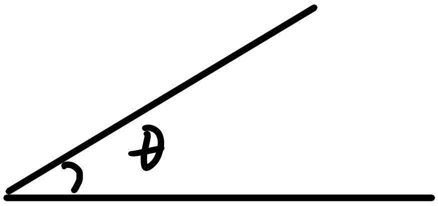
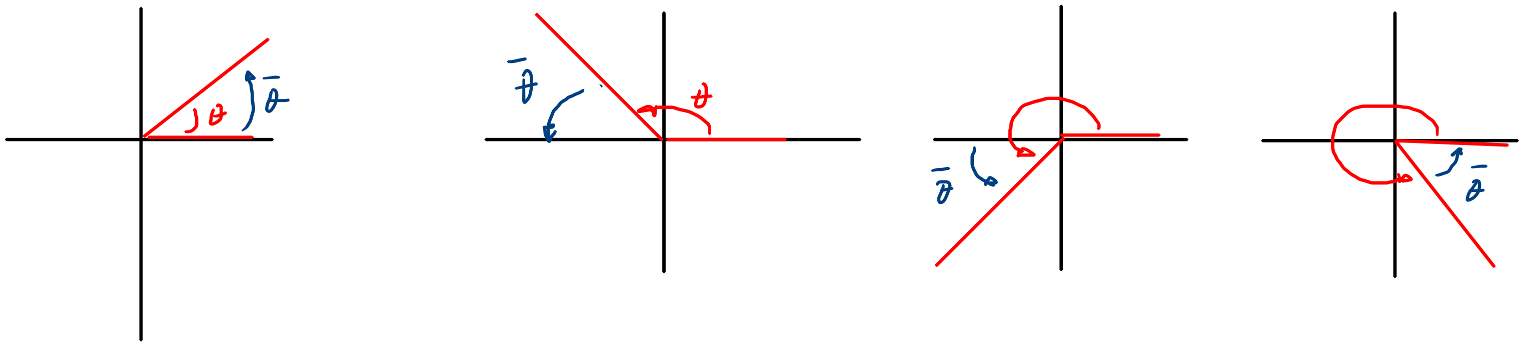
Ángulo de referencia



Si θ es un ángulo en posición estandar, entonces **el ángulo de referencia** $\bar{\theta}$ relacionado con θ es el ángulo positivo formado por el lado terminal de θ y el eje x

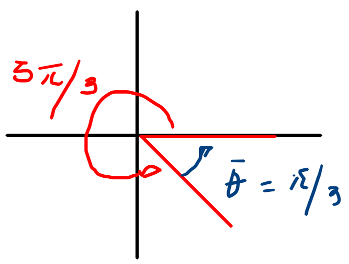


ubicación	$\bar{\theta}$
I	θ
II	$\pi - \theta$
III	$\theta - \pi$
IV	$2\pi - \theta$

Ejplo: Hallar el ángulo de referencia de

(i) $5\pi/3$ (ii) $\theta = 870°$

D// (i)



θ está ubicado en el IV cuadrante entonces

$\bar{\theta} = 2\pi - 5\pi/3 = \pi/3$

(ii) $\theta = 870°$ sabemos que la circunferencia "mide" $360°$ y como θ es mayor que $360°$. Dividimos 870 entre 360 $870° = 2(360°) + 150°$

Hablar de $870°$ es lo mismo que hablar de $150°$

Luego el ángulo de referencia $\bar{\theta}$ para $370°$ será el mismo que el ángulo de referencia para $150°$. De aquí que

$$\bar{\theta} = 180° - 150° = 30°$$

Para qué sirven los ángulos de referencia?
R// para evaluar funciones trigonométricas.

Eplo: $\sec(240°)$ ó $\cot(495°)$

Algoritmo:

1. Encontrar el ángulo de referencia $\bar{\theta}$
2. Determinar el signo de la función trigonométrica en θ
3. El valor de la función trigonométrica en θ será el valor de la función en $\bar{\theta}$ excepto posible multi por el signo, el cual se determinó en (2)

Eplo 1. Queremos Hallar $\sin(240°)$

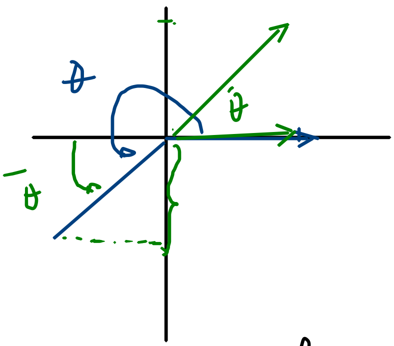
$\theta = 240° \in \underline{III}$ cuadrante

$\bar{\theta} = 240° - 180° = 60°$

Signo de $\sin(240°)$ = es negativo

$\therefore \sin(240°) = -\sin(60°)$

$= -\sqrt{3}/2$



Eplo $\cot(495°) = \dfrac{\cos(495°)}{\sin(495°)}$

$495° = 360° + 135°$ $\rightsquigarrow$ $\bar{\theta} = 180° - 135° = 45°$

II cuadrante

Como $495° \approx 135° \in$ II cuadrante

$\cos(135)° \longrightarrow$ signo negativo
$\operatorname{sen}(135°) \longrightarrow$ signo positivo

Luego signo de $\cot(495)° =$ negativo

$$\cot(495°) = -\cot(45°) = -\frac{\cos(45°)}{\operatorname{sen}(45°)} = -1.$$

Ejercicio $\sec(1000°)$:

Problema: Encontrar los angulos θ en $[0, 2\pi]$ tales que

$$\cos\theta = -1/2$$

Los puntos P de la circunferencia que tienen coordenada $x = \cos\theta = -1/2$ estan tambien en la recta $x = -1/2$

Luego las coordenadas de $P = (-1/2, y)$ satisface $x^2 + y^2 = 1$

de aquí que

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$y^2 = 1 - 1/4 = 3/4$$

$$|y| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_1 = \sqrt{3}/2 \quad y \quad y_2 = -\sqrt{3}/2$$

En resumen: los ptos que tienen coordenada $x = -1/2$

son $P := (-1/2, \sqrt{3}/2)$ y $Q = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$

Recordemos que el paso de coordenadas cartesianas a polares es

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta = \operatorname{Arctan}(y/x)$$

i.e: Dado $R := (x,y)$ estamos obteniendo sus coordenadas polares

Debo encontrar $\theta \overset{?}{=} \operatorname{Arctan}(y/x)$

$$P := (-1/2, \sqrt{3}/2) \rightsquigarrow \operatorname{Arctan}(-\sqrt{3}) = -60^\circ$$

$$Q = (-1/2, -\sqrt{3}/2) \rightsquigarrow \operatorname{Arctan}(\sqrt{3}) = 60^\circ$$

Si tomamos $\theta = -60$ ó $\theta = 60^\circ$ tenemos que

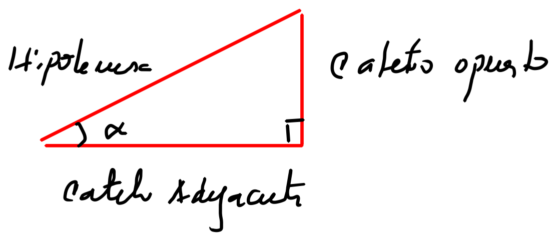
$$\cos(-60^\circ) = \cos(60^\circ) = 1/2$$

que no es lo pedido (queremos $\cos\theta = -1/2$)

tomamos como ángulo $\theta_1 = 120^\circ$ $\theta_2 = 240^\circ$

Ejercicio encontrar los ángulos $\theta \in [0, 2\pi]$ tales que $\operatorname{Sen}(\theta) = 1/2$.

Relaciones trigonométricas (Triángulo rectángulo)



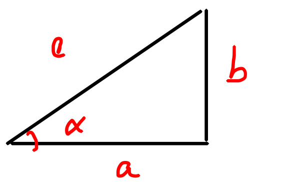
$$\mathrm{sen}(\alpha) = \frac{C.\,opto}{Hipt}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{C.\,Ady}{Hipot.}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{C\ opto}{C\ Adyac} \qquad \cot(\alpha) = \frac{Cat\ Ady}{Cat\ opto}$$

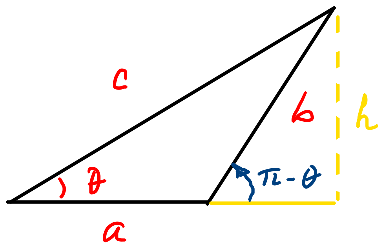
$$\sec(\alpha) = \frac{Hipt}{C.\,Ady} \qquad \csc(\alpha) = \frac{Hipt}{Cat\ opto}$$

obs: En triangulo rectangulo vale el T. de Pitagoras



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Área de un triángulo (base x altura / 2)



$$A = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{a \cdot altura}{2}$$

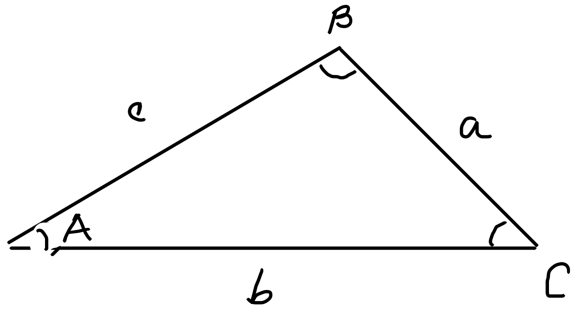
Quien es la altura del triangulo

$$\mathrm{sen}(\pi - \theta) = \frac{h}{b}$$

$$h = b \cdot \mathrm{sen}(\underbrace{\pi - \theta}) \text{“=”} b\,\mathrm{sen}\,\theta$$

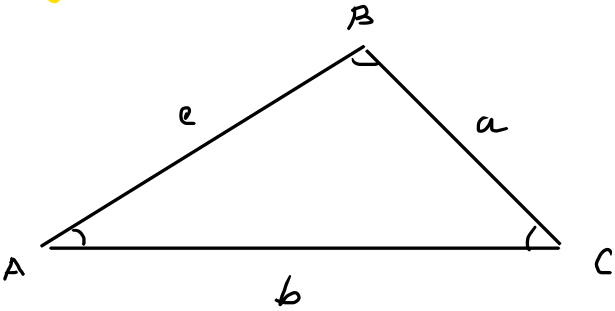
$$\therefore \boxed{\text{Area de } abc = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a\,b\,\mathrm{sen}\,\theta}{2}.}$$

Ley de los senos



$$\frac{\operatorname{Sen}(A)}{a} = \frac{\operatorname{Sen}(B)}{b} = \frac{\operatorname{Sen}(C)}{c}$$

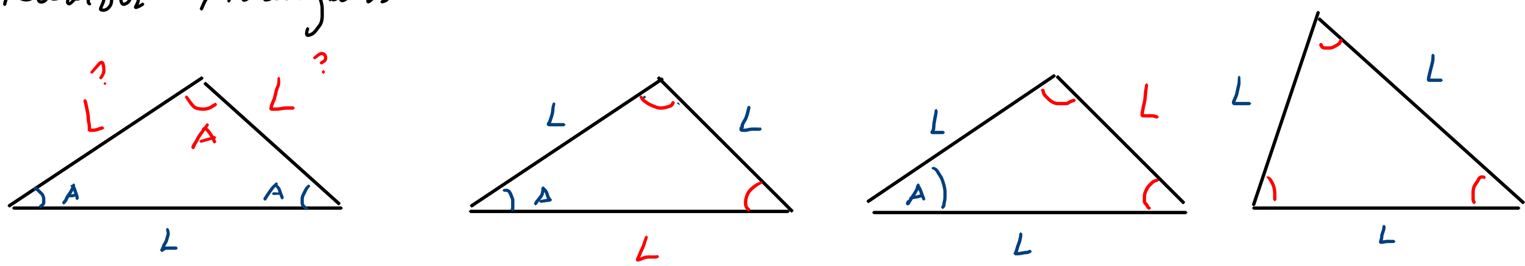
Ley de los cosenos



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(B)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$$

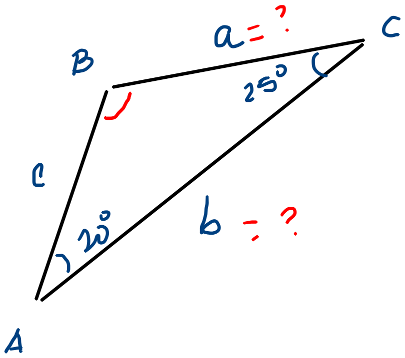
"La ley de los cosenos permite hallar un tercer lado del triangulo conociendo dos lados y el angulo entre ellos"

Resolver Triangulos



LAA   LLA   LAL   LLL

Encontrar los valores de Lados y angulos de un triangulo cuando son dadas los datos de arriba (Alguno)



$c = 80.4$

Queremos hallar a, b, y B

$$\frac{\operatorname{Sen}(A)}{a} = \frac{\operatorname{Sen}(C)}{c}$$

$$\frac{\operatorname{Sen}(20°)}{a} = \frac{\operatorname{Sen}(25°)}{80.4}$$

$$a = \frac{80.4 \times \operatorname{Sen}(20°)}{\operatorname{Sen}(25°)} = 65.1$$

Resta hallar B y b

Quien $B = 180 - 20 - 25 = 135°$

Nuevamente usamos la Ley de los senos para hallar b

$$\frac{\operatorname{Sen}(B)}{b} = \frac{\operatorname{Sen}(C)}{c}$$

$$b = \frac{c \cdot \operatorname{Sen}(B)}{\operatorname{Sen}(C)} = \frac{80.4 \cdot \operatorname{Sen}(135)°}{\operatorname{Sen}(25°)} = 134.5.$$