
```




```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],points=1,add=1,color=12);
>insimg;
```


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5

```
>load geometry;
```

Pertama dua garis yang membentuk kerucut.

```
>g1 &= lineThrough([0,0],[2,a])
```

```
[- a, 2, 0]
```

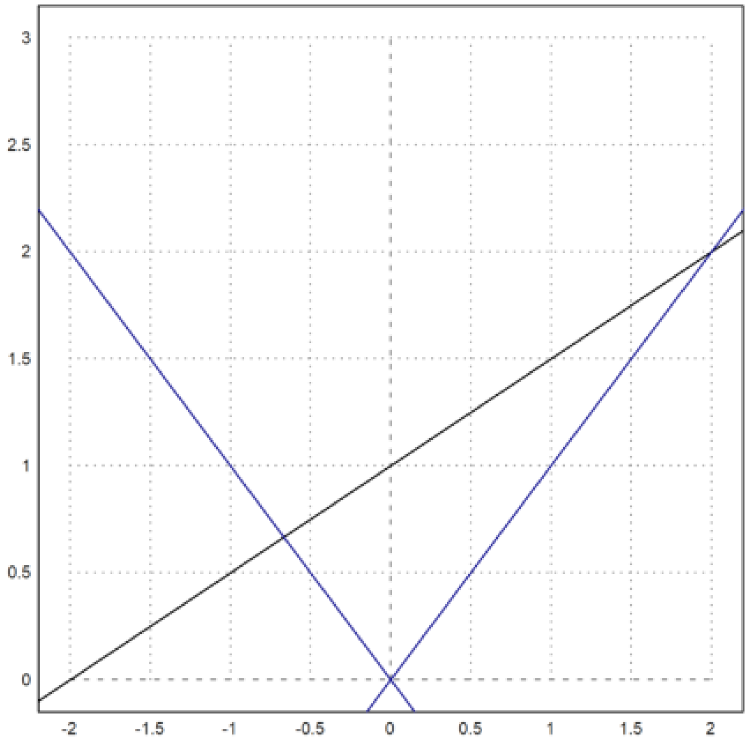
```
>g2 &= lineThrough([0,0],[-2,a])
```

```
[- a, - 2, 0]
```

```
>g &= lineThrough([-2,0],[2,2])
```

$$[-2, 4, 4]$$

```
>setPlotRange(-2,2,0,3);
>color(black); plotLine(g(),"")
>a:=2; color(blue); plotLine(g1(),""), plotLine(g2(),""):
```



Sekarang kita ambil titik umum pada sumbu y.

```
>P &= [0,u]
```

```
[0, u]
```

Hitung jarak ke g1.

```
>d1 &= distance(P,projectToLine(P,g1)); $d1
```

$$\sqrt{\left(\frac{a^2\,u}{a^2+4}-u\right)^2+\frac{4\,a^2\,u^2}{\left(a^2+4\right)^2}}$$

Hitung jarak ke g.

```
>d &= distance(P,projectToLine(P,g)); $d
```

$$\sqrt{\left(\frac{u+4}{5}-u\right)^2+\frac{\left(2\,u-2\right)^2}{25}}$$

Dan temukan pusat kedua lingkaran yang jaraknya sama.

```
>sol &= solve(d1^2=d^2,u); $sol
```

$$\left[u=\frac{-\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+4}+a^2+4}{a^2-1},u=\frac{\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+4}+a^2+4}{a^2-1}\right]$$

Ada dua solusi.

```
>u := sol()
```

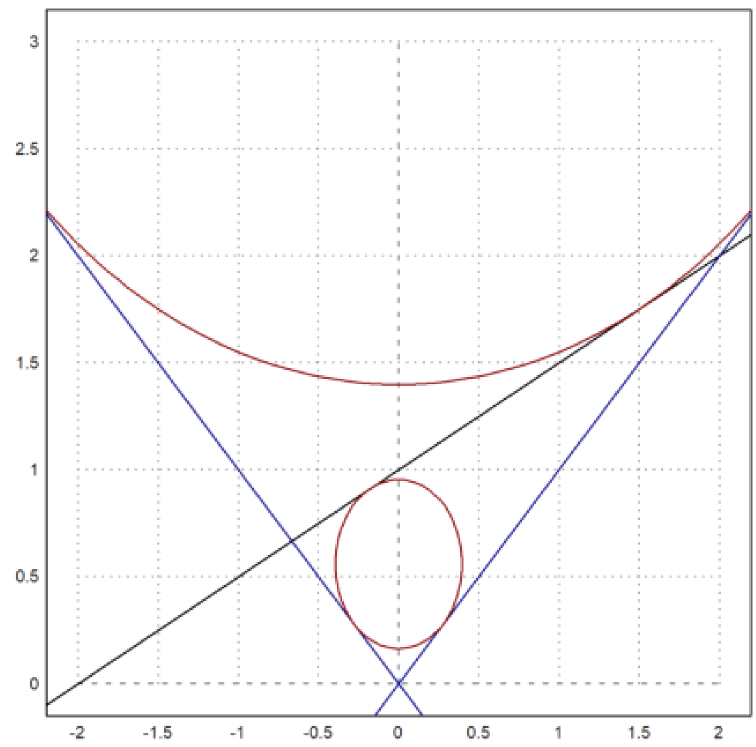
```
[0.558482,  4.77485]
```

```
>dd := d()
```

```
[0.394906,  3.37633]
```

Plot lingkaran ke dalam gambar.

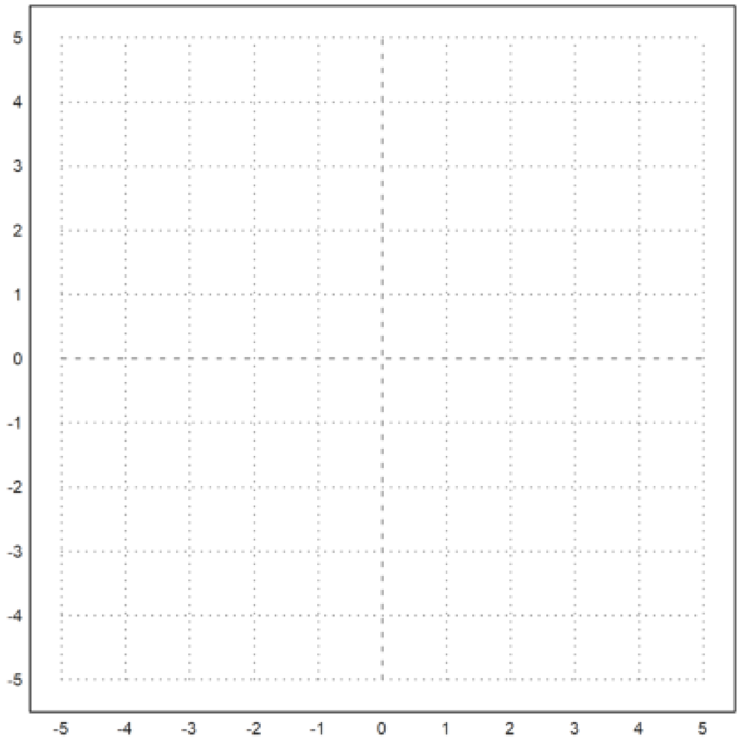
```
>color(red);
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[1]),"");
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[2]],dd[2]),"");
>insimg;
```


3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

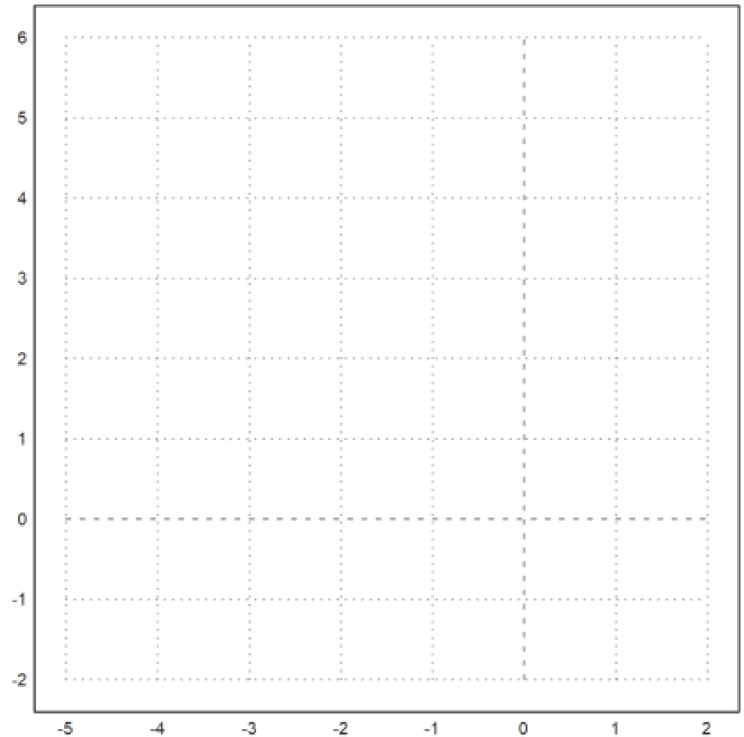
Mengatur bidang koordinat

setPlotRange(r): pusat bidang koordinat (0,0) dan batas-batas sumbu-x dan y adalah -r sd r

```
>setPlotRange(5): //mendefinisikan bidang koordinat
```




```
>setPlotRange(-5,2,-2,6):
```


6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2

Objek-objek geometri meliputi titik, garis, bidang, bentuk bentuk geometri pada bidang, beserta sifat sifatnya. Tiga unsur geometri yaitu titik, garis, dan bidang. Ketiga unsur tersebut juga disebut sebagai tiga unsur yang tak didefinisikan.

---

1. Titik

Objek atau unsur pangkal dalam Geometri yaitu titik. Suatu titik dipikirkan sebagai suatu tempat/ posisi dalam ruang. Titik tidak memiliki panjang maupun ketebalan. Bekas tusukan jaru dan sentuhan pertama ujung pensil di atas kertas dapat dikatakan sebuah noktah dengan diberi nama suatu huruf alphabet kapital. Noktah sendiri adalah bintik atau titik kecil.

Contoh:
Gambarlah titik A di koordinat (1,5)!

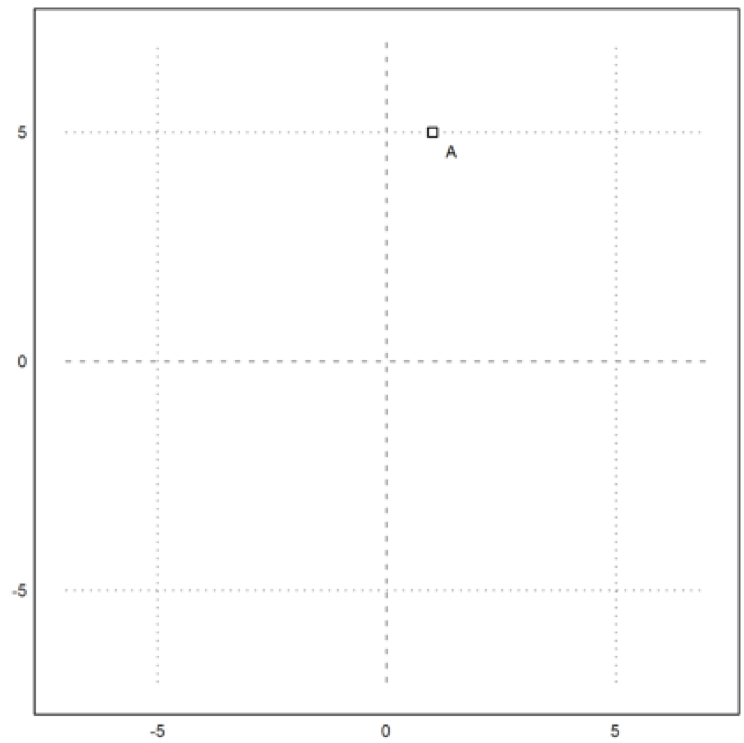
```
>setPlotRange(7); // mendefinisikan bidang kordinat baru :
```

Langkah pertama yaitu membuat bidang koordinat dengan jarak 7. Pada setPlotRange menampilkan bidang dengan jarak yang sama dengan masing masing sumbu.

```
>A=[1,5];
```

Langkah kedua yaitu memanggil titik A untuk menggambar titik A di bidang koordinat.

```
>plotPoint(A,"A"):
```



Langkah ketiga yaitu menggambar titik dengan fungsi plotPoint. Fungsi ini untuk menggambar titik A dengan memberi nama "A". Titik A disini merupakan titik koordinat (1,5). 1 sebagai sumbu x dan 5 sebagai sumbu y.

---

2. Menggambar Ruas Garis

Ruas Garis adalah sebagian dari garis yang dibatasi oleh dua titik ujung yang berbeda, dan memuat semua titik pada garis di antara ujung-ujungnya. Ruas garia memiliki titik awal dan titik akhir.

Contoh:
Gambarlah ruas garis dengan titik A (0,5) dan titik B (1,5)!

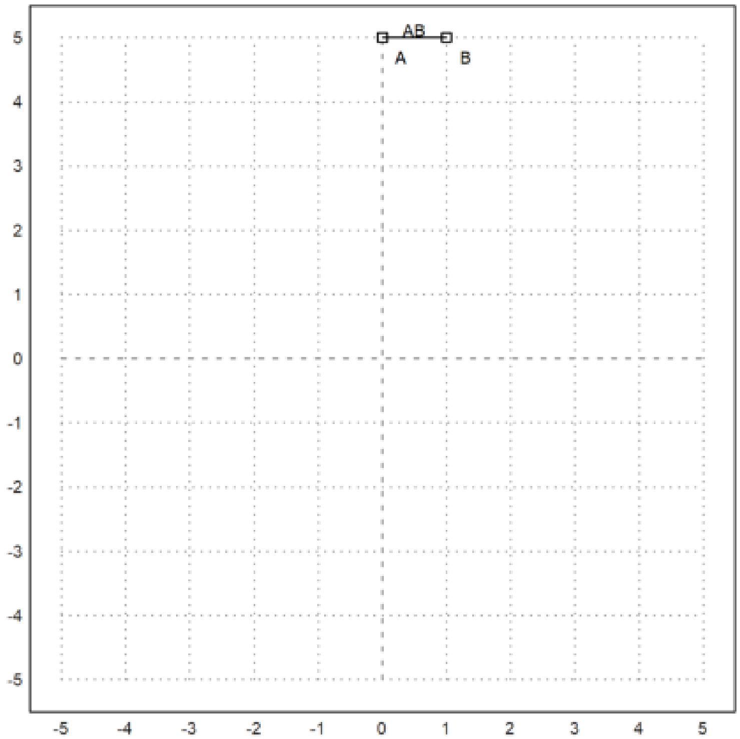
```
>setPlotRange(5); // membuat koordinat
>A=[0,5]; plotPoint(A,"A")
```

Menentukan titik A dan menggambar titik A

```
>B=[1,5]; plotPoint(B,"B");
```

Menentukan titik B dan menggambar titik B menggunakan fungsi plotPoint

```
>plotSegment(A,B,"AB",9):
```



3. Menggambar Garis

Sebuah garis dipikirkan sebagai suatu himpunan titik berderet yang panjang tak terbatas , tetapi tidak memiliki lebar. Sebuah garis direpresentasikan dengan sebuah gambar sinar dengan mata di kedua ujungnya yang menunjukkan bahwa garis tersebut tak berakhir.

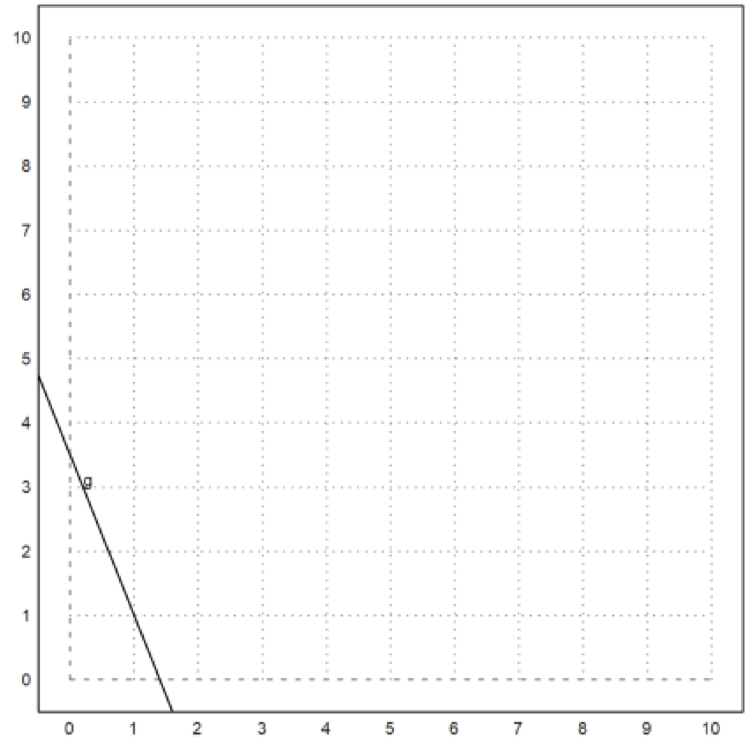
Sebuah garis itu lurus sempurna, tidak memiliki ketebalan. Garis bisa dimodelkan sebagai garis lurus yang tidak ada awalan dan akhirannya.

Contoh:
Gambarlah garis dengan persamaan 5x+2y=7!
Persamaan 5x+2y=7 bisa dituliskan sebagai [5,2,7]

```
>setPlotRange(0,10,0,10);
```

Langkah pertama adalah menentukan batas koordinat yaitu x1=0 ,x2=10,y1=0 dan y2=10

```
>plotLine([5,2,7],"g",10):
```



g

4. Menggambar Bidang

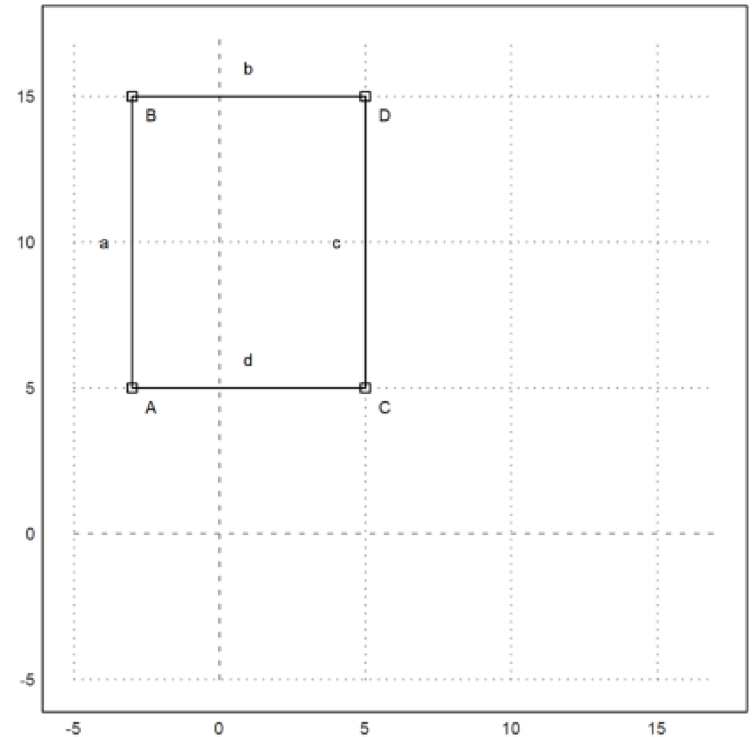
Bidang adalah permukaan rata dan tentu batasnya. Bidang didefinisikan sebagai permukaan datar yang didefinisikan oleh serangkaian garis yang tidak berpotongan

Contoh:
Menggambar persegi panjang ABCD. Titik A (-3,5), B(-3,15), C(5,5), D(5,15)!

```
>setPlotRange(-5,17,-5,17); //mendefinisikan bidang koordinat
>A=[-3,5]; B=[-3,15]; C=[5,5]; D=[5,15]; //mendefinisikan dan menggambar 4 titik
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); plotPoint(D,"D");
```

Menggambar 4 titik

```
>plotSegment(A,B,"a"); plotSegment(B,D,"b"); plotSegment(C,D,"c"); plotSegment(A,C,"d"):
```



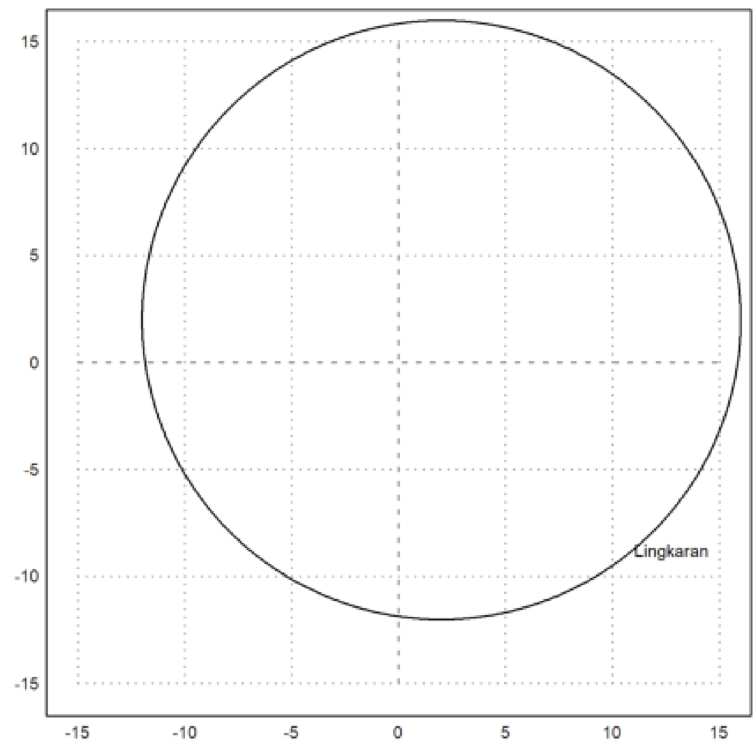
b
B
D
a
c
d
A
C
15
10
5
0
-5
-5
0
5
10
15

5. Menggambar Lingkaran

Lingkaran adalah tempat kedudukan/himpunan titik-titik yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu. Jarak yang sama disebut panjang jari-jari linngkaran dan titik tertentu disebut pusat lingkaran.

Contoh:

```
>setPlotRange(15);
>P=[2,2]; r=[14];
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran"): // gambar lingkaran
```


15
10
5
0
-5
-10
-15
-15
-10
-5
0
5
10
15
Lingkaran

6. Menggambar Parabola

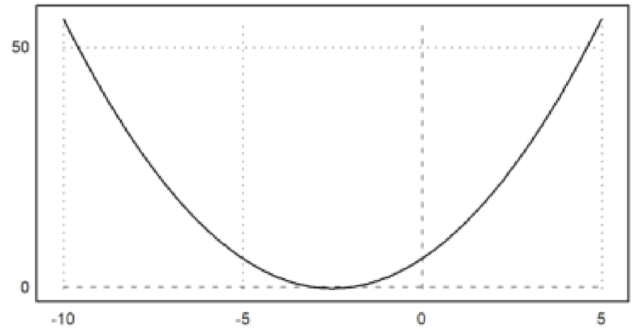
Parabola adalah garis lengkung datar yang berbentuk jika suatu bidang memotong kerucut sejajar dengan garis titik sudut puncak dengan salah satu titik pada keliling alas. Contohnya seperti antena tv berbentuk bundar seperti piring cekung yang dapat menangkap siaran jarak jauh.

Contoh:
Misalkan persamaan parabolanya

$$f(x) = x^2 + 5x + 6$$

Gambarlah bentuk parabolanya!

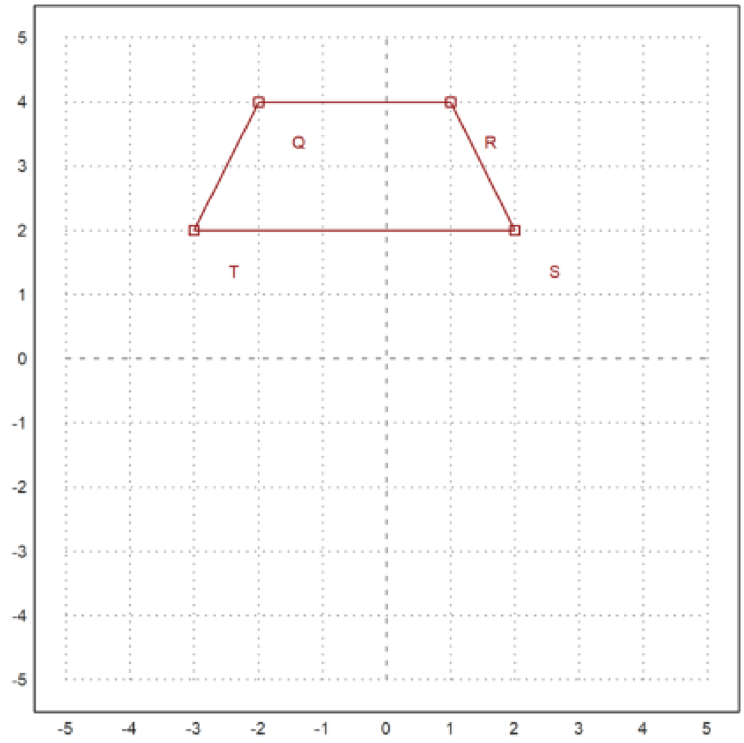
```
>function f(x) := x^2+5x+6
>aspect(2), plot2d("f(x)",-10,5):
```



7. Trapesium

Contoh:

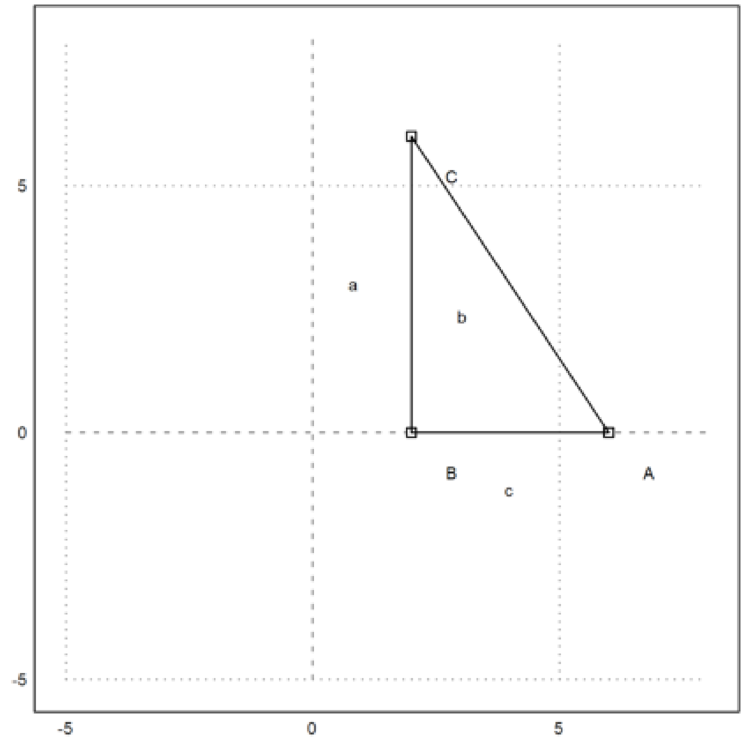
```
>setPlotRange(-5,5,-5,5);
>Q=[-2,4]; plotPoint(Q,"Q");
>R=[1,4]; plotPoint(R,"R");
>S=[2,2]; plotPoint(S,"S");
>T=[-3,2]; plotPoint(T, "T");
>color(2); plotSegment(Q,R," "); plotSegment(S,R," ");  plotSegment(S,T," "); plotSegment(Q,T," "):
```



Q
R
T
S
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

8. Segitiga Siku-siku

```
>setPlotRange(-5,8,-5,8);
>A=[6,0]; plotPoint(A,"A");
>B=[2,0]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,6]; plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,"c");
>plotSegment(B,C,"a");
>plotSegment(A,C,"b"):
```



Titik Tengah dan Titik Potong

1. Titik tengah suatu ruas garis

Titik tengah suatu ruas garis adalah titik pada suatu ruas garis yang membagi dua ruas tersebut menjadi dua ruas garis yang kongruen (jarak dari titik tengah ke ujung-ujung garis adalah sama). Jika diketahui dua titik, yaitu titik A dan B, maka titik tengah garisnya adalah titik C yang terletak di tengah-tengah antara titik A dan B. Titik C berjarak sama dari titik A dan B.

Kita dapat mengetahui titik tengah suatu ruas garis dengan menggunakan perintah EMT, yaitu :

middlePerpendicular(A,B)

Jika ada dua koordinat ujung garis (x1, y1) dan (x2, y2), maka koordinat titik tengahnya (x, y) dapat dihitung sebagai berikut:

$$x = \frac{(x_1 + x_2)}{2}, y = \frac{(y_1 + y_2)}{2}$$

Artinya, untuk mengetahui titik tengah suatu ruas garis dengan menjumlahkan koordinat x dari kedua ujung garis dan kemudian membaginya dengan 2 untuk menemukan koordinat x titik tengah. Demikian juga, untuk menemukan koordinat y titik tengah dengan menjumlahkan koordinat y dari kedua ujung garis dan membaginya dengan 2.

Contoh soal:

Tentukan titik tengah suatu ruas garis jika diketahui dua titik, yaitu

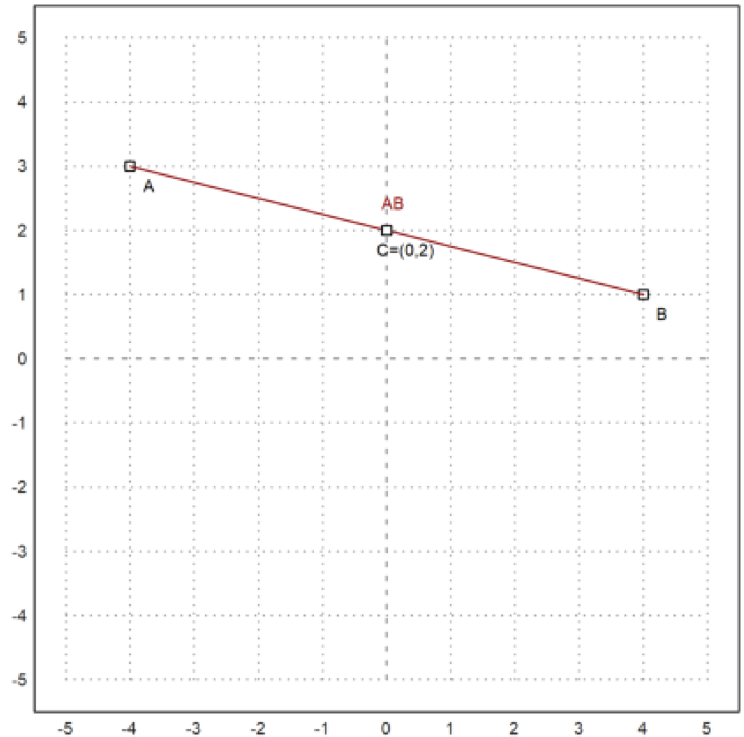
$$A(-4, 3)\ dan\ B(4, 1)$$

Penyelesaian:

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(5);
>A=[-4,3];
>B=[4,1];
>plotPoint(A);
>plotPoint(B);
>color(2);
>plotSegment(A,B); color(1);
>p=middlePerpendicular(A,B);
>C=lineIntersection(p,lineThrough(A,B));
>plotPoint(C,value=1):
```



Diketahui

$$A(-4,3)\ dan\ B(4,1)$$

$$x_1 = -4, x_2 = 4, y_1 = 3, y_2 = 1$$

Titik tengahnya

$$C = (\frac{-4+4}{2}, \frac{3+1}{2})$$

$$C = (\frac{0}{2}, \frac{4}{2})$$

$$C = (0, 2)$$

---

2. Titik potong dua garis

Titik potong dua garis adalah titik di mana dua garis lurus berpotongan satu sama lain. Dalam konteks geometri atau matematika, dua garis yang berpotongan akan memiliki satu titik potong, yang merupakan titik yang terletak pada kedua garis tersebut. Titik potong ini memiliki koordinat yang spesifik dalam sistem koordinat yang digunakan.

Dalam geometri Euclidean, jika dua garis sejajar, maka mereka tidak akan memiliki titik potong. Namun, jika dua garis tidak sejajar, maka mereka akan memiliki satu titik potong yang dapat dihitung atau ditentukan.

Secara matematis, untuk menemukan titik potong dua garis, kita dapat menggunakan sistem persamaan linier. Jika kita memiliki dua persamaan linier yang mewakili dua garis, Kita dapat menyelesaikan sistem persamaan ini untuk menemukan nilai koordinat titik potong. Biasanya, kita akan menggunakan metode substitusi, eliminasi, atau grafik untuk menemukan titik potongnya.

Untuk mengetahui titik potong dua garis pada EMT terdapat perintah

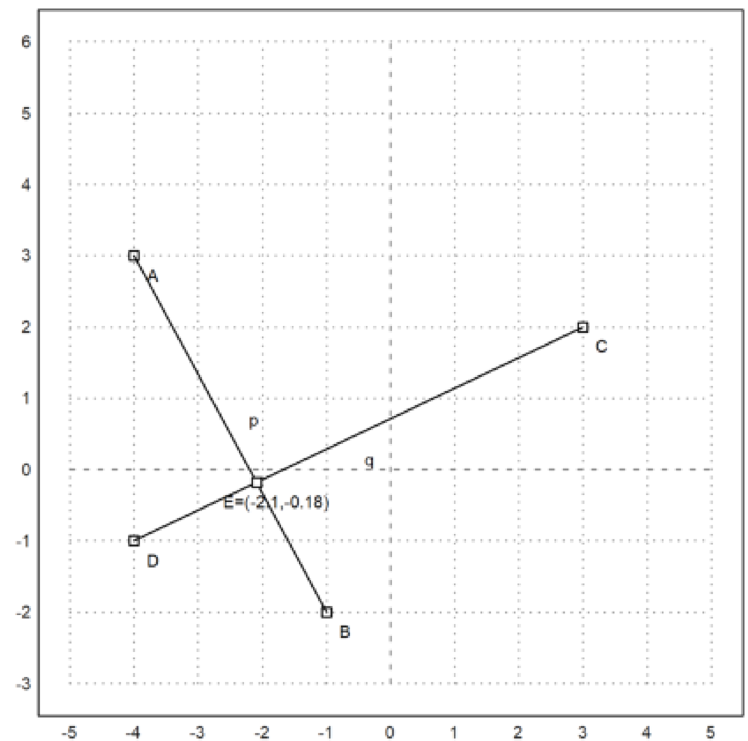
lineIntersection(g, h)

Contoh soal:

Diberikan titik A(-4,3), B(-1,-2), C(3,2), dan D(-4,-1). p merupakan ruas garis AB dan q merupakan ruas garis CD. Tentukan titik potong dua ruas garis tersebut!

Penyelesaian:

```
>setPlotRange(-5,5,-3,6);
>A=[-4,3]; plotPoint(A,"A");
>B=[-1,-2]; plotPoint(B,"B");
>C=[3,2]; plotPoint(C,"C");
>D=[-4,-1]; plotPoint(D,"D");
>plotSegment(A,B,"p");
>plotSegment(C,D,"q");
>t=lineThrough(A,B); // garis yang melalui A dan B
>s=lineThrough(C,D); // garis yang melalui C dan D
>E=lineIntersection(t,s); // E adalah titik potong p dan q
>plotPoint(E,value=1):
```



A
B
C
D
p
g
E=(-2.1,-0.18)

3. Titik potong garis dan lingkaran

Titik potong antara garis dan lingkaran adalah titik di mana sebuah garis lurus memotong lingkaran. Untuk memahami konsep ini secara lengkap, kita perlu memahami beberapa hal terkait dengan garis dan lingkaran.

Garis: Garis adalah himpunan tak terbatas titik yang terletak sepanjang jalur yang sama, dan garis ini dapat dinyatakan dalam berbagai bentuk persamaan matematis, seperti persamaan linier. Sebuah garis memiliki kemiringan (gradien) dan titik potong sumbu y (intersep) yang memungkinkan kita untuk menggambarkannya atau menganalisanya dalam sistem koordinat.

Lingkaran: Lingkaran adalah himpunan semua titik yang berjarak sama dari satu titik tertentu yang disebut sebagai pusat lingkaran. Jarak ini disebut sebagai jari-jari lingkaran. Persamaan matematis dari lingkaran adalah

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

di mana (a, b) adalah koordinat pusat lingkaran dan r adalah jari-jari lingkaran.

Ketika kita berbicara tentang titik potong antara garis dan lingkaran, ada beberapa kemungkinan, yaitu:

Tidak Ada Titik Potong: Garis tersebut mungkin tidak memotong lingkaran sama sekali jika jarak antara garis dan pusat lingkaran lebih besar dari jari-jari lingkaran.

Satu Titik Potong: Garis mungkin hanya memotong lingkaran di satu titik jika garis tersebut menyentuh lingkaran secara tepat pada satu titik, dengan jarak antara garis dan pusat lingkaran sama dengan jari-jari lingkaran.

Dua Titik Potong: Garis bisa memotong lingkaran di dua titik berbeda jika garis melintasi lingkaran.

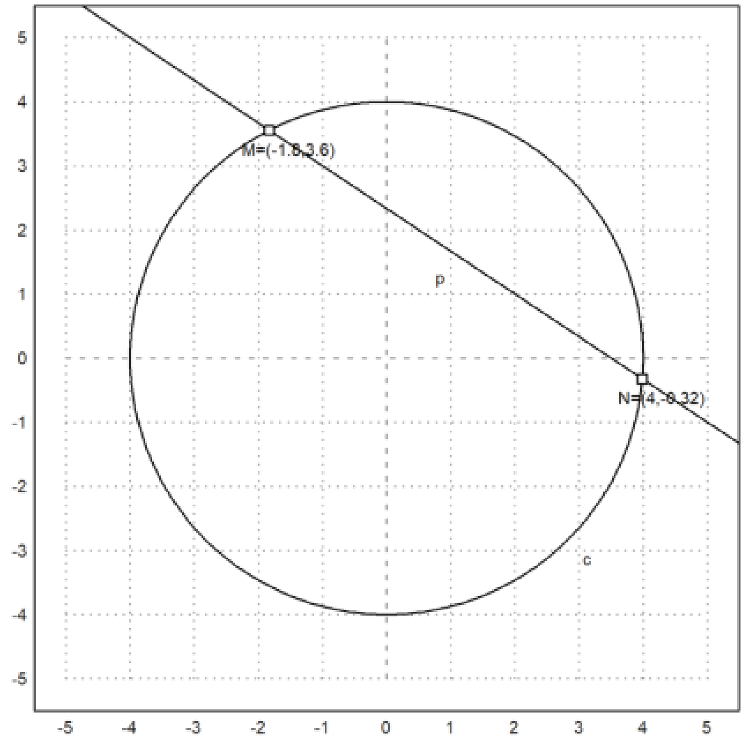
Untuk menentukan titik potong antara garis dan lingkaran, kita perlu menyelesaikan sistem persamaan antara persamaan garis (yang bisa berupa persamaan linier) dan persamaan lingkaran. Ini bisa menghasilkan titik potong yang merupakan koordinat di mana garis memotong lingkaran.

Contoh soal:

Diberikan lingkaran berjari jari 4 dengan titik pusat di (0,0). diberikan dua titik A dan B dengan koordinat berturut-turut (2,1) dan (-1,3). Apabila dibuat garis yang melalui titik A dan B serta memotong lingkaran,tentukan koordinat titik potong garis dan lingkaran terebut!

Penyelesaian:

```
>setPlotRange(5);
>O&:=[0,0]; c=circleWithCenter(O,4);
>A&:=[2,1]; B&:=[-1,3]; p=lineThrough(A,B);
>plotCircle(c); plotLine(p);
>{P1,P2}=lineCircleIntersections(p,c);
>P1; P2;
>plotPoint(P1,"M",value=1); plotPoint(P2,"N",value=1):
```



Menghitung menggunakan maxima

```
>c&=circleWithCenter(0,4)
```

[0, 0, 4]

```
>l&=lineThrough(A,B)
```

[- 2, - 3, - 7]

```
>$lineCircleIntersections(l,c)|radcan
```

$$\left[\left[\frac{14-3^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{53}}{13},\frac{2\,\sqrt{3}\,\sqrt{53}+21}{13}\right],\left[\frac{3^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{53}+14}{13},\frac{21-2\,\sqrt{3}\,\sqrt{53}}{13}\right]\right]$$

Akan ditunjukkan juga bahwa sudut-sudut yang menghadap bsuusr yang sama adalah sama besar.

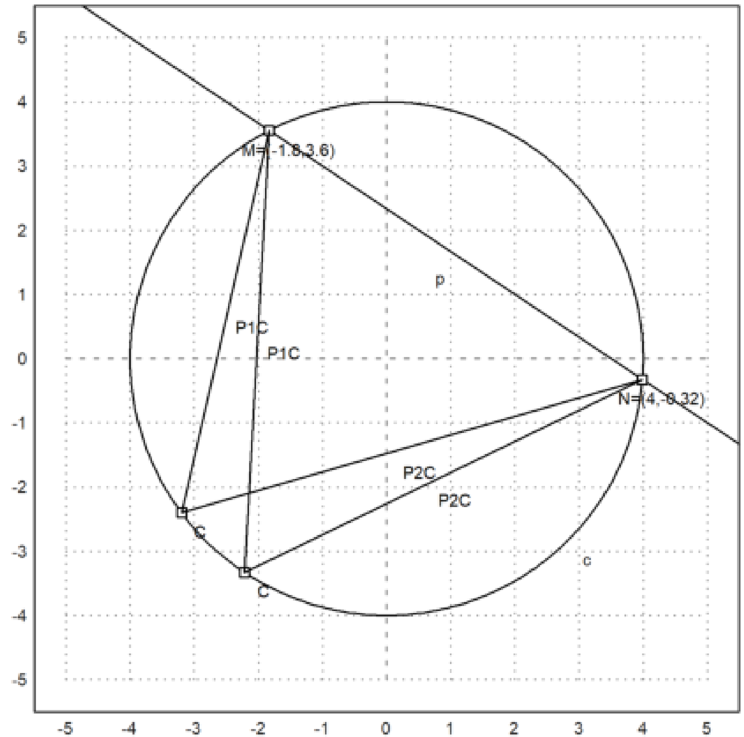
```
>C=O+normalize([-2,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

```
60°57'49.55''
```

```
>C=O+normalize([-4,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C)
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

```
60°57'49.55''
```

```
>insimg;
```


M=(-1.8,3.6)
N=(4,-0.32)
p
P1C
P1C
P2C
P2C
C
C
c

4. Titik potong dua lingkaran

Titik potong dua lingkaran adalah titik atau titik-titik di mana dua lingkaran berpotongan, yang berarti bahwa titik-titik tersebut terletak pada kedua lingkaran sekaligus. Titik potong ini dapat ditemukan jika dua lingkaran saling bersilangan, menyilangi, atau bersinggungan satu sama lain.

Dalam kasus titik potong dua lingkaran, ada beberapa skenario yang mungkin terjadi:

Dua Lingkaran Saling Bersilangan: Ini berarti bahwa dua lingkaran sepenuhnya tumpang tindih satu sama lain, dan titik potongnya akan ada di setiap titik tumpang tindih.

Dua Lingkaran Saling Menyilangi: Dalam situasi ini, dua lingkaran saling melintasi satu sama lain, tetapi tidak sepenuhnya tumpang tindih. Oleh karena itu, akan ada dua titik potong yang berbeda di mana kedua lingkaran berpotongan.

Dua Lingkaran Bersinggungan: Jika dua lingkaran bersinggungan, maka mereka hanya memiliki satu titik potong yang merupakan titik sentuh antara kedua lingkaran. Jika lingkaran tersebut bersinggungan di dalam, maka mereka akan memiliki satu titik potong di dalam satu lingkaran, dan jika bersinggungan di luar, maka titik potongnya berada di luar kedua lingkaran.

Untuk menentukan titik potong antara dua lingkaran, kita dapat menggunakan prinsip geometri dan aljabar. Secara matematis, kita dapat menyelesaikan sistem persamaan antara persamaan lingkaran pertama dan lingkaran kedua. Persamaan umum lingkaran adalah

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

di mana (a,b) adalah pusat lingkaran dan r adalah jari-jari lingkaran. Dengan menggabungkan persamaan lingkaran pertama dan kedua, kita dapat menemukan titik potongnya.

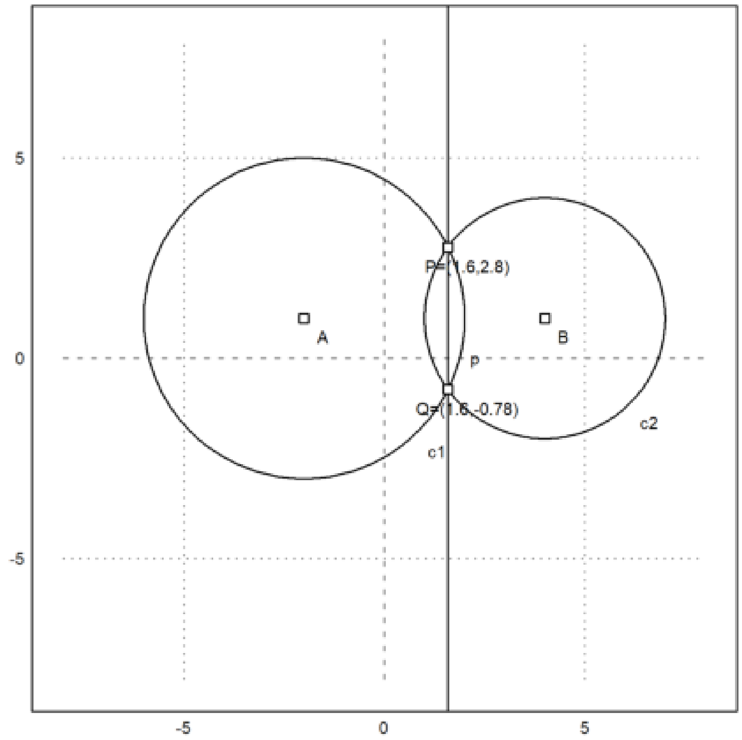
Dalam beberapa kasus, bisa tidak ada titik potong jika kedua lingkaran berada pada posisi yang tidak saling bersilangan, menyilangi, atau bersinggungan.

Contoh soal:

Diberikan 2 lingkaran, C1 dan C2 dengan jari-jari berturut-turut 4 dan 3. Titik A(-2,1) merupakan titik pusat lingkaran petama(C1)dan titik B (4,1) merupakan titik pusat lingkaran kedua(C2). Kedua lingkaran tersebut berpotongan pada dua titik p1 dan p2. Tentukan koordinat p1 dan p2!

Penyelesaian:

```
>setPlotRange(8);
>A=[-2,1]; B=[4,1];
>c1=circleWithCenter(A,4); // lingkaran 1
>c2=circleWithCenter(B,3); // lingkaran 2
>{P1,P2}=circleCircleIntersections(c1,c2);
>l=lineThrough(P1,P2);
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotCircle(c1); plotCircle(c2); plotLine(l);
>plotPoint(P1,"P",value=1); plotPoint(P2,"Q",value=1):
```



5
0
-5
-5
0
5
P=(1.6,2.8)
A
B
p
Q=(1.6,-0.78)
c1
c2

1. Persamaan garis yang melalui dua titik

Persamaan garis yang melalui dua titik atau juga dikenal sebagai persamaan titik-dua-titik adalah cara umum untuk menggambarkan garis lurus dalam sistem koordinat. Untuk menentukan persamaan garis yang melalui dua titik tertentu, dua titik tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2)$$

Setelah kita mendapatkan koordinat 2 titik tersebut, kita membuat garis yang melewati 2 titik tersebut, yaitu titik A dan B. Lalu kita cari persamaannya, sedemikian sehingga saat x1 disubtitusi ke persamaan maka menghasilkan nilai y1, juga saat x2 disubtitusi ke persamaan maka didapat nilai y2 didapat dengan perintah EMT yaitu:

lineThrough(A,B);

setelah itu kita mengambar garis tersebut, dan dihitung persamaannya dengan menggunakan perintah:

getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y)

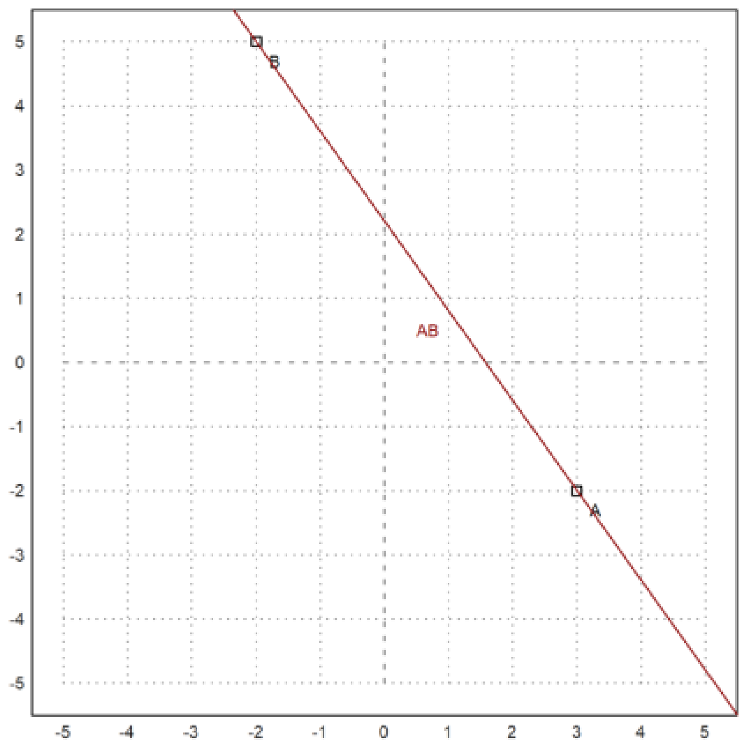
Contoh soal:
Diberikan 2 titik A dan B dengan koordinat sebagai berikut:

$$A(3, -2) \;\; dan \;\; B(-2, 5)$$

Tentukan persamaan dari garis yang melewati titik A dan B!

Penyelesaian :
Menggambar garis pada plot range

```
>setPlotRange(5);
>A=[3,-2];
>B=[-2,5];
>plotPoint(A);
>plotPoint(B);
>color(2);
>plotLine(lineThrough(A,B),"AB"):
```



```
>color(1);
```

Mencari persamaan garis yang melalui titik A dan B

```
>A&=[3,-2];
>B&=[-2,5];
>$getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y)
```

$$-5\,y-7\,x=-11$$

```
>$solve(%,y)
```

$$\left[y=\frac{11-7\,x}{5}\right]$$

Rumus menentukan persamaan garis melalui dua titik

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

Diketahui

$$A(3,-2) \quad dan \quad B(-2,5)$$

$$x_1 = 3,\ x_2 = -2,\ y_1 = -2,\ y_2 = 5$$

Penyelesaian

$$\frac{y-(-2)}{5-(-2)} = \frac{x-3}{-2-3}$$
$$\frac{y+2}{7} = \frac{x-3}{-5}$$
$$y = \frac{(x-3)7}{-5} - 2$$
$$y = \frac{7x-21+10}{-5}$$
$$y = \frac{7x-11}{-5}$$
$$y = \frac{11-7x}{5}$$

2. Persamaan garis sumbu

Garis sumbu adalah garis yang membagi sisi menjadi dua bagian sama panjang dan tegak lurus. Garis sumbu dalam sebuah segitiga adalah garis lurus yang menghubungkan satu titik pada segitiga dengan sisi dihadapannya dan membagi sisi tersebut menjadi dua bagian sama panjang secara tegak lurus.

Contoh soal :

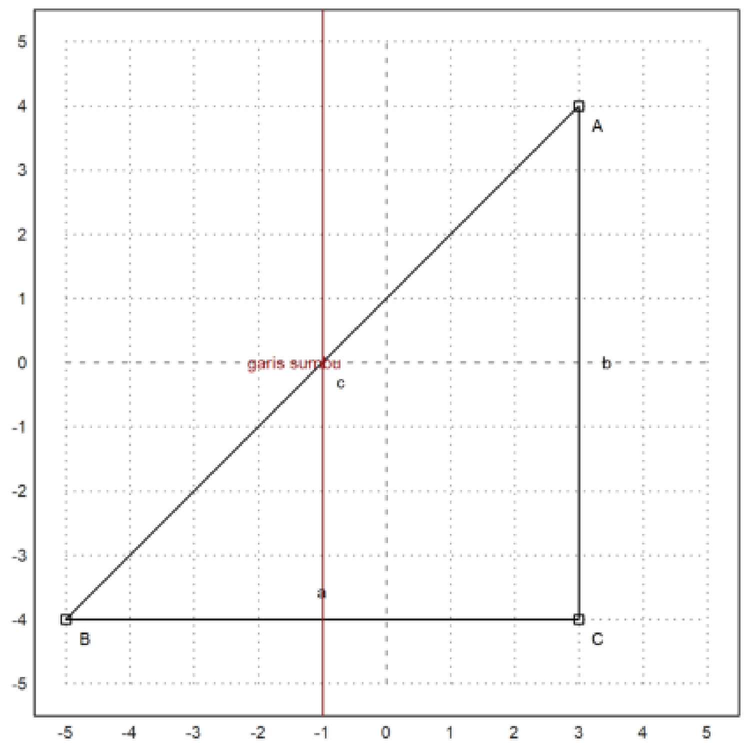
Terdapat

$$\triangle ABC,\ dengan\ A(3,4);\ B(-5,-4);\ dan\ C(3,-4)$$

Tentukan persamaan garis sumbu dari ruas garis BC!

Penyelesaian :
Membuat plot garis sumbu segitiga

```
>setPlotRange(5);
>A=[3,4]; plotPoint(A,"A"); // definisi dan gambar titik
>B=[-5,-4]; plotPoint(B,"B");
>C=[3,-4]; plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,"c");
>plotSegment(B,C,"a");
>plotSegment(A,C,"b");
>color(2);
>p=middlePerpendicular(B,C); plotLine(p,"garis sumbu"):
```



Mencari persamaan garis sumbunya

```
>color(1);
>B&=[-5,-4];
>C&=[3,-4];
>p&=middlePerpendicular(B,C);
>$getLineEquation(p,x,y)
```

$$-8\,x=8$$

```
>$solve(%,x)
```

$$\left[x=-1\right]$$

Garis sumbu segitiga melalui 2 titik yaitu

$$(-1,-4)\ dan\ (-1,0)$$

$$x_1=-1,\ x_2=-1,\ y_1=-4,\ y_2=0$$

$$\frac{y-(-4)}{0-(-4)}=\frac{x-(-1)}{-1-(-1)}$$
$$\frac{y+4}{4}=\frac{x+1}{0}$$

$$4(x+1)=0$$

$$x+1=0$$

$$x=-1$$

3. Persamaan garis bagi sudut

Garis bagi sudut adalah garis yang membagi sudut menjadi dua sudut yang besarnya sama. Nama lain garis bagi dalam bahasa inggris adalah angle bisector yang dapat dijelaskan sebagai garis yang memotong sudut sehingga sudut tersebut terbagi menjadi dua bagian yang sama besar.
Garis bagi segitiga adalah garis yang membagi sudut segitiga menjadi dua sudut sama besar.

Contoh soal:

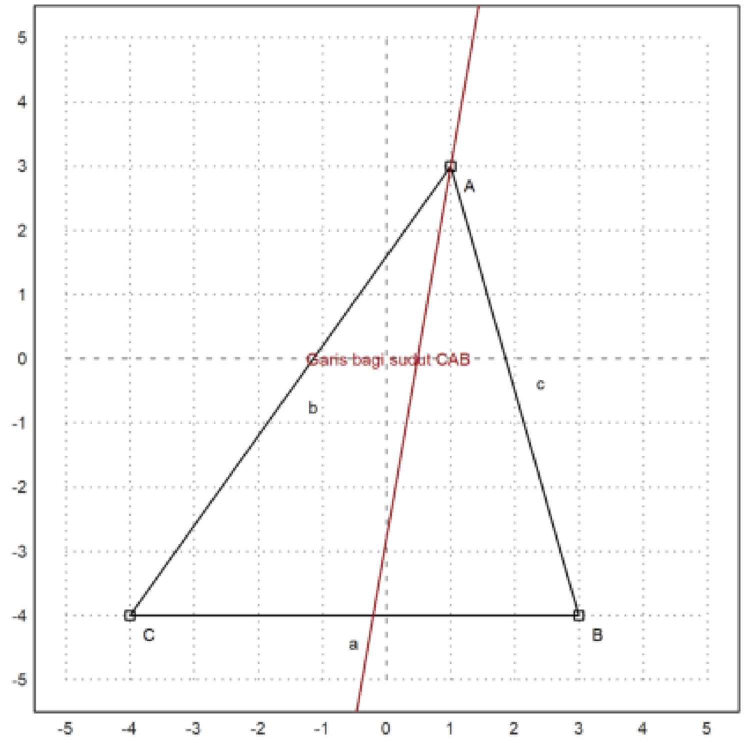
Terdapat

$$\triangle ABC,\ dengan\ A(1,3);\ B(3,-4);\ dan\ C(-4,-4)$$

Tentukan garis bagi dari sudut A dan persamaannya!

Penyelesaian:
Membuat plot garis bagi segitiga

```
>setPlotRange(5);
>A=[1,3]; plotPoint(A,"A");
>B=[3,-4]; plotPoint(B,"B");
>C=[-4,-4]; plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,"c");
>plotSegment(B,C,"a");
>plotSegment(A,C,"b");
>t=angleBisector(C,A,B);
>color(2);
>plotLine(t,"Garis bagi sudut CAB"):
```




```
>color(1);
```

Mencari persamaan garis bagi sudutnya

```
>A&=[1,3];
>B&=[3,-4];
>C&=[-4,-4];
>t&=angleBisector(C,A,B);
>$getLineEquation(t,x,y)
```

$$\left(\frac{7\,\sqrt{74}}{\sqrt{53}}-7\right)\,y+\left(-\frac{2\,\sqrt{74}}{\sqrt{53}}-5\right)\,x=\frac{\left(-\frac{7\,\sqrt{74}}{\sqrt{53}}-1\right)\,\left(\frac{7\,\sqrt{74}}{\sqrt{53}}-7\right)}{2}+\frac{\left(-\frac{2\,\sqrt{74}}{\sqrt{53}}-5\right)\,\left(\frac{2\,\sqrt{74}}{\sqrt{53}}-3\right)}{2}$$

```
>$solve(%,y)
```

$$\left[y=\frac{\left(2\,\sqrt{53}\,\sqrt{74}+265\right)\,x+19\,\sqrt{53}\,\sqrt{74}-1378}{7\,\sqrt{53}\,\sqrt{74}-371}\right]$$

---

4. Persamaan garis berat

Dalam geometri, garis berat segitiga merupakan sebuah ruas garis yang menghubungkan sebuah titik sudut ke titik tengah dari sisi yang berhadapan, sehingga membagi sisi tersebut menjadi dua bagian yang sama panjang. Setiap segitiga memiliki tiga garis berat yang masing-masing berasal dari salah satu sudut segitiga dan menuju titik tengah sisi yang berlawanan. Garis berat ini juga dikenal sebagai garis median karena mereka memotong sisi segitiga pada titik tengahnya.

Dalam konteks segitiga, garis berat memiliki beberapa sifat penting. Salah satunya adalah ketika ketiga garis berat bersimpang-siuran di satu titik tunggal yang disebut pusat gravitasi atau pusat berat segitiga. Titik ini membagi setiap garis berat dalam perbandingan 2:1, yang berarti bahwa jarak dari titik tengah sisi ke sudut yang berlawanan adalah dua kali jarak dari pusat gravitasi ke titik tengah sisi. Garis berat dalam segitiga juga sering digunakan dalam perhitungan geometri dan trigonometri untuk menentukan berbagai sifat dan properti segitiga, seperti panjang sisi, luas, dan lainnya.

Contoh soal:

Terdapat

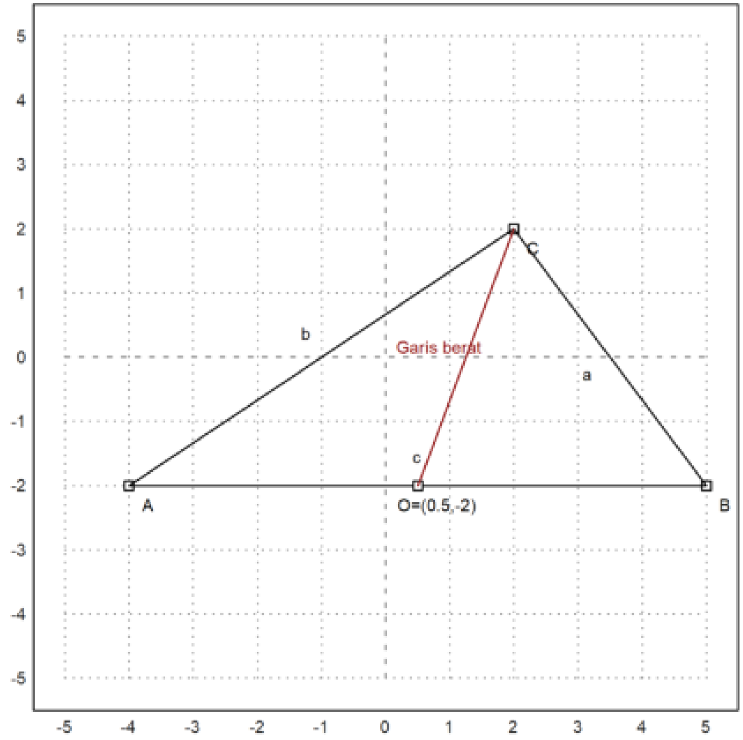
$$\triangle ABC,\ dengan\ A(-4,-2);\ B(5,-2);\ dan\ C(2,2)$$

Tentukan garis berat segitiga dititik C dan persamaannya!

Penyelesaian:
Membuat plot garis berat segitiga

```
>setPlotRange(5);
>A=[-4,-2]; plotPoint(A,"A");
>B=[5,-2]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,"c");
>plotSegment(B,C,"a");
>plotSegment(A,C,"b");
>t=middlePerpendicular(A,B);
>O=lineIntersection(t,lineThrough(A,B)); plotPoint(O,value=1);
```

```
>color(2);
>plotSegment(O,C,"Garis berat"):
```




```
>color(1);
```

Mencari persamaan garis beratnya

```
>A&=[-4,-2];
>B&=[5,-2];
>C&=[2,2];
>t&=middlePerpendicular(A,B);
>O&=lineIntersection(t,lineThrough(A,B));
>p&=lineThrough(O,C);
>$getLineEquation(p,x,y)
```

$$\frac{3\,y}{2}-4\,x=-5$$

```
>$solve(%,y)
```

$$\left[y=\frac{8\,x-10}{3}\right]$$

---

5. Persamaan garis tinggi

Garis tinggi dalam segitiga adalah ruas garis yang ditarik dari sudut segitiga ke sisi yang berlawanan secara tegak lurus. Dengan kata lain, garis tinggi merupakan jarak vertikal dari salah satu sudut segitiga ke sisi yang berlawanan, dan garis ini membentuk sudut siku-siku dengan sisi tersebut.

Contoh soal:

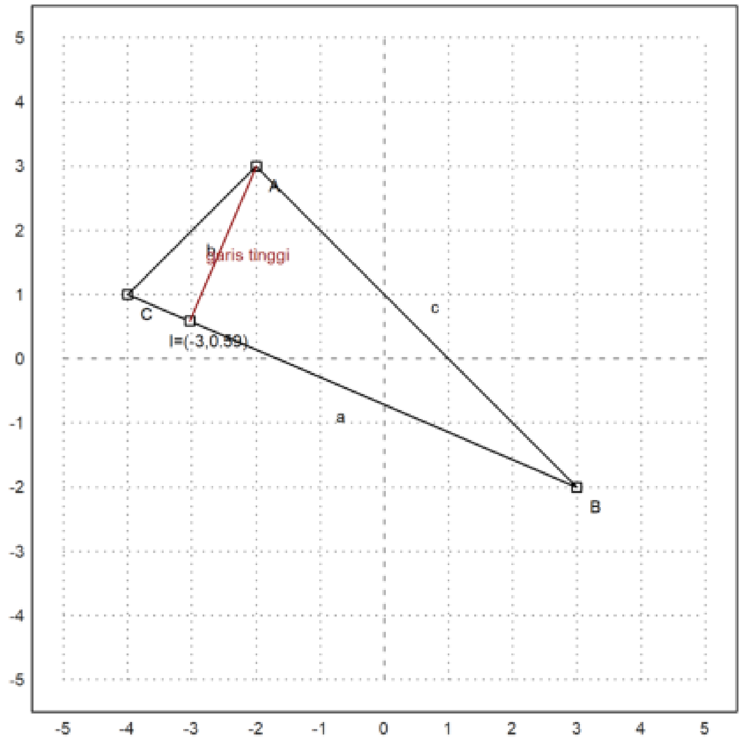
Terdapat

$$\triangle ABC,\ dengan\ A(-2,3);\ B(3,-2);\ dan\ C(-4,-1)$$

Tentukan garis tinggi di titik A dan persamaannya!

Penyelesaian:
Membuat plot garis tinggi segitiga

```
>setPlotRange(5);
>A=[-2,3]; plotPoint(A,"A");
>B=[3,-2]; plotPoint(B,"B");
>C=[-4,1]; plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,"c");
>plotSegment(B,C,"a");
>plotSegment(A,C,"b");
>g=lineThrough(B,C);
>h=perpendicular(A,g);
>I=lineIntersection(g,h); plotPoint(I,value=1);
>color(2);
>plotSegment(A,I,"garis tinggi"):
```




```
>color(1);
```

Mencari persamaan garis tingginya

```
>A&=[-2,3];
>B&=[3,-2];
>C&=[-4,-1];
>g&=lineThrough(B,C);
>h&=perpendicular(A,g);
>$getLineEquation(h,x,y)
```

$$y - 7\,x = 17$$

```
>$solve(%,y)
```

$$[y = 7\,x + 17]$$

Menentukan Titik Pusat dan Jari - Jari Suatu Lingkaran

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

Lingkaran adalah tempat kedudukan titik - titik yang berjarak sama dengan satu titik tertentu. Titik tertentu itu disebut titik pusat lingkaran, sedangkan jarak yang sama adalah jari - jari lingkaran.

Rumus umum lingkaran yaitu:

$$P(a,b) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Rumus umum lingkaran untuk titik pusat (0,0) yaitu:

$$P(a,b) : x^2 + y^2 = r^2$$

Contoh:

Tentukan titik pusat dan jari - jari lingkaran dari persamaan berikut ini:

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

Jawab:
Jari - jarinya yaitu

$$\sqrt{25} = 5$$

Titik Pusatnya yaitu

$$P(a, b) = P(-2, 3)$$

```
>r &= sqrt(25)
```

5

Untuk menentukan titik pusat dan jari - jari suatu lingkaran jika yang diketahui persamaan lingkarannya berupa persamaan baku :

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

maka titik pusatnya yaitu:

$$P\big(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\big)$$

Bukti:
Dari persamaan bentuk baku tersebut, kita dapat menemukan titik pusat dengan cara mengelompokkan peubah yang sama di ruas kiri, sedangkan konstanta di ruas kanan, sebagai berikut:

$$x^2 + Ax + y^2 + By = -C$$

Kemudian melengkapkan kuadrat sempurna persamaan tersebut menjadi:

$$x^2 + Ax + \big(\frac{A}{2}\big)^2 + y^2 + By + \big(\frac{B}{2}\big)^2 = -C + \big(\frac{A}{2}\big)^2 + \big(\frac{B}{2}\big)^2$$

Bentuk tersebut dapat disederhanakan menjadi:

$$\big(x + \frac{A}{2}\big)^2 + \big(y + \frac{B}{2}\big)^2 = -C + \big(\frac{A}{2}\big)^2 + \big(\frac{B}{2}\big)^2$$

Persamaan tersebut sudah menjadi persamaan bentuk umum, dimana untuk menentukan titik pusat dari persamaan bentuk baku yaitu:

$$P\big(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\big)$$

Terbukti.
Dari pembuktian tersebut, dapat dibuktikan juga bahwa cara menentukan jari-jari suatu lingkaran jika yang diketahui persamaan bentuk bakunya adalah:

$$r = \sqrt{\big(\frac{A}{2}\big)^2 + \big(\frac{B}{2}\big)^2 - C}$$

Menentukan persamaan lingkaran yang melalui tiga titik

Untuk menentukan persamaan lingkaran melalui tiga titik dapat menggunakan cara substitusi ketiga titik tersebut ke persamaan bentuk baku

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Setelah didapati tiga persamaan dari substitusi tersebut, kita dapat mengeliminasi masing - masing persamaan dengan persamaan yang lain, kemudian substitusikan nilai A, B, dan C nya kedalam persamaan bentuk baku.
Untuk lebih jelasnya, lihat contoh dibawah ini:

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

Contoh:

Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik A(-2,-2),B(-2,2),C(2,2)

```
>setPlotRange(4) //mendefinisikan batas bidang koordinat
```

```
[-4,  4,  -4,  4]
```

```
>A = [-2,-2]; B = [-2,2]; C = [2,2]; // definisikan titik - titiknya
>&powerdisp:true
```

```
true
```

```
>$p1 := x^2+y^2+a*x+b*y+c=0 with [x=-2,y=-2] //Titik A
```

$$[8 - 2\,a - 2\,b, 8 - 2\,a - 2\,b, 12 - 2\,a - 2\,b] = 0$$

```
>$p2 := x^2+y^2+a*x+b*y+c=0 with [x=-2,y=2] //Titik B
```

$$[8 - 2\,a + 2\,b, 8 - 2\,a + 2\,b, 12 - 2\,a + 2\,b] = 0$$

```
>$p3 := x^2+y^2+a*x+b*y+c=0 with [x=2,y=2] //Titik C
```

$$[8 + 2\,a + 2\,b, 8 + 2\,a + 2\,b, 12 + 2\,a + 2\,b] = 0$$

```
>$p2 - p1
```

$$[4\,b, 4\,b, 4\,b] = 0$$

```
>$p3 - p2
```

$$[4\,a, 4\,a, 4\,a] = 0$$

```
>nilaic &= 8+2*a+2*b+c=0 with [a=0,b=0]
```

```
[8, 8, 12] = 0
```

```
Dari perhitungan di atas didapat bahwa nilai a=0, b=0, c= -8
```

```
>$pb := x^2+y^2+A*x+B*y+C=0 with [A=0,B=0,C=-8]
```

$$\left[-4 - 2\,x + x^2 + 3\,y + y^2, -1 + 3\,x + x^2 - 2\,y + y^2\right] = 0$$

$$x^2 + y^2 - 8 = 0$$

atau

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 8$$

Menentukan Titik Pusat dan Jari-Jari lingkaran luar

dan lingkaran dalam suatu segitiga

1. Lingkaran Luar suatu Segitiga

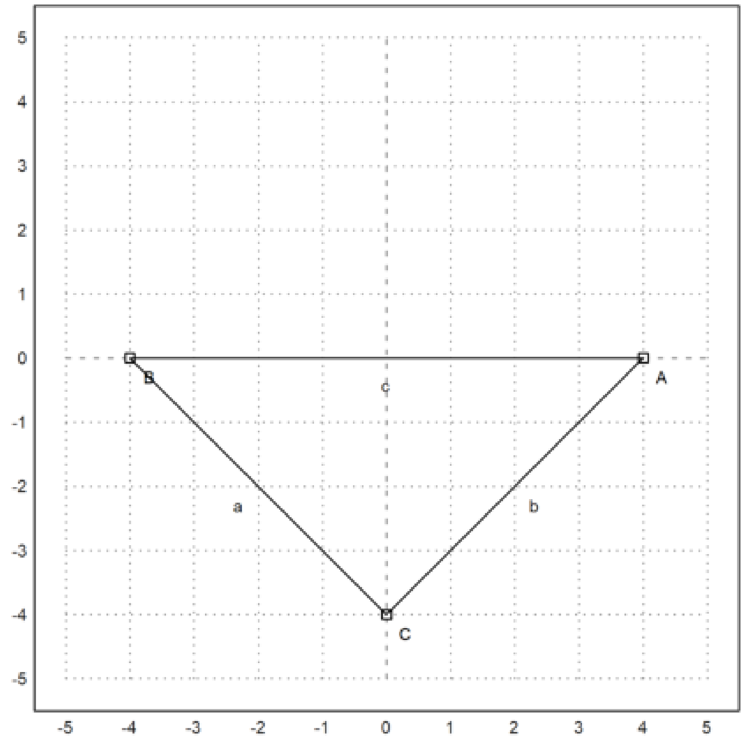
Titik pusat lingkaran luar segitiga, yang juga disebut "pusat lingkaran luar" atau "pusat sirkum," adalah titik tunggal di mana lingkaran luar yang melalui ketiga titik sudut segitiga tersebut bersentuhan. Ini adalah titik pusat lingkaran yang melingkupi seluruh segitiga, dan jaraknya sama dari ketiga sudut segitiga. Pusat lingkaran luar ini memiliki sifat penting dalam geometri segitiga.

Jari-jari lingkaran luar segitiga adalah garis lurus yang ditarik dari pusat lingkaran luar segitiga ke salah satu titik sudut segitiga tersebut. Dengan kata lain, jari-jari ini adalah jarak dari pusat lingkaran ke salah satu sudut segitiga yang sekaligus merupakan panjang garis lurus terpendek dari pusat lingkaran luar ke sisi segitiga yang bersangkutan. Jari-jari lingkaran luar segitiga memiliki peran penting dalam berbagai konsep matematika dan geometri, seperti dalam menghitung keliling segitiga, menggambar lingkaran luar segitiga, dan memahami sifat-sifat segitiga tertentu. Jadi persamaan lingkaran yang melalui (-2,-2), (-2,2),(2,2) adalah:

Contoh:

1.Diketahui suatu segitiga dengan koordinat titik sudutnya A(4,0), B(-4,0), C(0,-4) tentukan titik pusat dan jari-jari lingkaran luarnya!

```
>setPlotRange(5);
>A=[4,0]; plotPoint(A,"A");
>B=[-4,0]; plotPoint(B,"B");
>C=[0,-4]; plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,"c");
>plotSegment(A,C,"b");
>plotSegment(C,B,"a"):
```



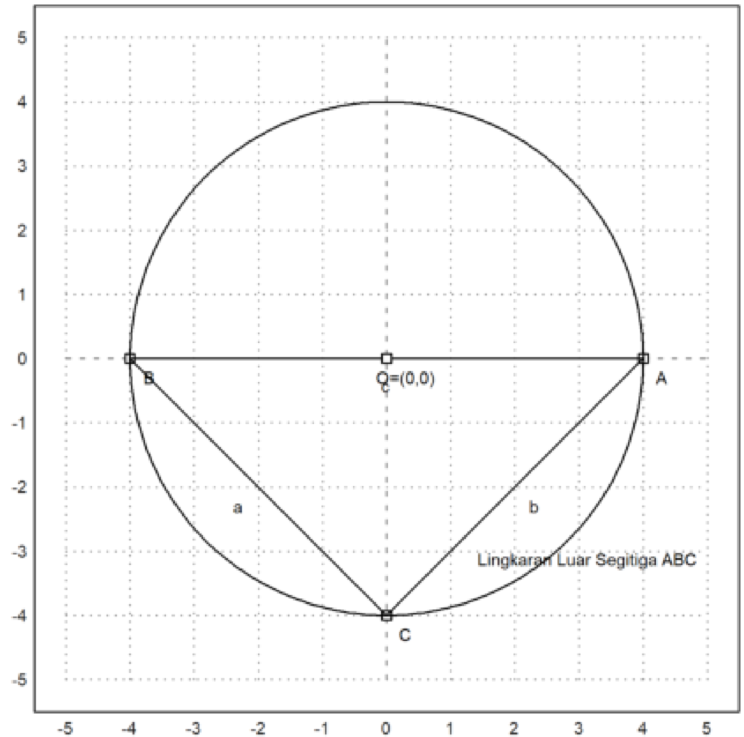
```
>d=circleThrough(A,B,C);
>R=getCircleRadius(d)
```

```
4
```

```
>O=getCircleCenter(d)
```

```
[0,  0]
```

```
>plotPoint(O,value=1);
>plotCircle(d,"Lingkaran Luar Segitiga ABC"):
```




```
>reset;
```

Untuk membuktikan kita dapat menggunakan cara berikut

1. Substitusikan A(4,0), B(-4,0), C(0,-4) ke dalam persamaan baku, sehingga didapat 3 persamaan yaitu:

$$4^2 + 0^2 + a(4) + b(0) + c = 0....p1$$

$$-4^2 + 0^2 + a(-4) + b(0) + c = 0....p2$$

$$0^2 + (-4)^2 + a(0) + b(-4) + c = 0....p4$$

2. Eliminasi persamaan tersebut untuk mencari nilai a,b dan c

$$p1 - p2 : 8a = 0, a = 0$$

$$p1 - p3 : 4a + 4b = 0, b = 0$$

substitusikan nilai a=0 dan b=0 ke dalam p1 sehingga :

$$16 + 4(0) + c = 0$$

$$c = -16$$

3. Substitusikan nilai a, b, c ke dalam persamaan baku

$$x^2 + y^2 + 0x + 0y - 16 = 0$$

sehingga persamaan lingkaran tersebut adalah

$$x^2 + y^2 - 16 = 0$$

atau

$$(x-0)^2+(x-0)^2=16$$

jadi diketahui bahwa lingkaran dalam tersebut berpusat pada

$$P(0,0)$$

dan memiliki jari-jari

$$r=\sqrt{16}=4$$

2. lingkaran dalam suatu segitiga

Titik pusat lingkaran dalam segitiga disebut "pusat lingkaran dalam" atau "insentro." Pusat lingkaran dalam adalah titik di dalam segitiga yang memiliki jarak yang sama dari ketiga sisi segitiga. Itu juga merupakan pertemuan dari tiga sudut-bagi segitiga yang menjadikannya titik pusat lingkaran dalam segitiga. Pusat lingkaran dalam ini memiliki banyak sifat geometri yang penting dalam memahami segitiga, seperti membagi sudut-bagi segitiga menjadi dua bagian yang sama panjang.

Jari-jari lingkaran dalam segitiga adalah garis yang ditarik dari pusat lingkaran ke titik-titik pada sisi segitiga yang bersinggungan dengan lingkaran. Ini biasanya digunakan dalam berbagai konteks geometri untuk menghitung panjang atau hubungan antara jari-jari lingkaran dan sisi segitiga. Salah satu hubungan yang penting adalah bahwa jari-jari lingkaran dalam segitiga selalu tegak lurus terhadap sisi segitiga yang bersentuhan dengannya. Dalam konteks trigonometri, hal ini dapat digunakan untuk menghitung sudut dan panjang sisi dalam segitiga.

Contoh:

Diketahui suatu segitiga dengan koordinat titik sudutnya D(4,0),E(-4,0),F(0,-4) tentukan titik pusat dan jari-jari lingkaran dalamnya!

```
>load geometry
```

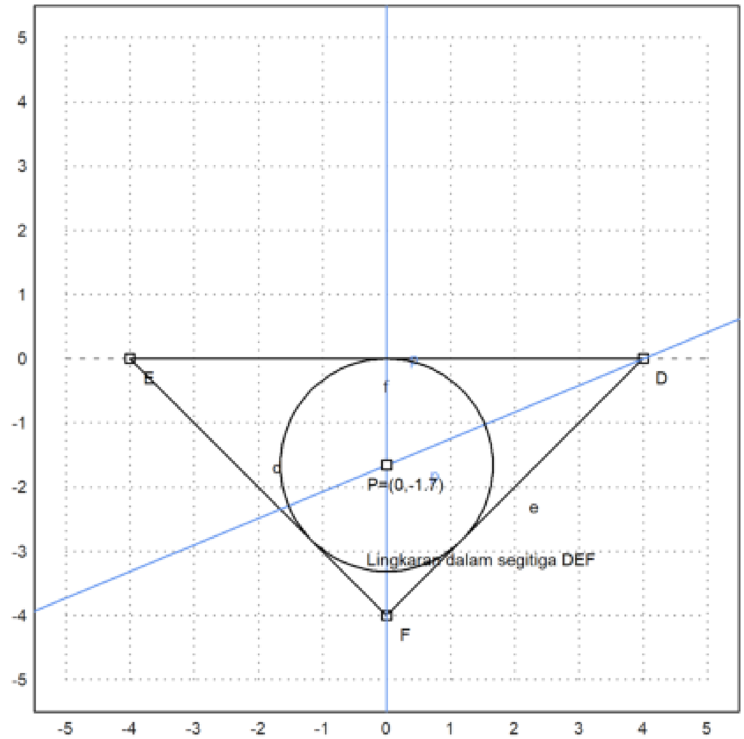
```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
>D=[4,0]; plotPoint(D,"D");
>E=[-4,0]; plotPoint(E,"E");
>F=[0,-4]; plotPoint(F,"F");
>plotSegment(D,E,"f");
>plotSegment(E,F,"d");
>plotSegment(D,F,"e");
>l=angleBisector(D,F,E); // garis bagi <DFE
```

```
>g=angleBisector(F,D,E); // garis bagi <FDE
>P=lineIntersection(l,g); // titik potong kedua garis bagi sudut
>color(12); plotLine(l); plotLine(g); color(1); // gambar kedua garis bagi sudut
>plotPoint(P,value=1);
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(D,E))) // jari-jari lingkaran dalam
```

```
1.65685424949
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga DEF"): // gambar lingkaran dalamg=angleB
```




```
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut
```

```
[0,  -1.65685]
```

```
>reset;
```

Untuk membuktikan kita dapat menggunakan cara berikut

1. Menghitung panjang ruas garis

$$DE = \sqrt{(-4-4)^2 + (0-0)^2} = 8...a$$

$$EF = \sqrt{(-4-0)^2 + (0-(-4))^2} = 4\sqrt{2}...b$$

$$DF = \sqrt{(0-4)^2 + (-4-0)^2} = 4\sqrt{2}...c$$

2. Mencari nilai s

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$s = \frac{8+4\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{2} = 4+4\sqrt{2}$$

3. Mencari Luas segitiga

$$L = \frac{DF.EF}{2}$$

$$L = \frac{4\sqrt{2}.4\sqrt{2}}{2} = 16$$

4. Jari-jari dalam

$$\frac{L}{s} = \frac{16}{4 + 4\sqrt{2}} = 1.65685424949238$$

Menentukan persamaan dan menggambar parabola yang ditentukkan titik fokus dan garis arahnya

Parabola

Parabola adalah tempat kedudukan titik-titik (pada bidang datar) yang memiliki jarak tetap terhadap suatu titik tertentu dan suatu garis tertentu. Selanjutnya, titik tersebut dikenal sebagai titik fokus parabola, sedangkan garis tersebut dikenal sebagai garis arah (direktris).

Akan diilustrasikan gambar dari kurva parabola. Misalkan titik fokus F(p,0), titik puncak O(0,0), garis arah (direktris) yaitu garis g dan kita pilih R (-p,y) pada garis g, kita pilih sembarang titik P(x,y) yang ada pada parabola. Berikut ilustrasi gambar dari kurva parabolanya

Jika P(x,y) adalah sembarang titik pada parabola, maka dari definisi kurva parabola diperoleh hubungan

$$|PF| = |PR|$$

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-(-p))^2 + (y-y)^2}$$

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = \sqrt{(x+p+(0)^2}$$

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = \sqrt{(x+p)^2}$$

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$y^2 = 2px + 2px$$

$$y^2 = 4px$$

Persamaan parabola yˆ2 = 4px dengan titik puncak O (0,0) dengan titik fokus F(p,0) akan mepresentasikan parabola terbuka ke kanan (arah sumbu x positif).

Contoh Soal:

1. Tentukanlan persamaan dari parabola yang melalui 3 titik A (3,2), B (2,1), C(2,2) dan gambarkan parabolanya.

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>A &=[3,2]; B &=[2,1]; C &=[2,2];
>r&=(lineThrough(A,B)); $r
```

$$[1, -1, 1]$$

```
>$getLineEquation(r,x,y); $solve(%,y)
```

$$[y = x - 1]$$

```
>p &=getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

$$\frac{y - x + 1}{\sqrt{2}} - \sqrt{(2 - y)^2 + (2 - x)^2} = 0$$

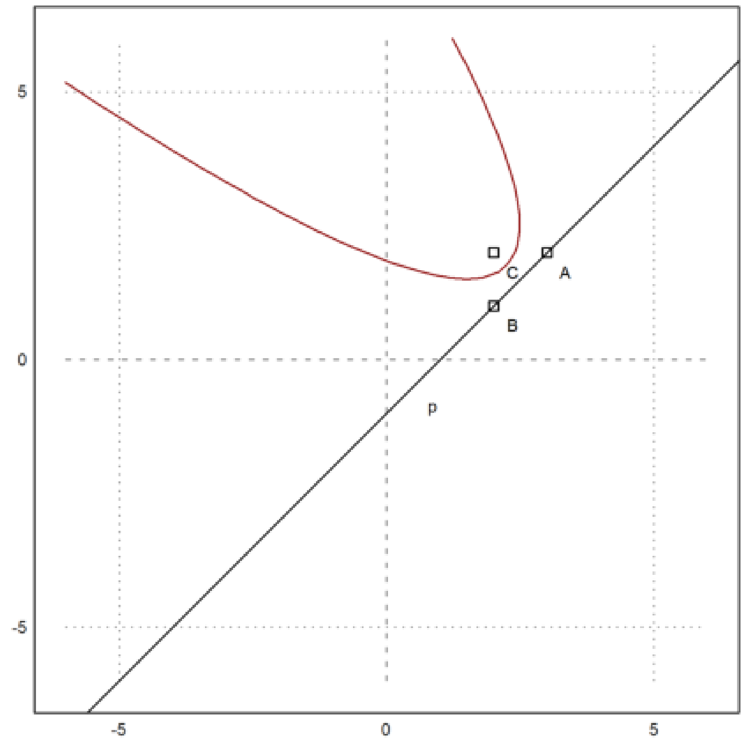
```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y)
```

```
[y = - x - sqrt(2) sqrt(5 - 2 x) + 5,
                             y = - x + sqrt(2) sqrt(5 - 2 x) + 5]
```

Solusinya adalah:

$$y = -x + \sqrt{(2)}\sqrt{(5 - 2x)} + 5$$

```
>A=[3,2]; B=[2,1]; C=[2,2];
>setPlotRange (6); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
>plotLine(lineThrough(A,B));
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=2):
```



```
>reset;
```

Menentukan persamaan dan menggambar ellips yang diketahui

kedua titik fokusnya

1. Menentukan persamaan ellips yang diketahui kedua titik fokusnya

Ellips adalah tempat kedudukan titik-titik pada bidang yang memenuhi jumlahan jaraknya ke dua titik tertentu tetap. Pertama kita akan mencari persamaan ellips.

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

Untuk mencari persamaan ellips, hitung luas segitiga dengan panjang sisi a, b, dan c, pertama meletakkan titik-titik pada (0,0), (a,0), dan (x,y).

$$x^2 + y^2 = b^2, \quad (x-a)^2 + y^2 = c$$

untuk x dan y

Pertama, menyelesaikan persamaan di atas terlebih dahulu

```
>Hasil &= solve([x^2+y^2=b^2,(x-a)^2+y^2=c^2],[x,y])
```

```
                    2    2    2
                 - c  + b  + a
           [[x = --------------, y = 
                      2 a
          4      2  2      2  2    4      2  2    4
  sqrt(- c  + 2 b  c  + 2 a  c  - b  + 2 a  b  - a )
- --------------------------------------------------],
                            2 a
          2    2    2
       - c  + b  + a
  [x = --------------, y = 
            2 a
        4      2  2      2  2    4      2  2    4
sqrt(- c  + 2 b  c  + 2 a  c  - b  + 2 a  b  - a )
--------------------------------------------------]]
                          2 a
```

Lalu menjabarkan hasil y

```
>Hasily &= y with Hasil[2][2]
```

```
          4       2  2       2  2     4       2  2     4
sqrt(- c  + 2 b  c  + 2 a  c  - b  + 2 a  b  - a )
--------------------------------------------------
                       2 a
```

Kita mendapatkan Rumus Heron

```
>function F(a,b,c) &= sqrt(factor((Hasily*a/2)^2))
```

```
sqrt((- c + b + a) (c - b + a) (c + b - a) (c + b + a))
-------------------------------------------------------
                          4
```

```
>$solve(diff(F(a,b,c)^2,c)=0,c)
```

$$\left[c=-\sqrt{b^2+a^2} , c=\sqrt{b^2+a^2} , c=0\right]$$

Sekarang mari kita cari himpunan semua titik di mana b+c=d untuk suatu konstanta d. Ini sama saja sebuah ellips

```
>p1 &= subst(d-c,b,Hasil[2])
```

```
                      2    2    2
               (d - c)  - c  + a
          [x = ------------------, y = 
                      2 a
                 4      2        2      2        2    4      2  2    4
   sqrt(- (d - c)  + 2 c  (d - c)  + 2 a  (d - c)  - c  + 2 a  c  - a )
   --------------------------------------------------------------------]
                                    2 a
```

Sekarang kita buat fungsi ini

```
>function fx(a,c,d) &= rhs(p1[1])
```

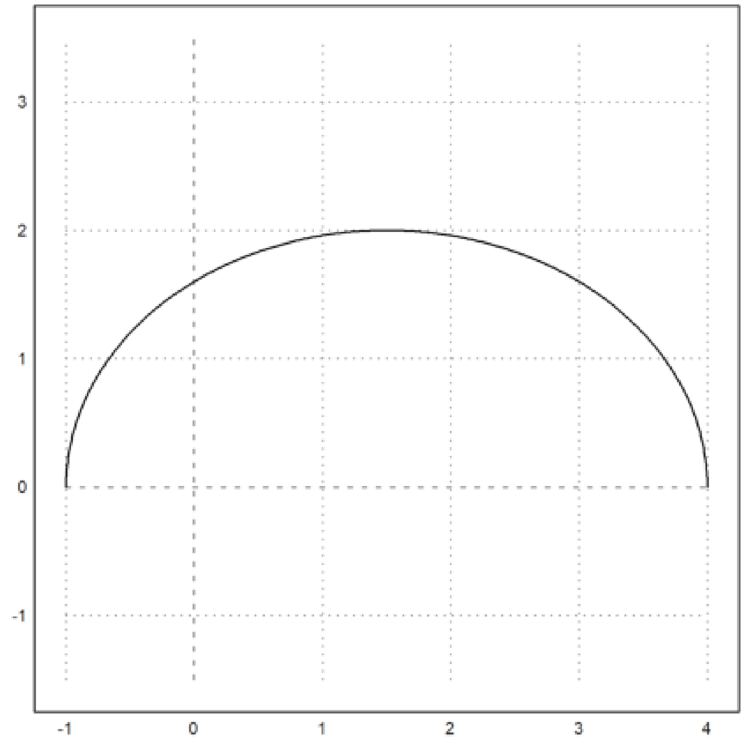
```
                                2    2    2
                         (d - c)  - c  + a
                         ------------------
                                2 a
```

```
>function fy(a,c,d) &= rhs(p1[2])
```

```
                 4        2          2        2          2     4       2  2     4
sqrt(- (d - c)  + 2 c  (d - c)  + 2 a  (d - c)  - c  + 2 a  c  - a )
--------------------------------------------------------------------
                                2 a
```

Sekarang kita dapat menggambar himpunan tersebut. Di sini kita akan mendapatkan sebuah ellips

```
>plot2d(&fx(3,x,5),&fy(3,x,5),xmin=1,xmax=4,square=1):
```




```
>$((fx(a,c,d)-a/2)^2/a^2+fy(a,c,d)^2/b^2 with [a=d/2,b=sqrt(d^2-a^2)/2])
```

$$\frac{4\left(\frac{(d-c)^2+\frac{d^2}{4}-c^2}{d}-\frac{d}{4}\right)^2}{d^2}+\frac{4\left(-(d-c)^4+\frac{d^2\,(d-c)^2}{2}+2\,c^2\,(d-c)^2-\frac{d^4}{16}+\frac{c^2\,d^2}{2}-c^4\right)}{d^2\,(d^2-a^2)}$$

```
>$ratsimp(%)
```

$$\frac{7\,d^4-16\,c\,d^3+\left(16\,c^2-16\,a^2\right)\,d^2+64\,a^2\,c\,d-64\,a^2\,c^2}{4\,d^4-4\,a^2\,d^2}$$

Sekarang kita bisa membuat persamaan umum untuk ellips ini, yaitu

$$\frac{(x-x_p)^2}{a^2}+\frac{(y-y_p)}{b^2}=1,$$

Di mana (xp, yp) adalah titik pusat, dan a dan b adalah setengah dari sumbu-sumbunya.

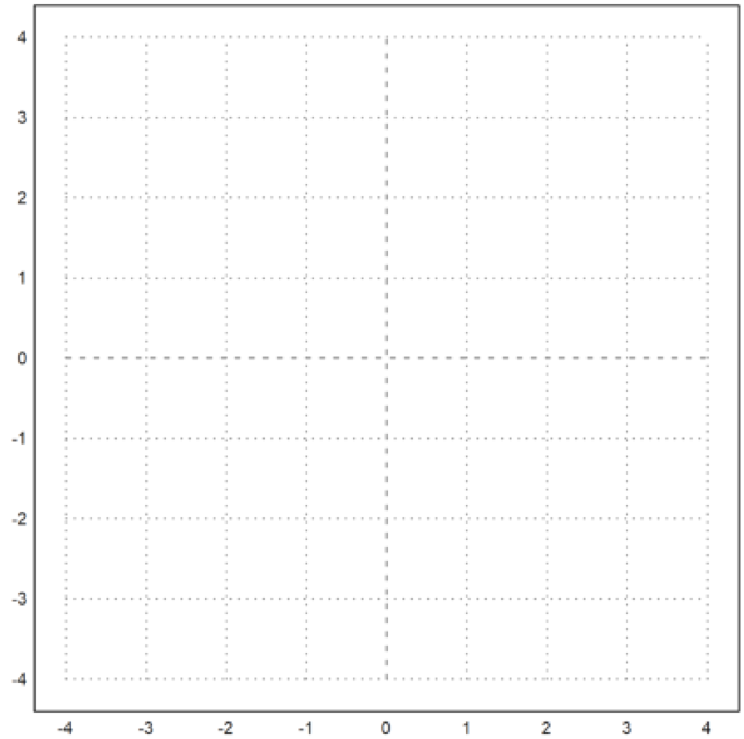
```
>reset();
```

Mencari persamaan ellips dengan cara manual.

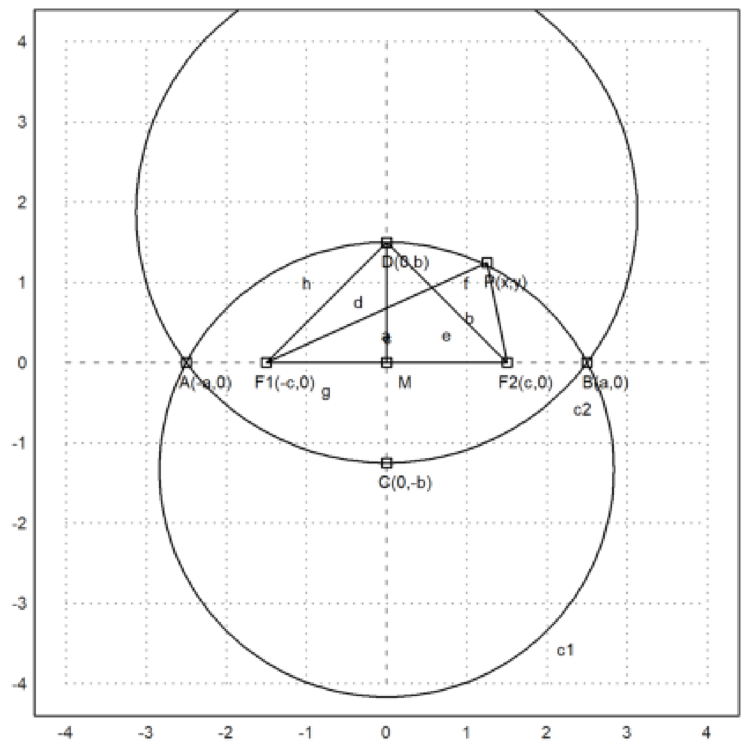
Akan dicari persamaan ellips dengan menggunakan definisi.

Pertama kita gambarkan ellips terlebih dahulu.

```
>setPlotRange(-4,4,-4,4): // mendefinisikan bidang koordinat
```



```
>A=[-1.5,0]; plotPoint(A,"F1(-c,0)"); // definisi dan gambar titik
>B=[1.5,0]; plotPoint(B,"F2(c,0)");
>C=[1.25,1.25]; plotPoint(C,"P(x,y)");
>plotSegment(A,B,"a"); // a=AB
>plotSegment(B,C,"b"); // b=BC
>plotSegment(C,A,"c"); // c=CA
>D=[0,0]; plotPoint(D,"M"); // definisi dan gambar titik
>E=[0,1.5]; plotPoint(E,"D(0,b)");
>plotSegment(D,E,"d"); // d=DE
>plotSegment(D,B,"e"); // e=DB
>plotSegment(E,B,"f"); // f=EB
>plotSegment(D,A,"g"); // g=DA
>plotSegment(A,E,"h"); // h=AE
>F=[-2.5,0]; plotPoint(F,"A(-a,0)"); // definisi dan gambar titik
>G=[2.5,0]; plotPoint(G,"B(a,0)");
>H=[0,-1.25]; plotPoint(H,"C(0,-b)");
>c1=circleThrough(E,F,G); // lingkaran titik EFG
>c2=circleThrough(F,G,H); // lingkaran titik FGH
>plotCircle(c1); plotCircle(c2): // plot lingkaran c1 dan c2
```



Misal kedua titik tetap tersebut F1(-c,0) dan F2(c,0) dan jumlah jarak yang tetap tersebut 2a. Maka untuk sembarang titik P(x,y) pada tepat kedudukan memenuhi:

$$|F_1P| + |F_2P| = 2a$$

$$\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2=(\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2$$

$$4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+((x-c)^2+y^2)=(x+c)^2+y^2$$

$$4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2=x^2+2cx+c^2+y^2$$

$$4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}-2cx=2cx$$

$$4a^2-4cx=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

$$(a\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2=(a^2-cx)^2$$

$$a^2((x-c)^2+y^2)=a^4-2ca^2x+c^2x^2$$

$$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)=a^4-2ca^2x+c^2x^2$$

$$a^2x^2-2ca^2x+c^2a^2+a^2y^2=a^4-2ca^2x+c^2x^2$$

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4+c^2x^2$$

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-c^2a^2$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

Dengan memisalkan

$$b^2 = a^2 - c^2$$

Diperoleh:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$
$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

---

2. Menggambar ellips yang diketahui kedua titik fokusnya

Untuk menggambar ellips dengan mudah, langkah pertama yaitu dengan menggunakan ”load(draw)”

```
>$load(draw):
```

"Draw" adalah sistem antarmuka dari Maxima-Gnuplot.

Ada tiga fungsi utama yang digunakan pada tingkat Maxima, yaitu: "draw2d", "draw3d", dan "draw".

Perintah "ellipse (<xp>, <yp>, <a>, <b>, <ang1>, <ang2>)" menggambar sebuah elips yang berpusat di "[<xp>, <yp>]" dengan sumbu semi horizontal dan vertikal sebesar <a> dan <b>, berturut-turut, dimulai dari sudut <ang1> sejauh sudut <ang2>.

Contoh Soal:

Sebuah elips memiliki fokus di (-1, 0) dan (7, 0) serta melalui titik (0, 12/5). Tentukan persamaan elips tersebut dan gambarkan.

Penyelesaian

Titik Fokus
F_1 = (-c, 0) = (-1, 0)
F_2 = (c, 0) = (7, 0)

Melalui titik (0, 12/5)

Langkah-langkah:
1. Menentukan jarak d1 dan d2

$$d_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$d_1 = \sqrt{(0+(-1))^2 + (\frac{12}{5} - 0)^2}$$

$$d_1 = \sqrt{1 + \frac{144}{25}}$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{169}{25}}$$

$$d_1 = \frac{13}{5}$$

$$d_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$d_2 = \sqrt{(0-7)^2 + (\frac{12}{5} - 0)^2}$$

$$d_2 = \sqrt{49 + \frac{144}{25}}$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{1369}{25}}$$

$$d_2 = \frac{37}{5}$$

2. Menentukan nilai a,b, dan c

$$2a = d_1 + d_2$$

$$2a = \frac{13}{5} + \frac{37}{5}$$

$$2a = \frac{50}{5}$$

$$a = 5$$

$$c = \frac{d(F_1, F_2)}{2}$$

$$c = \frac{7-(-1)}{2}$$

$$c = 4$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^2 = 5^2 - 4^2$$

$$b^2 = 9$$

$$b = 3$$

3. Menentukan titik pusat ellips xp dan yp

$$x_p = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_p = \frac{-1 + 7}{2}$$

$$x_p = 3$$

$$y_p = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$y_p = \frac{0 + 0}{2}$$

$$y_p = 0$$

4. Menentukan persamaan ellips

$$\frac{(x-x_p)^2}{a^2}+\frac{(y-y_p)^2}{b^2}=1$$
$$\frac{(x-3)^2}{5^2}+\frac{(y-0)^2}{3^2}=1$$
$$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

```
>$load(draw):
```

$$d_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

```
>d1 &= sqrt((0+(-1))^2+(12/5)^2) // d1 = jarak F1 ke titik (0,12/5)
```

```
13
--
5
```

$$d_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

```
>d2 &= sqrt((0-7)^2+(12/5)^2) // d2 = jarak F2 ke titik (0,12/5)
```

```
37
--
5
```

Diketahui

$$d_1 + d_2 = 2a$$

sesuai definisi elips sehingga diperoleh

```
>a &= (d1+d2)/2 // menentukan nilai a
```

```
5
```

```
>xp &= (-1+7)/2 // titik pusat ellips xp
```

```
3
```

```
>yp &= (0-0)/2 // titik pusat ellips yp
```

```
0
```

Titik pusat ellips (xp, yp) = (3, 0)

```
>c &= (7-(-1))/2 // jarak fokus ke pusat
```

```
4
```

```
>b &= sqrt(a^2-c^2) // menentukan nilai b
```

```
3
```

```
>$(x-xp)^2/a^2+(y-yp)^2/b^2=1 // persamaan ellips
```

$$\frac{y^2}{9}+\frac{(x-3)^2}{25}=1$$

```
>$draw2d(ellipse(3, 0, 5, 4, 360, -360)): // menggambar ellips
>reset();
```

Sebuah elips memiliki fokus di (-10, 0) dan (10, 0) serta panjang sumbu mayor 24. Tentukan persamaan elips tersebut dan gambarkan.

Penyelesaian

Titik Fokus
F1 = (-c, 0) = (-10, 0)
F2 = (c, 0) = (10, 0)

Panjang sumbu mayor = 24

Langkah-langkah:
1. Menentukan nilai a,b, dan c

$$2a = panjangsumbumayor$$

$$2a = 24$$

$$a = 12$$

$$c = \frac{d(F_1, F_2)}{2}$$
$$c = \frac{10 - (-10)}{2}$$
$$c = 10$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^2 = 12^2 - 10^2$$

$$b^2 = 44$$

$$b = 2\sqrt{11}$$

2. Menentukan titik pusat ellips xp dan yp

$$x_p = \frac{x_1 + x_2}{2}$$
$$x_p = \frac{-10 + 10}{2}$$
$$x_p = 0$$

$$y_p = \frac{y_1 + y_2}{2}$$
$$y_p = \frac{0 + 0}{2}$$
$$y_p = 0$$

3. Menentukan persamaan ellips

$$\frac{(x-x_p)^2}{a^2} + \frac{(y-y_p)}{b^2} = 1$$
$$\frac{(x-0)^2}{12^2} + \frac{(y-0)^2}{(2\sqrt{11})^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{44} = 1$$

```
>$load(draw):
>a &= 24/2 // panjang sumbu mayor = 2a
```

12

```
>c &= (10-(-10))/2 // jarak fokus ke pusat
```

10

Sehingga

```
>b &= sqrt(a^2-c^2)
```

```
2 sqrt(11)
```

```
>xp &= (-10+10)/2 // titik pusat ellips xp
```

```
0
```

```
>yp &= (0+0)/2 // titik pusat ellips yp
```

```
0
```

```
>$(x-xp)^2/a^2+(y-yp)^2/b^2=1 // persamaan ellips
```

$$\frac{y^2}{44}+\frac{x^2}{144}=1$$

```
>$draw2d(ellipse(0, 0, 12, (2*(sqrt(11)))/2, 360, -360)): // menggambar ellips
>reset;
```

Melakukan Perhitungan Geometris

1. Jarak dua titik (panjang ruas garis)

Jarak antara dua titik adalah panjang ruas garis yang menghubungkan kedua titik tersebut.
Jika diketahui dua titik pada koordinat kartesius, misal A(x1,y1) dan B(x2,y2), maka jarak antara titik A dan B adalah

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Contoh Soal:

Diketahui dua buah titik P(4,6) dan Q(1,2). Tentukanlah panjang garis PQ.

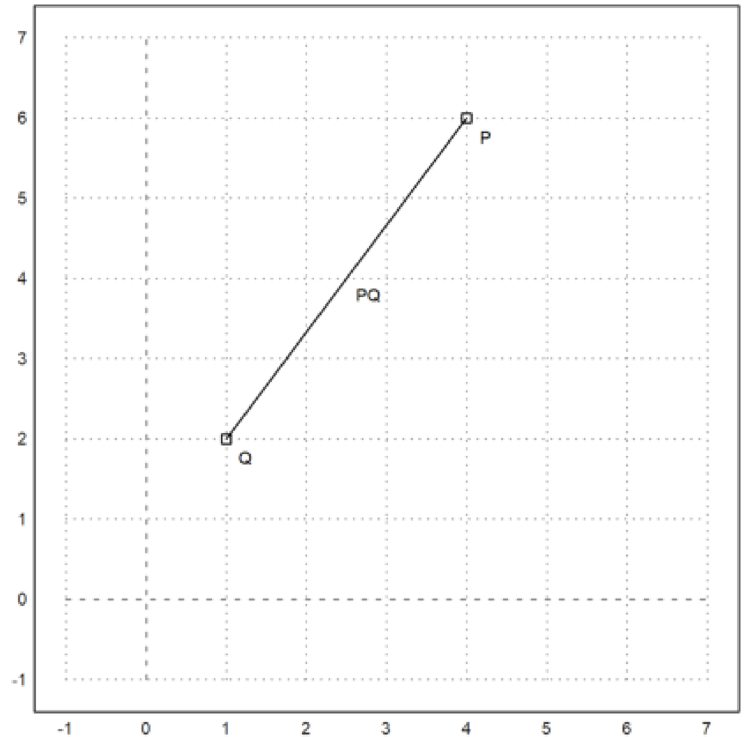
```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(-1,7,-1,7);
>P=[4,6]; plotPoint(P,"P");
>Q=[1,2]; plotPoint(Q,"Q");
>distance(P, Q)
```

```
5
```

```
>plotSegment(P,Q):
```



Menghitung jarak antara titik P(4,6) dan Q(1,2)

Diketahui titik $P(4, 6)$ dan $Q(1, 2)$.

Rumus jarak antara dua titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ adalah:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Substitusi nilai titik P dan Q :

$$d = \sqrt{(1 - 4)^2 + (2 - 6)^2}$$

$$d = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$

$$d = \sqrt{9 + 16}$$

$$d = \sqrt{25} = 5$$

Jadi, jarak antara titik $P(4, 6)$ dan $Q(1, 2)$ adalah:

$$d = 5$$

Luas dan Keliling Segitiga

```
Luas adalah sebuah ukuran yang digunakan untuk mengukur seberapa
```

besar atau seberapa banyak ruang atau wilayah yang ditempati oleh suatu objek atau bentuk dalam ruang dua atau tiga dimensi dan kali ini akan berfokus pada ruang dua dimensi terlebih dahulu.

Segitiga memiliki beberapa jenis, ada segitiga siku-siku, segitiga sama sisi, segitiga sama kaki, dan segitiga sembarang.
Untuk menghitung luas dari segitiga siku-siku, segitiga sama sisi dan segitiga sama kaki menggunakan rumus :

$$L_{\triangle} = \frac{1}{2} alas.tinggi$$

Sedangkan untuk mencari luas dari segitiga sembarang dapat menggunakan rumus :

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{dengan } s = \frac{(a+b+c)}{2}$$

Contoh Soal:

Diketahui sebuah segitiga sembarang ABC dengan titik A(4,6), B(1,2), dan C(5,2). Hitunglah luas dan keliling dari segitiga ABC tersebut.

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(-1,7,-1,7);
>A=[4,6]; plotPoint(A,"A");
>B=[1,2]; plotPoint(B,"B");
>C=[5,2]; plotPoint(C,"C");
```

kemudian menentukan tiga segmen garis.

```
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
```

menentukan masing-masing panjang dari a, b, dan c.

```
>distance (B, C)
```

```
4
```

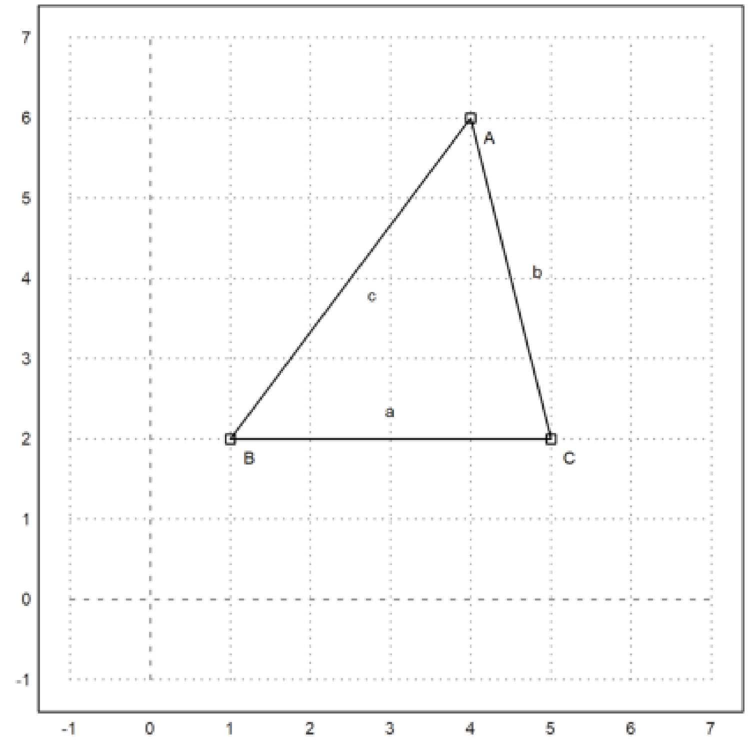
```
>distance (A, C)
```

```
4.12310562562
```

```
>distance (A, B)
```

5

```
>areaTriangle(A,B,C):
```




```
>areaTriangle(A,B,C)
```

8

Menghitung luas segitiga ABC

Diketahui titik-titik: A(4,6), B(1,2), C(5,2)

Langkah 1: Hitung panjang setiap sisi.

$$a = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{4^2 + 0} = \sqrt{16} = 4$$

$$b = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} = \sqrt{(5-4)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$c = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1-4)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Langkah 2: Hitung setengah keliling s.

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{4+\sqrt{17}+5}{2} = \frac{9+\sqrt{17}}{2}$$

Langkah 3: Hitung luas segitiga

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$L = \sqrt{\frac{9+\sqrt{17}}{2}\left(\frac{9+\sqrt{17}}{2} - 4\right)\left(\frac{9+\sqrt{17}}{2} - \sqrt{17}\right)\left(\frac{9+\sqrt{17}}{2} - 5\right)}$$

Hasil akhir:

$$L \approx 8$$

Keliling segitiga ABC

```
>K := 4+4.12310562562+5
```

```
13.1231056256
```

Menghitung keliling segitiga ABC

Diketahui panjang sisi-sisi segitiga sebagai berikut:

$$a = 4, \quad b = \sqrt{17}, \quad c = 5$$

Rumus keliling segitiga (K segitiga ABC) adalah:

$$K = a + b + c$$

Substitusi nilai-nilai tersebut:

$$K = 4 + \sqrt{17} + 5$$

$$K \approx 4 + 4.123 + 5 = 13.123$$

Jadi, keliling segitiga ABC adalah:

$$K \approx 13.123$$

Diketahui segitiga siku-siku ABC dengan titik A(1,1), B(1,4), dan C(5,1). Hitunglah luas dan keliling dari segitiga tersebut.

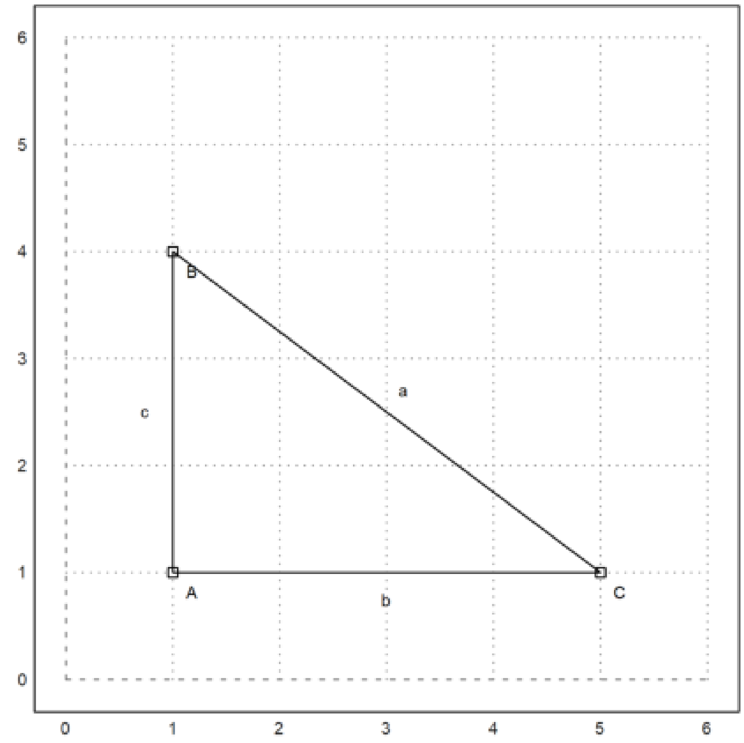
```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(0,6,0,6) // mendefinisikan bidang koordinat
```

```
[0,  6,  0,  6]
```

```
>A=[1,1]; plotPoint (A,"A");
>B=[1,4]; plotPoint (B,"B");
>C=[5,1]; plotPoint (C,"C");
>plotSegment (A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment (B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment (C,A,"b"): // b=CD
```




```
>distance (A, C)
```

4

```
>distance (A, B)
```

3

```
>distance (C, B)
```

5

```
>Luas:=(distance (A, C)*distance (A, B))/2
```

6

```
>areaTriangle (A,B,C)
```

6

Menghitung luas segitiga ABC

Diketahui titik-titik: A(1,1), B(1,4), C(5,1)

Karena segitiga ABC merupakan segitiga siku-siku, kita dapat menghitung luasnya menggunakan rumus:

$$L = \frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi}$$

Tentukan panjang alas dan tinggi:

$$\text{Alas} = AC = |x_3 - x_1| = |5 - 1| = 4$$

$$\text{Tinggi} = AB = |y_2 - y_1| = |4 - 1| = 3$$

Hitung luas segitiga ABC:

$$L = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = \frac{1}{2} \times 12 = 6$$

$$\text{Jadi, luas segitiga } ABC \text{ adalah:}$$

$$L = 6$$

Keliling segitiga ABC

```
>K := 4+3+5
```

```
12
```

Menghitung kelilingn segitiga ABC (K ABC)

Diketahui titik-titik:
(1,1), B(1,4), C(5,1)

Langkah 1: Hitung panjang setiap sisi.

$$AB = |y_2 - y_1| = |4 - 1| = 3$$

$$AC = |x_3 - x_1| = |5 - 1| = 4$$

$$BC = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Langkah 2: Hitung keliling segitiga (K).

$$K = AB + AC + BC$$

Substitusi nilai-nilai tersebut:

$$K = 3 + 4 + 5 = 12$$

Jadi, keliling segitiga ABC adalah:

$$K = 12$$

Luas lingkaran adalah luasan daerah pada lingkaran tersebut.
Luas pada sebuah lingkaran memiliki rumus :

$$L = \pi.r^2$$

sedangkan untuk keliling lingkaran memiliki rumus :

$$K = 2.\pi.r$$

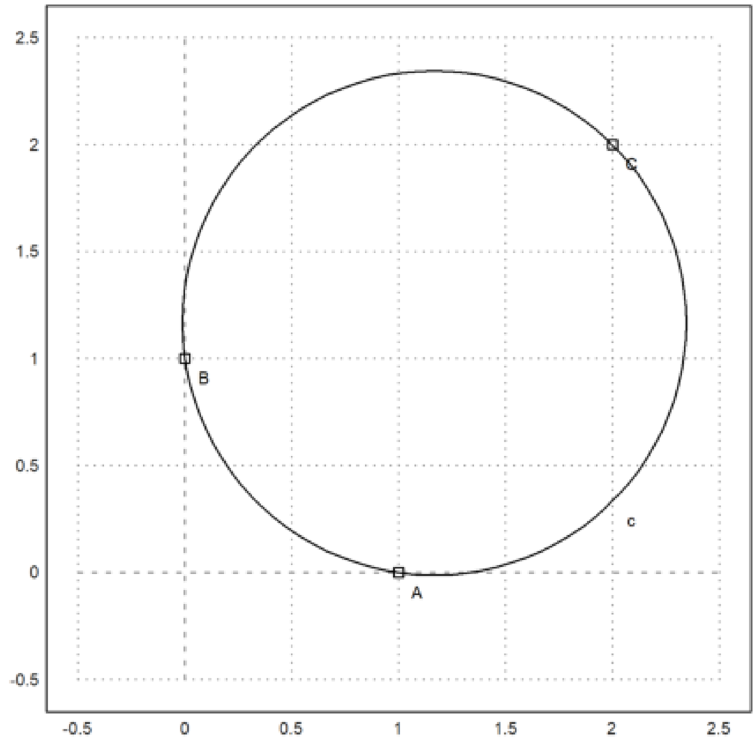
Contoh Soal:

Diketahui sebuah lingkaran yang melalui titik A(1,0), B(0,1), dan C(2,2). Hitunglah luas dan keliling lingkaran tersebut.

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5);
>A=[1,0]; plotPoint(A,"A");
>B=[0,1]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C");
>c=circleThrough(A,B,C);
>plotCircle(c):
```




```
>r=getCircleRadius(c)
```

1.17851130198

```
>LuasLingkaran:=pi*r^2
```

```
4.36332312999
```

Menghitung luas lingkaran

Diketahui titik-titik:
(1,0), B(0,1), C(2,2)

Langkah 1: Hitung panjang setiap sisi.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2} \approx 1.41$$

$$AC = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5} \approx 2.24$$

$$BC = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = \sqrt{5} \approx 2.24$$

Langkah 2: Hitung luas segitiga ABC menggunakan rumus determinan.

$$L = \frac{1}{2} \left| x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \right|$$

$$L = \frac{1}{2} \times 3 = 1.5$$

Langkah 3: Hitung jari-jari lingkaran yang mengelilingi segitiga ABC.

$$R = \frac{abc}{4K} \approx \frac{1.41 \times 2.24 \times 2.24}{4 \times 1.5} \approx 1.18$$

Langkah 4: Hitung luas lingkaran yang mengelilingi segitiga ABC.

$$\text{Luas} = \pi R^2 \approx \pi \times (1.18)^2 \approx 4.36$$

```
>KelilingLingkaran:=2*pi*r
```

```
7.40480489693
```

Menghitung keliling lingkaran

$$\text{Diketahui jari-jari lingkaran } R \approx 1.18$$

Keliling lingkaran yang mengelilingi segitiga ABC adalah:

$$\text{Keliling} = 2\pi R \approx 2\pi \times 1.18 \approx 7.4$$

Perhitungan sudut pada segitiga

Sudut diukur dalam derajat (°) atau radian (rad) tergantung pada preferensi dan konteks pengukuran yang digunakan. Dan dalam kesempatan kali ini kita akan menggunakan sudut derajat (°). Contoh:

$$S = ((n-2).180) - (k)$$

dimana S adalah sudut yang akan ditentukan dalam derajat (°)

```
n adalah jumlah sudut yang ada pada bangun datar tersebut
dan k adalah jumlah sudut segitiga yang diketahui
```

contoh:
Andi ingin membuat segitiga menggunakan kawat dan dia ingin membuat segitiga siku-siku dan dia telah menentukan bahwa salah satu sudut selain siku-sikunya adalah 30° maka berapakah sudut yang belum diketahuinya?

```
>n:= 3;
>k:= 90+30;
>S:= ((n-2)*180)-k
```

```
60
```

```
>reset;
```

1. Gambarlah segi-n beraturan jika diketahui titik pusat O, n, dan jarak titik pusat ke titik-titik sudut segi-n tersebut (jari-jari lingkaran luar segi-n), r.

Petunjuk:

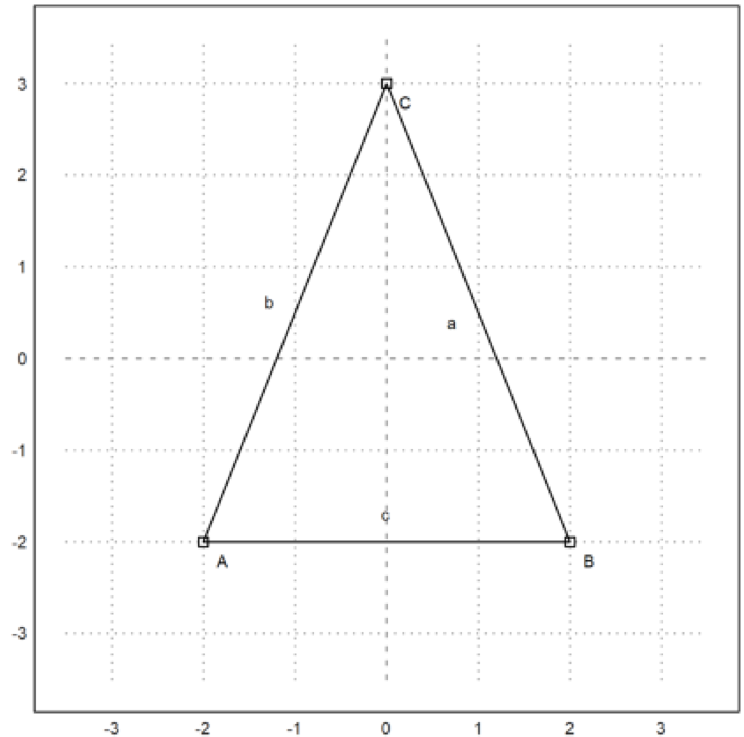
- Besar sudut pusat yang menghadap masing-masing sisi segi-n adalah (360/n).
- Titik-titik sudut segi-n merupakan perpotongan lingkaran luar segi-n dan garis-garis yang melalui pusat dan saling membentuk sudut sebesar kelipatan (360/n).
- Untuk n ganjil, pilih salah satu titik sudut adalah di atas.
- Untuk n genap, pilih 2 titik di kanan dan kiri lurus dengan titik pusat.
- Anda dapat menggambar segi-3, 4, 5, 6, 7, dst beraturan.

Penyelesaian :

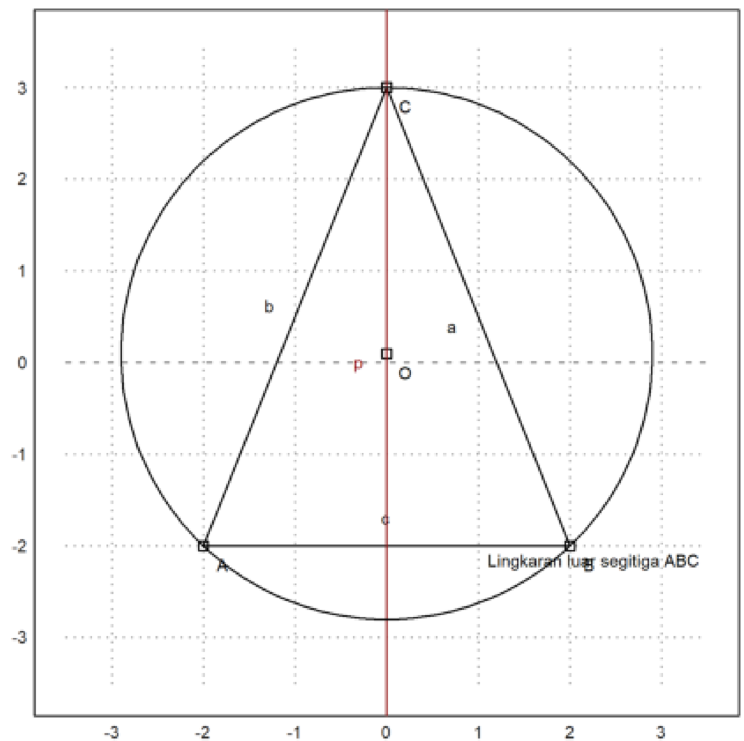
```
>load geometry
```

```
 Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(-3.5,3.5,-3.5,3.5);
>A=[-2,-2]; plotPoint(A,"A");
>B=[2,-2]; plotPoint(B,"B");
>C=[0,3]; plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,"c");
>plotSegment(B,C,"a");
>plotSegment(A,C,"b");
>aspect(1):
```




```
>c=circleThrough(A,B,C);
>R=getCircleRadius(c);
>O=getCircleCenter(c);
>plotPoint(O,"O");
>l=angleBisector(A,C,B);
>color(2); plotLine(l); color(1);
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC"):
```



2. Gambarlah suatu parabola yang melalui 3 titik yang diketahui.

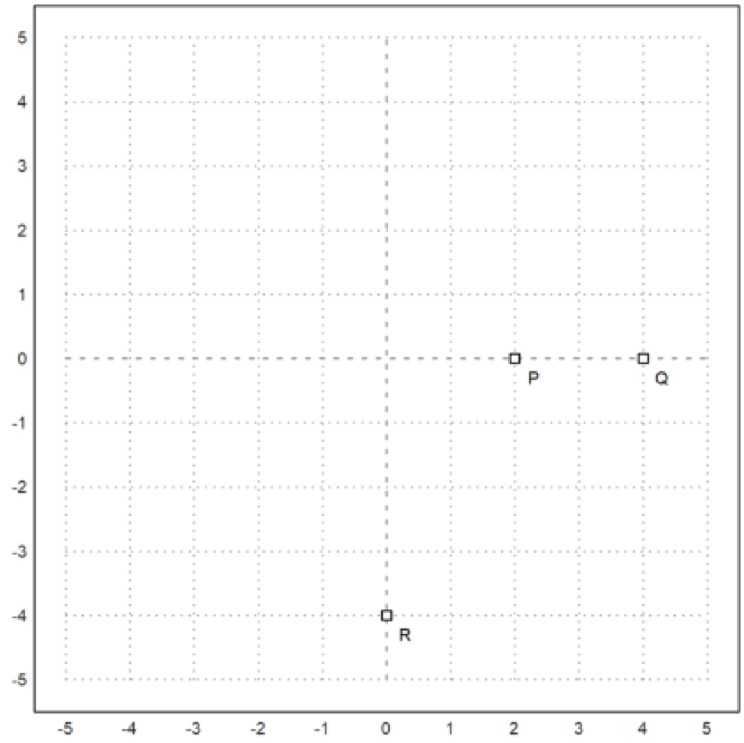
Petunjuk:
- Misalkan persamaan parabolanya y= axˆ2+bx+c.
- Substitusikan koordinat titik-titik yang diketahui ke persamaan tersebut.
- Selesaikan SPL yang terbentuk untuk mendapatkan nilai-nilai a, b, c.

Penyelesaian :

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(5); P=[2,0]; Q=[4,0]; R=[0,-4];
>plotPoint(P,"P"); plotPoint(Q,"Q"); plotPoint(R,"R"):
```




```
>sol &= solve([a+b=-c,16*a+4*b=-c,c=-4],[a,b,c])
```

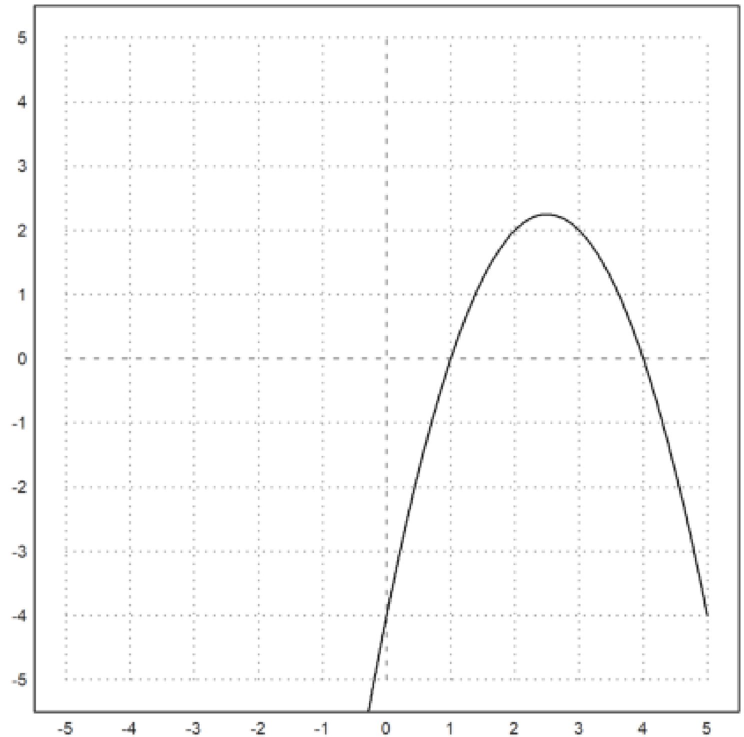
[[a = - 1, b = 5, c = - 4]]

Sehingga didapatkan nilai a = -1, b = 5 dan c = -4

```
>function y&=-x^2+5*x-4
```

```
     2
- x  + 5 x - 4
```

```
>plot2d("-x^2+5*x-4",-5,5,-5,5):
```



3. Gambarlah suatu segi-4 yang diketahui keempat titik sudutnya, misalnya A, B, C, D.

```
- Tentukan apakah segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung
```

(sisinya-sisintya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yakni lingkaran dalam segi-4 tersebut).

```
   - Suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila keempat
```

garis bagi sudutnya bertemu di satu titik.

```
   - Jika segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung, gambar
```

lingkaran dalamnya.

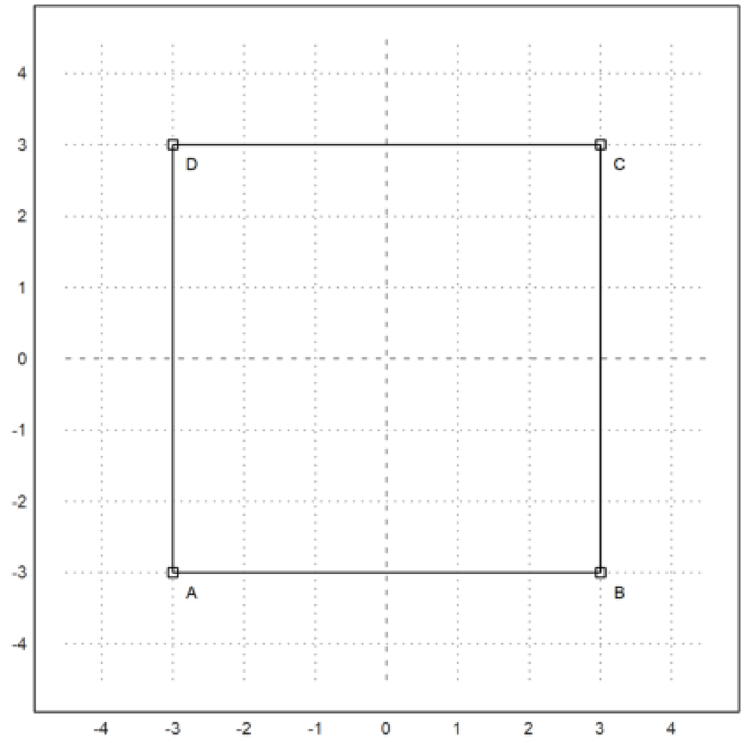
```
   - Tunjukkan bahwa syarat suatu segi-4 merupakan segi-4 garis
```

singgung apabila hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.
Penyelesaian :

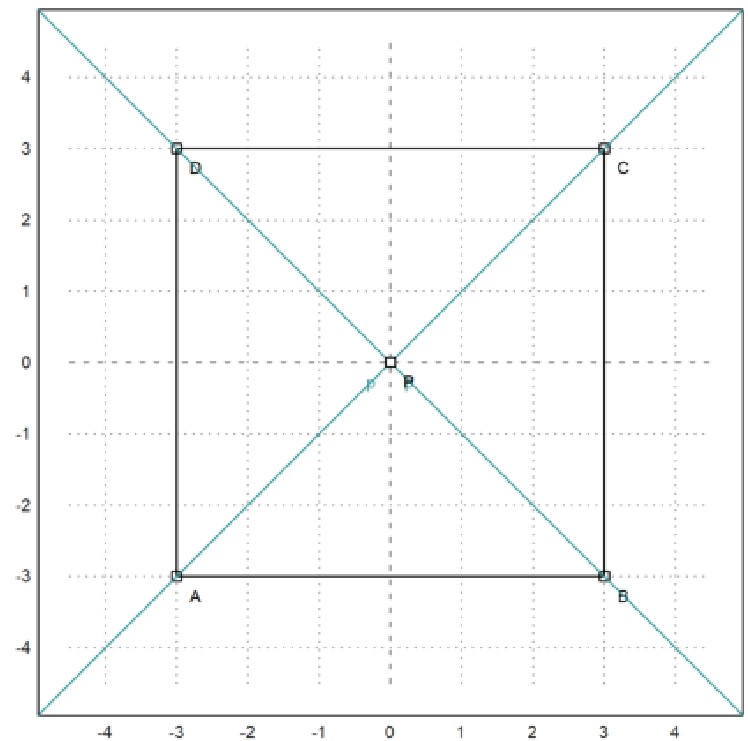
```
>load geometry
```

```
 Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(-4.5,4.5,-4.5,4.5);
>A=[-3,-3]; plotPoint(A,"A");
>B=[3,-3]; plotPoint(B,"B");
>C=[3,3]; plotPoint(C,"C");
>D=[-3,3]; plotPoint(D,"D");
>plotSegment(A,B,"");
>plotSegment(B,C,"");
>plotSegment(C,D,"");
>plotSegment(A,D,"");
>aspect(1):
```

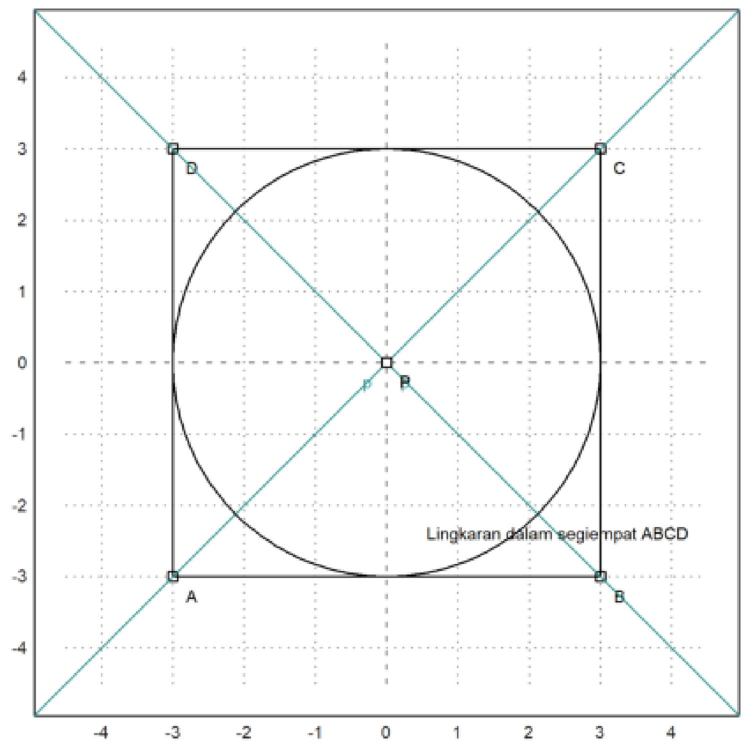



```
>l=angleBisector(A,B,C);
>m=angleBisector(B,C,D);
>P=lineIntersection(l,m);
>color(5); plotLine(l); plotLine(m); color(1);
>plotPoint(P,"P"):
```



Dari gambar diatas terlihat bahwa keempat garis bagi sudutnya bertemu di satu titik yaitu titik P.

```
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B)));
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segiempat ABCD"):
```



Dari gambar diatas, terlihat bahwa sisi-sisinya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yaitu lingkaran dalam segiempat.
Akan ditunjukkan bahwa hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

```
>AB=norm(A-B) //panjang sisi AB
```

6

```
>CD=norm(C-D) //panjang sisi CD
```

6

```
>AD=norm(A-D) //panjang sisi AD
```

6

```
>BC=norm(B-C) //panjang sisi BC
```

6

```
>AB.CD
```

36

```
>AD.BC
```

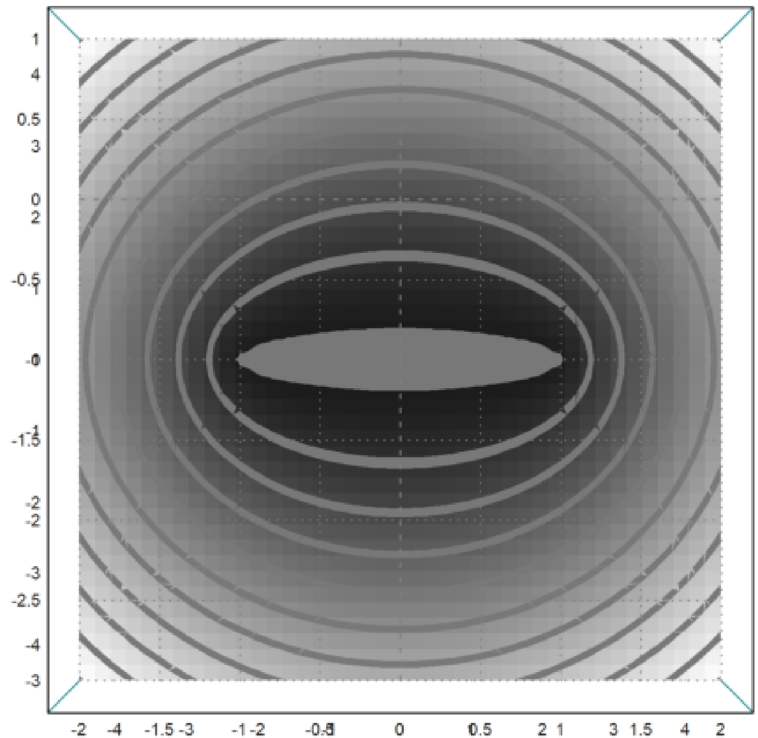
36

Terbukti bahwa hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama yaitu 36. Jadi dapat dipastikan bahwa segiempat tersebut merupakan segiempat garis singgung.

4. Gambarlah suatu ellips jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

Penyelesaian :
Diketahui kedua titik fokus P = [-1,-1] dan Q = [1,-1]

```
>P=[-1,-1]; Q=[1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)
>Q=[1,-1]; function d2(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)+sqrt((x-Q[1])^2+(y-Q[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```



5. Gambarlah suatu hiperbola jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

Penyelesaian :

```
>P=[-1,-1]; Q=[1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-p[1])^2+(y-p[2])^2)
>Q=[1,-1]; function d2(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)+sqrt((x+Q[1])^2+(y+Q[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```