Problemas – Tema 9

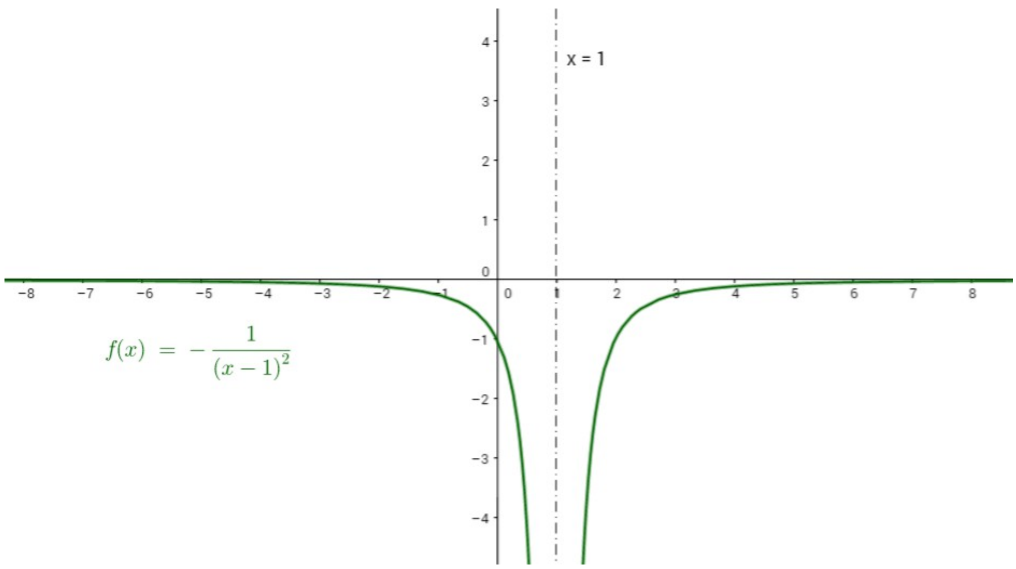
Problemas resueltos - 7 - condiciones suficientes de extremo relativo

1. La derivada de una función es negativa para valores $x<1$ y positiva para valores $x>1$. ¿Podemos afirmar que en $x=1$ tenemos un mínimo relativo? Razona tu respuesta y escribe la ecuación de una función que justifique tu respuesta.

No podemos afirmarlo, ya que si la función no está definida en $x=1$ (por ejemplo, en una asíntota vertical) no tendremos extremo relativo aunque haya un cambio de crecimiento a la izquierda y a la derecha de $x=1$. Por ejemplo:

$$f(x)=\frac{-1}{(x-1)^2} \rightarrow f'(x)=\frac{2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2}{(x-1)^3} \rightarrow f'(0)<0 \quad , \quad f'(10)>0$$

$$Dom(f)=\mathbb{R}-\{1\}$$



2. Sea la función $f:(0,+\infty)$ **y definida por** $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$ **.**

a) Halla los extremos relativos de $f(x)$ **.**

b) Determina la ecuación explícita de la recta tangente a la función en $x=e$ **.**

a) La condición necesaria de extremo relativo es que la primera derivada se anule.

$$f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x) \quad \rightarrow \quad f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{-1+x}{x^2} \quad , \quad f'(x)=0 \quad \rightarrow \quad x=1 \quad \rightarrow \text{punto crítico.}$$

Calculamos la segunda derivada y evaluamos en ella el punto crítico como condición suficiente.

$$f''(x)=\frac{x^2-(-1+x)2x}{x^4}=\frac{x-(-1+x)2}{x^3}=\frac{-x+2}{x^3} \quad , \quad f''(1)=\frac{-1+2}{1}=1>0$$

Conclusión: $x=1$ es un mínimo relativo, de imagen $f(1)=1$.

b) En $x=e$ la imagen resulta $\rightarrow$ $f(e)=\frac{1}{e}+\ln(e)=\frac{1}{e}+1=\frac{1+e}{e}$. La derivada de la función en $x=e$ coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

$$f'(x)=\frac{-1+x}{x^2} \quad \rightarrow \quad f'(e)=\frac{e-1}{e^2}$$

La ecuación punto-pendiente de la recta tangente resulta:

$$\frac{y-\frac{1+e}{e}}{x-e}=\frac{e-1}{e^2} \quad \rightarrow \quad y=\left(\frac{e-1}{e^2}\right)x-\frac{e-1}{e}+\frac{1+e}{e} \quad \rightarrow \quad y=\left(\frac{e-1}{e^2}\right)x+\frac{1-e}{e}+\frac{1+e}{e}$$

Ecuación general de la recta tangente: $y=\left(\frac{e-1}{e^2}\right)x+\frac{2}{e}$

3. Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada $f'(x)=(x-4)^2(x^2-8x+7)$, hallar los valores de las abscisas de los extremos relativos de $f(x)$.

Para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ usamos la primera derivada derivada. Calculemos sus raíces → $f'(x)=0$.

$$(x^2-4)=0 \rightarrow x=4$$

$$x^2-8x+7=0 \rightarrow x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot1\cdot7}}{2\cdot1}\rightarrow x=1, x=7$$

Evaluamos la derivada para estimar los crecimientos. Como la derivada es un polinomios es lógico asumir que la función original también será un polinomio, por lo que su dominio será toda la recta real.

Función $f(x)$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\uparrow$
Intervalos	$(-\infty, 1)$	$(1, 4)$	$(4,7)$	$(7,+\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f'(0)>0$	$f'(2)<0$	$f'(5)<0$	$f'(10)>0$

La función es creciente en los intervalos $(-\infty, 1)\cup(7,+\infty)$ y decreciente en el intervalo $(1,7)$. Observando la tabla de valores del apartado anterior, confirmamos que:

$x=1$ → Máximo relativo

$x=7$ → Mínimo relativo

4. Sea la función $f(x)=\frac{e^{-x}}{1-x},\quad x\neq 1$ **. Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de** $f(x)$ **.**

Tal y como indica el enunciado, el dominio de función son todos los reales salvo el valor $x=1$.

Obtenemos la primera derivada e igualamos a cero para obtener los puntos críticos.

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}$$

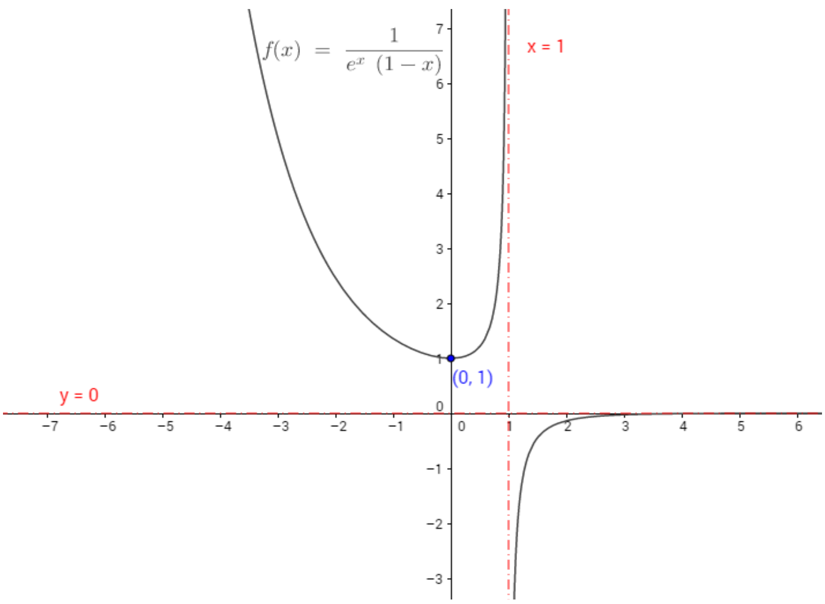
$$f'(x)=\frac{-e^{-x}(1-x)-e^{-x}(-1)}{(1-x)^2}=\frac{x\,e^{-x}}{(1-x)^2} \quad\rightarrow\quad f'(x)=0 \;\rightarrow xe^{-x}=0 \;\rightarrow x=0$$

Recordamos que la función exponencial nunca se anula.

Para conocer los intervalos de crecimiento y decrecimiento, evaluamos la primera derivada en los tramos generados por el punto crítico $x=0$, y por el punto donde no está definida la función $x=1$.

Función $f(x)$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\uparrow$
Intervalos	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f''(-10)<0$	$f''(\frac{1}{2})>0$	$f'(10)>0$

Existe un mínimo relativo en $(0,1)$. La función es estrictamente decreciente en $(-\infty,0)$, mientras que es estricamente creciente en $(0,1)$ y en $(1,\infty)$.



5. Sea la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^{x}(x^{2}-x+1)$. Halla los extremos relativos de $f(x)$ (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan), determinando si son máximos o mínimos.

El dominio de la función es toda la recta real. Derivamos e igualamos a cero para hallar los puntos críticos.

$$f'(x)=\mathrm{e}^{x}(x^{2}-x+1)+\mathrm{e}^{x}(2x-1) \rightarrow f'(x)=\mathrm{e}^{x}(x^{2}+x) \quad , \quad f'(x)=0$$

La exponencial nunca se hace cero, por lo que nos queda:

$x^{2}+x=0 \rightarrow x=0 \quad , \quad x=-1$ → puntos críticos

Calculamos la segunda derivada para averiguar si son máximos o mínimos.

$$f'(x)=\mathrm{e}^{x}(x^{2}+x) \rightarrow f''(x)=\mathrm{e}^{x}(x^{2}+x)+e^{x}(2x+1) \rightarrow f''(x)=\mathrm{e}^{x}(x^{2}+3x+1)$$

$f''(0)=1>0$ → mínimo en $(0,1)$

$f''(-1)=\frac{-1}{e}<0$ → máximo en $(-1,\frac{3}{e})$

6. Sea la función definida por $f(x)=\frac{3x^4+1}{x^3}$ para $x \neq 0$. Obtener extremos relativos y monotonía.

Nos están pidiendo que hagamos la primera derivada para conocer a los candidatos a máximo y mínimo relativos. Calcularemos los valores críticos igualando la primera derivada a cero.

$$f'(x)=\frac{12x^3(x^3)-(3x^4+1)3x^2}{x^6}=\frac{12x^4-9x^4-3}{x^4}=\frac{3x^4-3}{x^4}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow 3x^4-3=0$$

$$x^4-1=0$$

$$x=\pm 1$$

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función vamos a tener en cuenta los valores críticos y los puntos donde esta no está definida $(x=0)$.

Daremos valores que estén entre los intervalos para sustituirlos en la primera derivada y saber el crecimiento o decrecimiento de la función (derivada positiva implica función estrictamente creciente, derivada negativa implica función estrictamente decreciente).

Función $f(x)$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\uparrow$
Intervalos	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f'(-10)>0$	$f'(\frac{-1}{2})<0$	$f'(\frac{1}{2})<0$	$f'(10)>0$

En $x=-1$ tenemos máximo relativo: $(-1,-4)$. En $x=1$ un mínimo relativo: $(1,4)$. Función estrictamente creciente en $(-\infty,-1)$ y $(1,+\infty)$. Estrictamente decreciente en $(-1,0)$ y $(0,1)$.