Musique et Math

Situation d'apprentissage

MAT-5161-2 et MAT-5171-2

Modélisation algébrique et graphique en contexte appliqué 2
et en contexte fondamental 2

Source de l'image : https://pixabay.com/

Guide de l'enseignant

Corrigé des exercices et des tâches

Version de juin 2019

Louise Roy

Présentation de la situation

Quels principes sous-tendent la conception d’une guitare ? Quelle est la relation entre la musique et les mathématiques ? Dans cette situation d’apprentissage, vous utiliserez des concepts mathématiques pour comprendre la structure d’une guitare et les caractéristiques d’une onde sonore émise par celle-ci.

Intention pédagogique

- ♬ Représenter une situation par un modèle algébrique ou graphique ;
- ♬ Acquérir des connaissances dans un contexte réaliste ;
- ♬ Mobiliser des stratégies de résolution de problèmes complexes ;
- ♬ Développer des compétences dans le traitement de situations faisant intervenir des modèles algébriques.

Procédé intégrateur :

Représentation d’une situation par un modèle algébrique et graphique.

Compétences transversales

- ♬ *Exploiter les technologies de l’information et de la communication.* L’adulte aura recours au logiciel GeoGebra pour mettre en évidence les caractéristiques de modèles algébriques.

Compétences disciplinaires

- ♬ *Utiliser des stratégies de résolution de situations problèmes.* L’adulte devra repérer les éléments dont il aura besoin et il devra représenter la situation. Au besoin, la représentation pourra lui être fournie.
- ♬ *Déployer un raisonnement mathématique.* L’adulte devra résoudre les situations problèmes en utilisant correctement les savoirs de ce cours.
- ♬ *Communiquer à l’aide du langage mathématique.* L’adulte devra respecter les normes d’écriture et de représentation propres au traitement algébrique et graphique.

Domaine général de formation

Par le développement de connaissances de ce qui constitue le son, cette situation est liée au domaine général Médias.

Savoirs

Relations et fonctions

- Exponentielle
- Rationnelle
- Logarithmique
- Sinusoïdale
- Description et interprétation des propriétés
- Opérations sur les fonctions

Systèmes

- Résolution graphique de situation impliquant des systèmes d'équations faisant intervenir divers modèles fonctionnels.

Utilisation proposée et temps alloué

Cette situation peut être donnée à l'adulte en cours d'apprentissage. Elle permet de mettre à l'épreuve le recours aux stratégies et aux savoirs pour résoudre une situation complexe. Elle se compose de trois tâches qui peuvent être faites séparément.

- La tâche 1 porte sur les fonctions exponentielles et rationnelle;
- La tâche 2 porte sur les fonctions trigonométriques;
- La tâche 3 porte sur la fonction logarithmique.

Prévoyez environ de 5 à 6 heures selon que l'adulte prend lui-même les différentes mesures.

MATÉRIEL

Dans un contexte plus appliqué, l'adulte pourra prendre des mesures.Voici le matériel devant être mis à la disposition de l'adulte :

- une guitare classique ou acoustique ;
- un mètre à mesurer ;
- un ordinateur avec un microphone ;
- le logiciel Audacity ;
- des applications pour émettre des fréquences et pour mesurer les décibels [1];
- un accès Internet pour l'utilisation des activités qui se trouvent dans le livret GeoGebra. (Le travail avec les activités est indiqué tout au long de la situation d'apprentissage.)

S'il n'est pas possible d'avoir certains outils, vous remettrez les tableaux de données à l'adulte.

Production attendue

À la fin de cette SA, l'adulte sera capable d'appliquer ses connaissances des relations, fonctions et systèmes, afin de résoudre des situations problèmes en contexte appliqué.

Ressources

Livret GeoGebra : https://monurl.ca/musiquemath

Ce symbole indique une activité avec GeoGebra

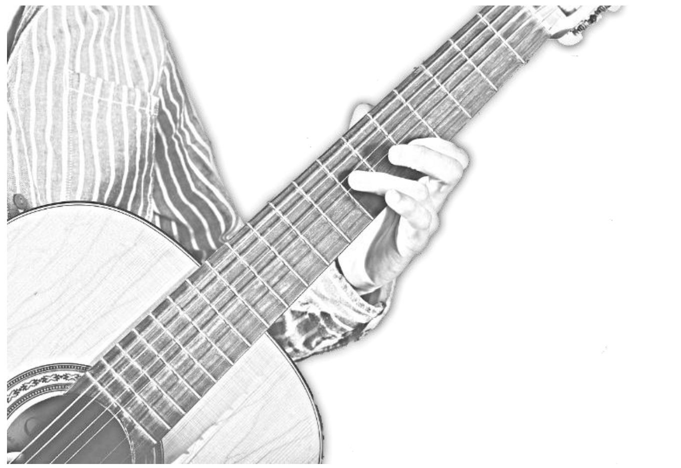
Ce symbole indique le visionnement d'une capsule vidéo

[1] Des propositions d'applications sont données en annexe.

Tâche 1 : structure de la guitare

Une guitare standard, classique, acoustique ou électrique, possède six cordes. Les cordes à vide produisent une note. En appuyant sur le manche, le guitariste réduit la longueur de la corde.

Plus la corde est courte, plus elle émet une note aigüe. **Il y a donc une relation de dépendance entre la longueur de la corde et la note émise.**



La distance à laquelle on place les frettes doit être très précise pour obtenir une note juste. Mais comment calcule-t-on cette distance ?

Dans cette première tâche, vous identifierez le type de relation qu'il y a entre la longueur de la corde et la fréquence de la note obtenue. Vous expliquerez ensuite le principe qui permet de calculer la distance entre les frettes de la guitare.

Avant de poursuivre, consultez la première capsule vidéo.

PARTIE PRATIQUE

Pour cette situation, vous pouvez utiliser une guitare classique ou acoustique[2].

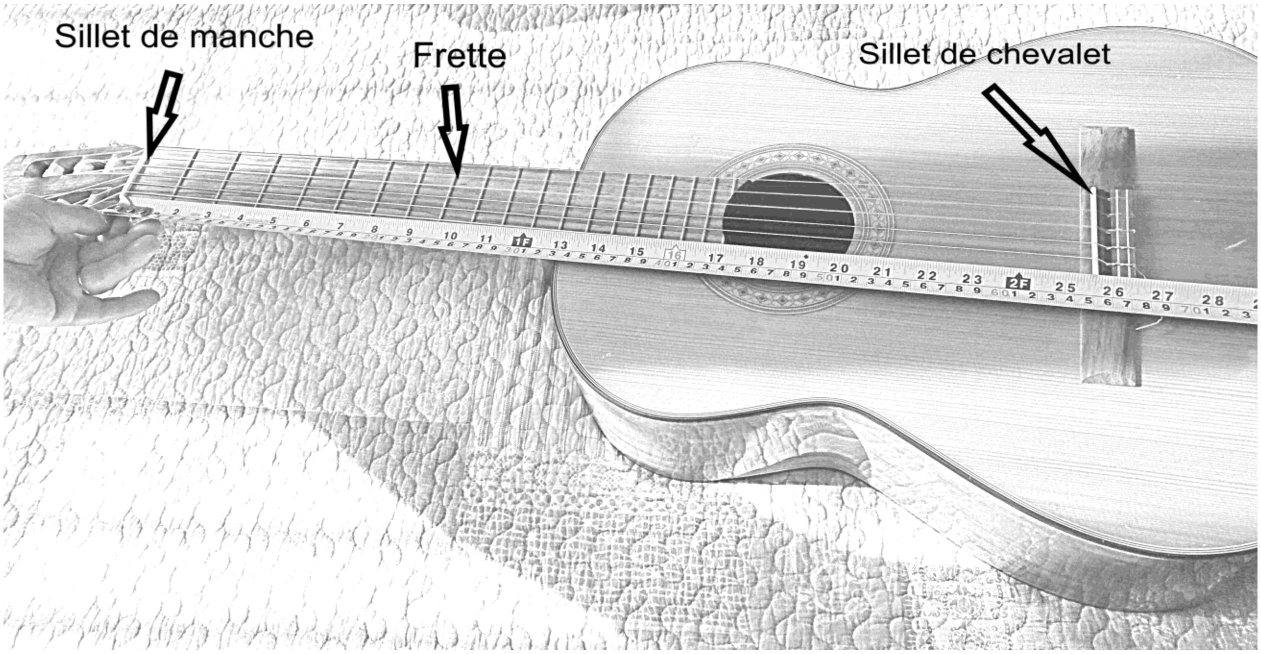
D'abord, observez la guitare, en particulier la distance entre les frettes. Que remarquez-vous ?

Exemple de réponse :

La distance entre les frettes n'est pas égale tout au long du manche.

[2] Si vous ne pouvez avoir de guitare, demandez un tableau avec la longueur des cordes.

À l'aide d'un mètre à mesurer, notez la longueur d'une corde à vide, du sillet de manche au sillet de chevalet, puis la mesure à chacune des frettes au sillet de chevalet tel que montré sur la photo.



Inscrivez d'abord vos mesures dans un tableau ou directement dans le tableur GeoGebra, activité *Étude de la guitare*. Ensuite, complétez le tableau en indiquant la fréquence en *Hertz*[3] de la note émise pour la cinquième corde. Pour cela, vous pouvez trouver la valeur de ces fréquences sur Internet. Entrez également ces valeurs dans le tableau GeoGebra.

Note : pour vous aider pour l'utilisation du tableur GeoGebra, consultez la capsule vidéo sur le Livret (https://monurl.ca/guitare).

---

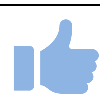
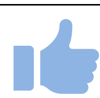
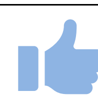
[3] Nombre de cycles par seconde, vous verrez cette notion plus en détail dans la tâche 2.

Corde choisie : 5***e***					
Frette	Longueur (cm)	Fréquence (Hertz)	Frette	Longueur (cm)	Fréquence (Hertz)
0	***65,0***	***110,0***	8	***41,1***	***174,6***
1	***61,5***	***116,5***	9	***38,7***	***185,0***
2	***58,0***	***123,5***	10	***36,7***	***196,0***
3	***54,9***	***130,8***	11	***34,5***	***207,7***
4	***51,7***	***138,6***	12	***32,7***	***220,0***
5	***49,0***	***146,8***	13	***30,8***	***233,1***
6	***45,8***	***155,6***	14	***29,0***	***246,9***
7	***43,5***	***164,8***	15	***27,4***	***261,6***

Entrez les données dans l'activité *Études de la guitare* et générez le graphique des relations suivantes[4] :

- Longueur de la corde en fonction de la position de la frette ;
- Fréquence de la note en fonction de la position de la frette pour la corde de votre choix ;
- Fréquence de la note en fonction de la longueur de la corde pour la corde de votre choix.

Selon vous quelle fonction décrit mieux la relation entre :

	Fonction exponentielle	Fonction polynomiale du second degré	Fonction rationnelle
La longueur de la corde et la position de la frette			
La fréquence de la note et la position de la frette			
La fréquence de la note et la longueur de la corde			

Pour valider vos réponses, faites la partie théorique et les exercices qui suivent. Vous reviendrez ensuite à vos graphiques.

[4] Visionnez la vidéo au début de l'activité afin de savoir comment y arriver.

PARTIE THÉORIQUE

Comment trouver le modèle algébrique d'une fonction exponentielle et d'une fonction rationnelle.

LA FONCTION EXPONENTIELLE

La fonction exponentielle est de la forme : $f(x)=a\times c^{b(x-h)}+k$

Ouvrez le fichier GeoGebra et notez les caractéristiques de la fonction exponentielle en manipulant les paramètres *a*, *b*, *c*, *h* et *k* en complétant les phrases suivantes :

- Lorsque *b* est positif, la fonction est ***croissante*** lorsque $c>1$ et elle est ***décroissante*** lorsque $0<c<1$. La fonction devient constante lorsque *c* égal *à* ***1***.
- La fonction est ouverte vers le ***haut*** lorsque $a>0$ et elle est ouverte vers le ***bas*** lors $a<0$
- Il y a présence d'une asymptote dont l'équation ***est*** $y=k$
- Le paramètre *k* permet un déplacement ***vertical*** de la courbe
- Lorsque $h=0$, la valeur de l'ordonnée à l'origine est égale à ***a+k***

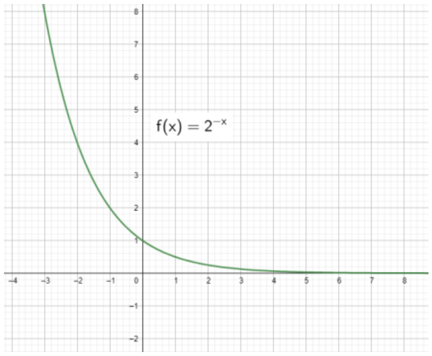
En gardant les autres paramètres à la même valeur, démontrez algébriquement et graphiquement[5] que si $c=2$ et $b=-1$ on a la même fonction que si $c=1/2$ et $b = 1$.

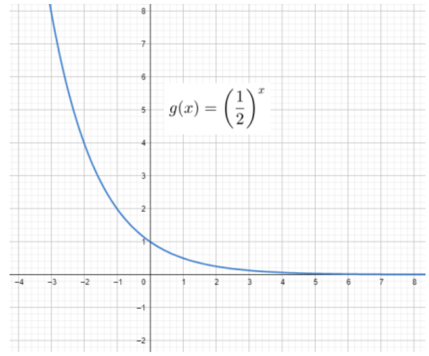
Exemple de solution :

Selon la loi des exposants, $a^b=\left(\frac{1}{a}\right)^{-b}$

Donc $f(x)=2^{-x}$ et $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ représentent la même fonction.

[5] Utilisez l'activité *Comparaison de deux fonctions exponentielles* pour la démonstration.





Retour sur vos graphiques

Les relations **longueur de la corde en fonction de la position de la frette** et **fréquence de la note en fonction de la position de la frette** sont des fonctions exponentielles. Donnez les caractéristiques de leur fonction :

> **Stratégie** : Utilisez les graphiques de l'activité *Étude de la guitare* pour faire les simulations.

Longueur en fonction de la position de la frette :

a. Le paramètre *a* est ***positif***, car la courbe est ouverte vers le ***haut***

b. En posant l'hypothèse que le paramètre *b* est positif alors le paramètre *c* est ***entre 0 et 1,*** car la courbe est ***décroissante***.

c. L'équation de l'asymptote est de ***y=0***, car la ***longueur*** est toujours positive.

d. Parmi les modèles suivants, lequel représente le mieux la relation entre la longueur et la position de la frette

$f(x)=65\times0{,}94^{x}$	$f(x)=-65\times0{,}8^{0{,}2x}+130$	$f(x)=40\times0{,}94^{x}-25$	$f(x)=40\times1{,}6^{x}+25$

Fréquence en fonction de la position de la position de la frette

e. Le paramètre *a* est ***positif***, car la courbe est ouverte vers le ***haut***

f. En posant l'hypothèse que le paramètre *b* est positif alors le paramètre *c* est ***plus grand que 1,*** car la courbe est ***croissante***.

g. L'équation de l'asymptote est de ***y=0***, car la fréquence est toujours ***positive***.

h. Parmi les modèles suivants, lequel représente le mieux la relation entre la fréquence et la position de la frette

$f(x) = 110 \times 0{,}94^x$	$f(x) = -110 \times 1{,}06^{0.5x} + 160$	$f(x) = 110 \times 1{,}06^x$	$f(x) = 70 \times 1{,}06^x - 30$

LA FONCTION RATIONNELLE

La fonction rationnelle est sous la forme $f(x) = a\left(\frac{1}{b(x-h)}\right) + k$

Ouvrez le fichier GeoGebra et notez les caractéristiques de la fonction rationnelle en manipulant les paramètres *a*, *b*, *h* et *k* et en complétant les phrases suivantes :

- La fonction est ***décroissante*** lorsque ***a*** et ***b*** sont de même signe. Si $h = 0$ et $k = 0$, le graphique est alors dans les quadrants ***1 et 3***
- La fonction est ***croissante*** lors que ***a*** et ***b*** sont de signe contraire. Si $h = 0$ et $k = 0$, le graphique est alors dans les quadrants ***2 et 4***
- Il y a présence de ***deux*** asymptotes dont les équations sont $x = h$ et $y = k$
- Le paramètre *h* permet un déplacement ***horizontal*** de la courbe.
- Le paramètre *k* permet un déplacement ***vertical*** de la courbe.

Retour sur votre graphique

La relation **fréquence de la note en fonction de la longueur de la corde** est une fonction rationnelle. Donnez les caractéristiques de la fonction.

- Les paramètres *a* et *b* sont ***positifs (accepter de même signe)*** car la fonction est ***décroissante***
- Parmi les modèles suivants, lequel représente le mieux la relation entre la fréquence de la note et la longueur de la corde pour la sixième corde ?

$f(x) = -7150\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x) = 7150\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x) = 7150\left(\frac{1}{-x}\right)$	$f(x) = \left(\frac{1}{7150x}\right)$

- Quelle valeur devra avoir le paramètre *b* pour obtenir le modèle de la relation de la fréquence en fonction de la longueur de la cinquième corde ?
  7150

Stratégie : Multipliez la mesure de la longueur de la corde et la fréquence pour chaque note.

SOLUTION DE LA SITUATION À RÉSOUDRE

Pour construire une mini guitare de quatre cordes et 15 frettes, à quelle distance les frettes devront-elles être placées ?

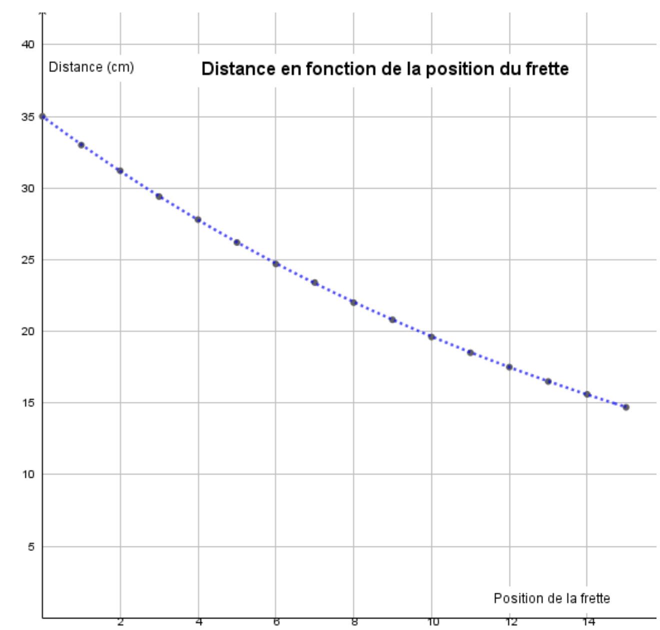
Ouvrez l'activité *Construire une mini-guitare* et démontrez vos résultats

La relation entre la longueur de la corde et la fréquence des notes est une fonction rationnelle. Donc, la longueur de la corde doit diminuer selon le même facteur multiplicatif que l'augmentation de la fréquence.

Exemple pour un manche dont la longueur entre le sillet est de 35 cm.

Chaque mesure est divisée par $\sqrt[12]{2}$ ***.***

Frette	Longueur (cm)
0	35,0
1	33,0
2	31,2
3	29,4
4	27,8
5	26,2
6	24,7
7	23,4
8	22,0
9	20,8
10	19,6
11	18,5
12	17,5
13	16,5
14	15,6
15	14,7



Fonction : $f(x)=35\times\left(\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\right)^x$ ***ou*** $f(x)=35\times 0{,}94^x$

D'où vient le nombre 1,06? En fait, c'est plus précisément $\sqrt[12]{2}$. Dans une octave, il y a 12 demi-tons et lorsqu'on augmente la fréquence d'une note d'une octave, on multiplie la fréquence de cette note par deux. Ainsi, le rapport de la fréquence de deux notes consécutives, distantes d'un demi-ton, sera de $\sqrt[12]{2}$. $0{,}94 \cong \frac{1}{\sqrt[12]{2}}$

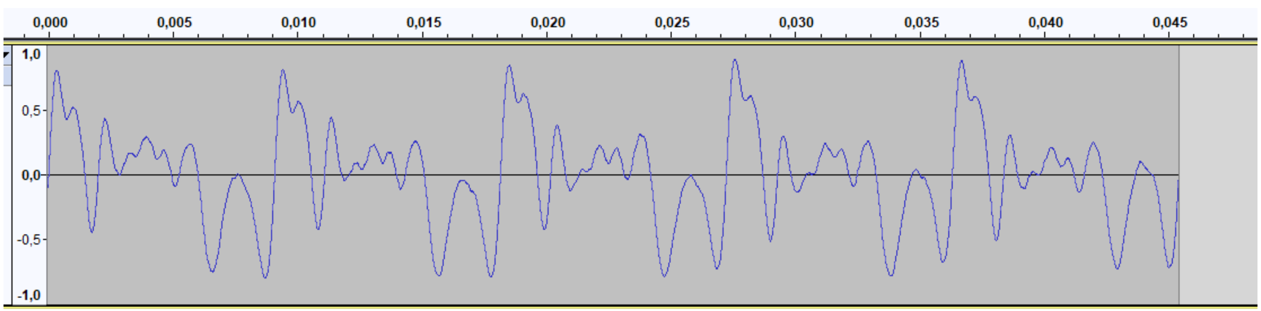
Tâche 2 : étude de l’onde sonore

Lorsqu’un guitariste joue sur son instrument, les notes émises sont amplifiées par la caisse de résonnance de la guitare ce qui fait la richesse du son.

PARTIE PRATIQUE

On peut représenter graphiquement une onde sonore à l’aide d’un logiciel tel *Audacity.* Ouvrez le logiciel et enregistrez une note jouée sur une corde à vide de la guitare. (Vous pouvez également utiliser un émetteur de fréquences.

Vous devriez obtenir une courbe semblable à celle-ci (exemple de la cinquième corde à vide de la guitare, **La 110 Hz**) :



Le son provenant d’un instrument de musique ou de toute autre source est rarement pur. Il est composé de plusieurs sons de fréquences et d’amplitudes différentes qu’on nomme *harmoniques*.

Le graphique du son complexe résulte de la somme du graphique du son pur et de ceux de ses harmoniques. La note *fondamentale*[6] et ses harmoniques peuvent être décrites par des fonctions cosinus.

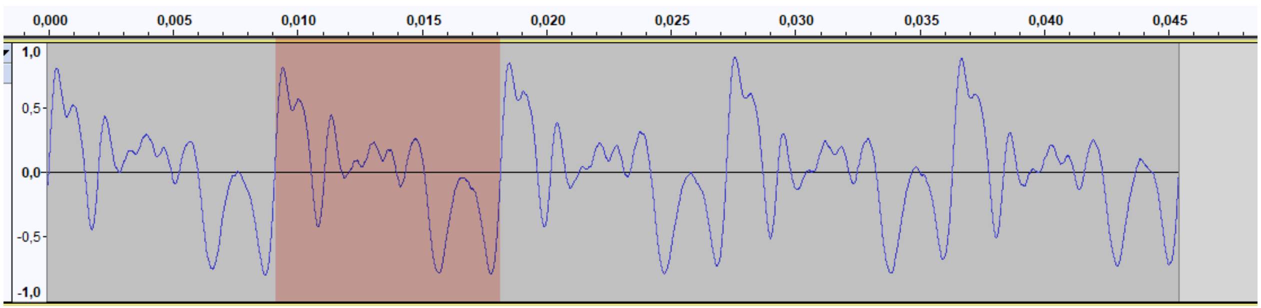
Avant de poursuivre, visionnez la seconde capsule vidéo.

[6] La note fondamentale est la note de base, la note réelle que le musicien choisit de jouer.

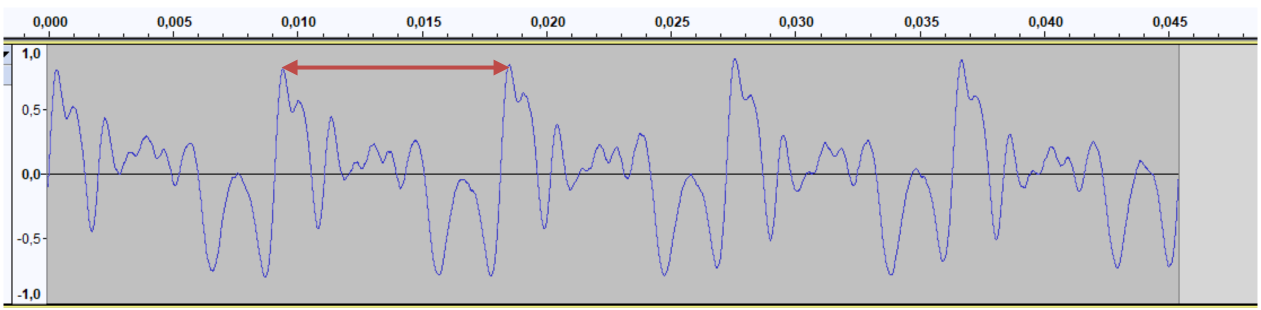
Partie théorique

La courbe obtenue est **périodique**, mais de forme complexe. Ce type de fonction se caractérise par un cycle, une période, une amplitude, des extrémums, des intervalles de croissance et de décroissance.

Le *cycle* de la fonction se définit comme la partie du graphique qui se répète.

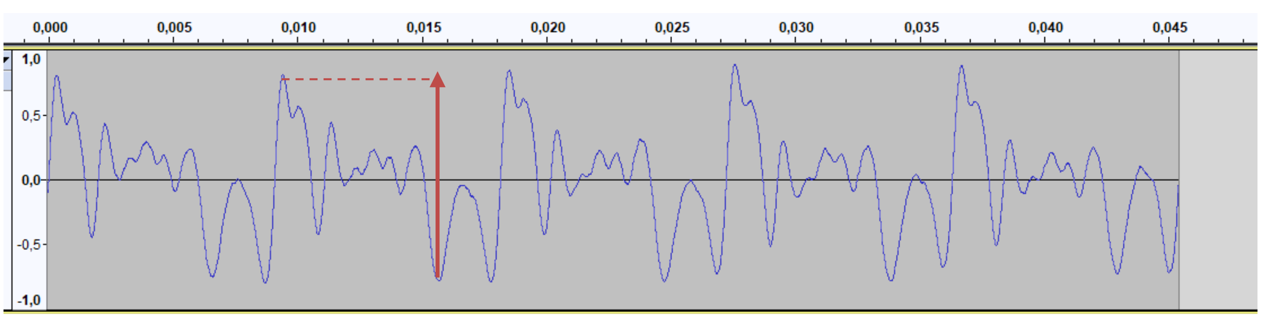


La *période* se définit par l'intervalle entre les abscisses de deux points correspondants de deux cycles consécutifs.



Quelle est la période de la courbe précédente : ***environ 0,009 sec***

L'amplitude se définit par la **moitié de la différence** entre la valeur maximale et la valeur minimale en ordonnée.



Quelle est l'amplitude de la courbe précédente : ***1,0 unité***

La séquence montre l'onde sonore durant 0,0455 seconde, combien observe-t-on de cycles complets durant cet intervalle ? ***5 cycles***

La fréquence d'une note est le nombre de cycles qu'elle fait en une seconde. Dans l'exemple, combien de cycles fait cette note ?

Réponse :

$\frac{1\,\text{sec}}{0.009\,\text{sec/cycle}} = 111\,\text{cycles}$ ***, ce qui se rapproche de la fréquence de la note La qui est de 110 Hz.***

Donc, plus une note est grave, plus sa fréquence sera ***petite*** et plus son cycle sera ***grand***.

L'amplitude de la courbe correspond à l'énergie de la vibration causée par la note de musique. Plus l'amplitude est grande, plus le son est fort.

Un son **pur** produit une courbe parfaitement sinusoïdale. Les courbes sinusoïdales sont les fonctions sinus et cosinus.

Un son **complexe** est produit par la note fondamentale auquel s'ajoutent ses harmoniques qui ont une amplitude plus faible, une fréquence égale à un multiple de la fréquence de la fondamentale et un léger décalage dans le temps. Le graphique du son complexe résulte donc de la somme de plusieurs fonctions cosinus.

Les fonctions sinus et cosinus sont appelées fonctions trigonométriques Dans ce cours ces deux fonctions sont étudiées ainsi que la fonction tangente qui est le quotient du sinus et du cosinus.

LES FONCTIONS SINUS ET COSINUS

Les fonctions sinus et cosinus ont un cycle semblable. La fonction sinus est de la forme $f(x)=a\sin\left(b\left(x-h\right)\right)+k$

Ouvrez l'activité *Les fonctions trigonométriques*, sélectionnez la fonction sinus et notez les caractéristiques de la fonction sinus en manipulant les paramètres a, b, h et k. Complétez le tableau en indiquant le paramètre dont la modification de la valeur entraine :

Effet	Paramètre
Une modification du cycle	
Une modification de la période	***b***
Une modification de l'amplitude	***a***
Un déplacement vertical de la courbe	***k***
Un déplacement horizontal de la courbe	***h***

Identifiez les caractéristiques de la fonction $f(x)=\frac{5}{4}\sin\left(\frac{-1}{4}\pi\left(x+\frac{3}{2}\right)\right)+\frac{1}{2}$

Complétez le tableau en inscrivant vos démarches :

la période	$P=\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}=\frac{2\pi}{{}^{1}\!/_{4}\pi}=8$
l'amplitude	$A=\lvert a\rvert=\frac{5}{4}$
le domaine	$dom\, f\left(x\right)=\mathbb{R}$
l'image (le codomaine)	$ima\, f(x)=\left[k-\lvert a\rvert, k+\lvert a\rvert\right]=\left[\frac{1}{2}-\frac{5}{4},\frac{1}{2}+\frac{5}{4}\right]=\left[\frac{-3}{4},\frac{7}{4}\right]$
les zéros	$\left\{-6+nP,-1+nP\ldots\right\}=\left\{-6+8n,-1+8n\right\}\ où\ n\in\mathbb{Z}$
l'ordonnée à l'origine	$f(0)=0{,}655$
un intervalle de croissance	$\left[\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right]$
un intervalle de décroissance	$\left[\frac{-7}{2},\frac{1}{2}\right]$

Donnez une fonction qui a les caractéristiques suivantes :

la période	$P=1$	$P=\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}=1\to\lvert b\rvert=2\pi\to b=2\pi \text{ ou } b=-2\pi$
l'amplitude	$A=\frac{1}{2}$	$A=\lvert a\rvert\to\frac{1}{2}=\lvert a\rvert\to a=\frac{1}{2} \text{ ou } a=\frac{-1}{2}$
le domaine	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
l'image (le codomaine)	$\left[\frac{-3}{2},\frac{-1}{2}\right]$	$\left[\frac{-3}{2},\frac{-1}{2}\right]$ $k-\lvert a\rvert=k-\frac{1}{2}=\frac{-3}{2}\to k=\frac{-3}{2}+\frac{1}{2}=-1$ $k+\lvert a\rvert=k+\frac{1}{2}=\frac{-1}{2}\to k=\frac{-1}{2}-\frac{1}{2}=-1$
les zéros	Aucun	
l'ordonnée à l'origine	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-3}{2}=\frac{1}{2}\sin\left(2\pi\left(0-h\right)\right)-1\to-1=\sin\left(2\pi\left(-h\right)\right)\to h=\frac{1}{4}$ $\frac{-3}{2}=\frac{-1}{2}\sin\left(2\pi\left(0-h\right)\right)-1\to 1=\sin\left(2\pi\left(-h\right)\right)\to h=\frac{-1}{4}$
un intervalle de croissance	$\left[0,\frac{1}{2}\right]$	$\left[0,\frac{1}{2}\right]$
un intervalle de décroissance	$\left[\frac{1}{2},1\right]$	$\left[\frac{1}{2},1\right]$

Plusieurs fonctions ont ces caractéristiques, selon les signes de a, b et h. Voici deux exemples :

$f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)\right)-1$ ou $f(x)=\frac{-1}{2}\sin\left(2\pi\left(x+\frac{1}{4}\right)\right)-1$

La fonction cosinus est de la forme $f(x)=a\cos\left(b\left(x-h\right)\right)+k$

Ouvrez l'activité *Les fonctions trigonométriques*, sélectionnez la fonction cosinus et notez les caractéristiques de la fonction cosinus en manipulant les paramètres a, b, h et k. Complétez le tableau en indiquant le paramètre dont la modification de la valeur entraine :

Effet	Paramètre
Une modification du cycle	
Une modification de la période	***b***
Une modification de l'amplitude	***a***
Un déplacement vertical de la courbe	***k***
Un déplacement horizontal de la courbe	***h***

Pour la fonction $f(x)=\frac{-1}{2}\cos\left(-1\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)+\frac{1}{4}$, donnez :

la période	$P=\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}=\frac{2\pi}{1\pi}=2$
l'amplitude	$\frac{1}{2}$
le domaine	$\mathbb{R}$
le codomaine	$\left[\frac{-1}{4},\frac{3}{4}\right]$
les zéros	$\left\{\ldots,\frac{-19}{6}+2n,\frac{-7}{6}+2n,\ldots\right\}$
l'ordonnée à l'origine	$\frac{1}{4}$
un intervalle de croissance	$\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$
un intervalle de décroissance	$\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$

Donnez une fonction qui a les caractéristiques suivantes :

la période	4
l'amplitude	2
le domaine	$\mathbb{R}$
le codomaine	$[0,4]$
les zéros	$\{-2+4n\}\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$
l'ordonnée à l'origine	4
un intervalle de croissance	$[2,4]$
un intervalle de décroissance	$[0,2]$

$$f(x)=2\cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right)+2$$

LA FONCTION TANGENTE

La fonction tangente est de la forme $f(x)=a\tan\big(b(x-h)\big)+k$

Ouvrez l'activité *Les fonctions trigonométriques*, sélectionnez la fonction tangente et notez les caractéristiques de la fonction tangente en manipulant les paramètres a, b, h et k. Complétez le tableau en indiquant le paramètre dont la modification de la valeur entraine :

Effet	Paramètre
Une modification du cycle	
Une modification de la période	***b***
Une modification de l'amplitude	***a***
Un déplacement vertical de la courbe	***k***
Un déplacement horizontal de la courbe	***h***

Pour la fonction $f(x)=3\tan\left(\frac{-3}{2}\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$, donnez :

la période	2
les asymptotes	$\left\{\frac{3}{2}+2n\right\}\forall n\in\mathbb{Z}$
le domaine	$\mathbb{R}$
le codomaine	$\mathbb{R}$
les zéros	$\left\{\frac{1}{2}+2n\right\}\forall n\in\mathbb{Z}$
l'ordonnée à l'origine	3
un intervalle de croissance	aucun
un intervalle de décroissance	$\left]\frac{-1}{2},\frac{3}{2}\right[$

Donnez une fonction qui a les caractéristiques suivantes :

la période	4
les asymptotes	$\{2+4n\}\forall n\in\mathbb{Z}$
le domaine	$\mathbb{R}$
le codomaine	$\mathbb{R}$
les zéros	$\{-1+4n\}\forall n\in\mathbb{Z}$
l'ordonnée à l'origine	$\frac{1}{2}$
un intervalle de croissance	
un intervalle de décroissance	Aucun

$$f(x)=\frac{1}{2}\tan\left(\frac{1}{4}\pi x\right)+\frac{1}{2}$$

SITUATION À RÉSOUDRE

Sachant que

— les harmoniques d'une note de musique sont moins fortes (amplitude plus petite),

— leur fréquence est un multiple de la note de base (fondamentale)

— le son des harmoniques suivent la fondamentale avec un léger décalage.

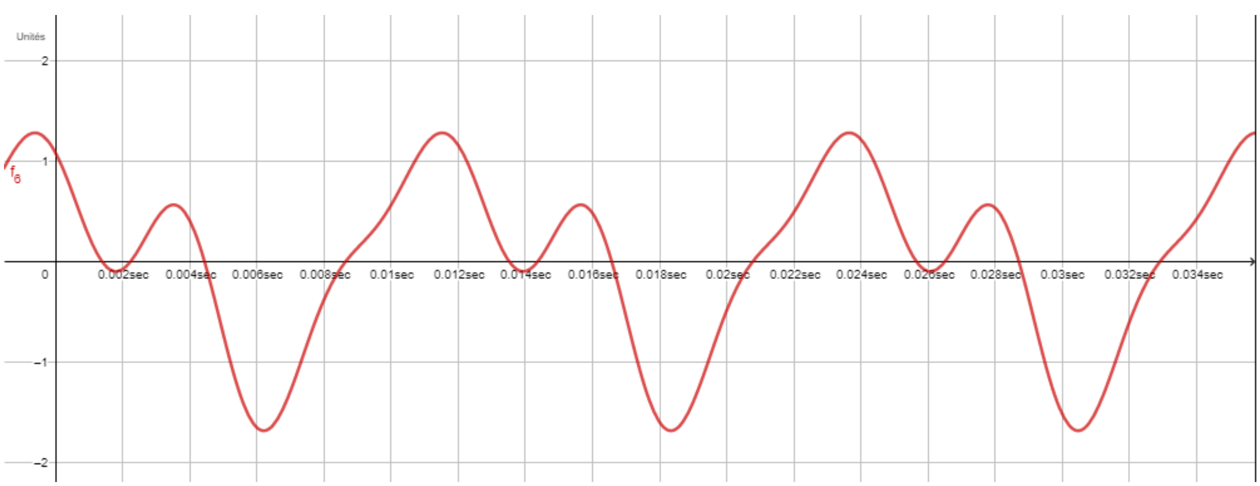
Quelle est la fonction mathématique d'une note fondamentale avec deux harmoniques[7] ?

Ouvrez le fichier *Son pur et son complexe*. Modifiez les caractéristiques de la note fondamentale et de ses harmoniques. Écrivez la fonction obtenue ainsi que les caractéristiques de son graphique

Exemple pour une note dont la fréquence est 82,4 Hz, la première harmonique deux fois la fréquence et la moitié de l'amplitude, la deuxième harmonique, trois fois la fréquence et 40% de l'amplitude.La première harmonique a un décalage de 0,01 sec et la deuxième, de 0,02 sec. (Corriger selon les valeurs posées par l'adulte).

Calcul de b : $b = 2 \times \pi \times 82{,}4; \quad b \cong 518$

$$f(x) = \cos(518x) + 0{,}5\cos\big(2 \times 518(x - 0{,}01)\big) + 0{,}4\cos\big(3 \times 518(x - 0{,}02)\big)$$



[7] Prenez la note de votre choix.

Tâche 3 : étude de la hauteur du son

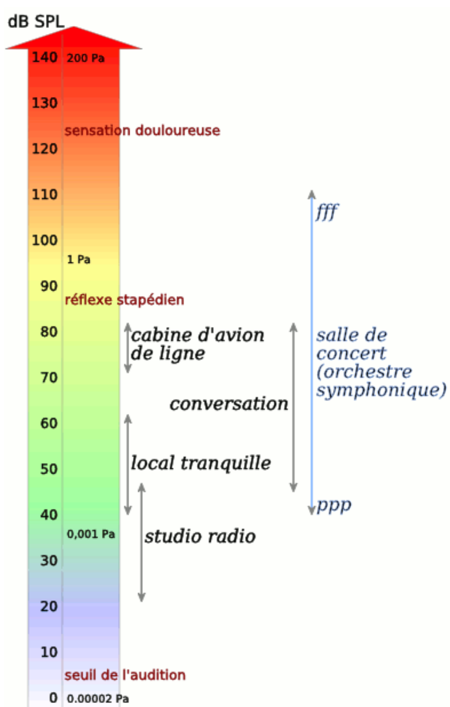
Lorsqu'un guitariste joue seul, le son de sa guitare n'est pas très fort. La force du son est mesurée par le décibel (dB). Le décibel (un dixième de bel) se calcule à partir de l'intensité du son capté par l'oreille. Des instruments de mesure et des applications permettent de mesurer le nombre de décibels émis par une source sonore.

Partie pratique

À l'aide d'un instrument de mesure ou une application, mesurez approximativement la hauteur du son (en décibel) lorsqu'on joue de la guitare classique. Si vous ne savez pas jouer de la guitare et n'avez pas de guitariste sous la main, jouez la sixième corde à vide. Quelle mesure obteniez-vous? ***Réponse variable, devrait être environ 70 dB selon la force de la guitare et du guitariste ainsi que de la distance à laquelle est prise la mesure..***

Avant de poursuivre, visionnez la troisième capsule vidéo.

Partie théorique



Le nombre de décibels émis par une source sonore se calcule par la fonction suivante : $f(x) = 10 \times log_{10}(P)$, où $P = \frac{P_1}{P_0}$, soit le rapport entre l'intensité du son émis et l'intensité du seuil sonore. On fait généralement correspondre l'échelle de décibels à des sources sonores ou à des niveaux de perceptions tel que montré sur l'image[8].

[8] Source de l'image : https://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Sound_levels.png, 8 juin 2018

La fonction logarithmique est de la forme $f(x) = a \times \log_c \left(b\left(x-h\right)\right) + k$

Ouvrez l'activité *Fonction logarithmique* et complétez les propriétés de la fonction logarithmique en manipulant les paramètres *a*, *b*, *c*, *h* et *k*.

Lorsque *a* et *b* sont de même signe, pour quelle condition la fonction sera :

croissante	***c<1***
décroissante	***0<c<1***

Pour quelle valeur de *b* le domaine est

$]-\propto, h[$	***b<0***
$]h, +\propto[$	***b>0***

L'asymptote est donnée par l'équation : $x =$ _***h***_______________

Pour la fonction, $f(x) = 2\log_{10}\left(\frac{1}{2}(x-1)\right)$ donnez :

l'asymptote	$x = h;\ x = 1$
le domaine	$]h, \propto[;\ ]1, \propto[$
le codomaine	$\mathbb{R}$
le zéro de la fonction	$\frac{1}{2}(x-1) = 1;\ x = 3$
l'ordonnée à l'origine	Aucun
le signe	négative pour $]1, 3[$ et positive pour $]3, \propto[$
l'intervalle de croissance	$]1, \propto[$
l'intervalle de décroissance	Aucun

Donnez une fonction qui a les caractéristiques suivantes :

l'asymptote	$x=-2$
le domaine	$]-\propto,-2[$
le codomaine	$\mathbb{R}$
le zéro de la fonction	$x\cong-4{,}01$
l'ordonnée à l'origine	$y\cong-1{,}21$
le signe	positive pour $]-\propto,-1{,}21[$ et négative pour $]-1{,}21,\propto[$
l'intervalle de croissance	Aucun
l'intervalle de décroissance	$]-1{,}21,\propto[$

$$h=-2$$

$$f(x)=-10\log_{10}(x+2)-1$$

RAPPEL DES LOIS DES LOGARITHMES[9]

1. $log_c 1 = 0$
2. $log_c c = 1$
3. $log_c c^n = n$
4. $log_c(M \times N) = log_c M + log_c N$
5. $log_c \frac{M}{N} = log_c M - log_c N$
6. $log_{\frac{1}{c}} M = -log_c M$
7. $log_c M^n = n log_c M$
8. $log_c M = \frac{log_a M}{log_a c}$

[9] Source : http://www.alloprof.qc.ca/BV/pages/m1500.aspx

SITUATION À RÉSOUDRE

Combien de décibels de plus émettront deux guitaristes par rapport à un seul ? Et combien de décibels pourrions-nous mesurer avec un orchestre de vingt guitaristes ?

Ouvrez l'activité *Les décibels*. Modifiez le nombre de guitaristes à l'aide du curseur. Démontrez vos résultats par calcul.

Fonction pour un guitariste qui émet 70 décibels : $f(x) = 10 \times log_{10}(\mathrm{P})$

Fonction pour deux guitaristes : $f(x) = 10 \times log_{10}(2 \times \mathrm{P})$

Selon la loi des log, $log(m * n) = log(m) + log(n)$ ***donc***

$10\, log_{10}(2P) = 10\, log_{10}(2) + 10\, log_{10}(P)$. $10\, log_{10}(P) = 70$ ***et*** $10\, log_{10}(2) \cong 3$***.***

Alors deux guitaristes émettront environ 3 décibels de plus soit 73 décibels.

Même démarche pour 20 guitaristes, le nombre de décibels de plus sera d'environ 13 dB et ce, peu importe le nombre de décibels émis par un seul guitariste.

En conclusion

En introduction de cette situation d'apprentissage, vous aviez les questions suivantes :

Quels principes sous-tendent la conception d'une guitare ? Quelle est la relation entre la musique et les mathématiques ?

La fabrication d'une guitare fait appel au modèle ***exponentiel***, afin de placer les frettes à la bonne distance.

Le son émis peut être décrit par une somme de fonctions ***cosinus*** (accepter ***périodique*** ou ***trigonométrique***).

On calcule la force de l'émission d'un son selon un modèle ***logarithmique***.

En espérant que maintenant, vous porterez un regard nouveau sur la guitare et sur le lien entre la musique et les mathématiques.

Grille d'observation

CONCEPTS ABORDÉES DANS CHACUNE DES TÂCHES

Tâche 1	Tâche 2	Tâche 3
Fonctions exponentielle et rationnelle ; Tableaux de données ; Représentations graphiques ; Modèle le plus représentatif de la courbe ; Modèle fonctionnel correspondant à la courbe.	Caractéristiques d'une fonction périodique; Fonctions trigonométriques (sinus, cosinus et tangente) ; Fonction complexe formée de la somme de plusieurs fonction cosinus.	Fonction logarithmique; Propriétés des logarithmes.

Les tableaux des pages suivantes concernent l'évalution de compétences lors de la résolution des situations à la fin de chaque tâche.

Compétence 1 : Utiliser des stratégies de résolutions de situation problème

1.1 Manifestation d'une compréhension adéquate de la situation problème

Tâche 1	**Tâche 2**	**Tâche 3**	**Rétroaction**
L'adulte • comprend qu'il doit se référer à la relation entre la position des frettes et leur distance entre les sillets ; • établit une longueur initiale pour sa guitare ; • fait le lien entre le graphique, le paramètre et la situation.	L'adulte • comprend qu'il doit repérer les caractéristiques de la fonction sur l'onde sonore ; • fait le lien entre la fréquence d'une note et la période de la fonction; • fait le lien entre le décalage de l'émission de l'harmonique et le déplacement horizontal de la fonction; • utilise les caractéristiques de la fonction cosinus pour modifier les harmoniques.	L'adulte • fait le lien entre le nombre de guitariste et le paramètre *b* de la fonction; • sait qu'il doit utiliser la loi des log pour résoudre la situation.	Amener l'adulte à reformuler l'énoncé dans ses mots ; verbaliser ses interrogations; faire un graphique ; représenter la situation par un dessin ou un schéma ; revoir une situation problème offrant un défi semblable ; se mettre en contexte; établir une hypothèse; observer le rôle des paramètres dans les fonctions de la partie théorique et transférer avec la partie appliquée.

1.2 Mobilisation de stratégies et de savoirs mathématiques appropriés à la situation problème

Tâche 1	**Tâche 2**	**Tâche 3**	**Rétroaction**
L'adulte • planifie les opérations à faire ; • détermine une longueur pour le manche de sa mini-guitare; • représente la situation par un plan ou un schéma ; • recourt aux modèles des fonctions exponentielles et rationnelles ; • travaille en équipe et verbalise sa démarche.	L'adulte • planifie les opérations à faire ; • détermine une fréquence pour la fondamentale et les paramètres des harmoniques; • recourt aux modèles des fonctions trigonométriques ; • Observe l'effet de la variation des paramètres sur le graphique; • Compare le graphique théorique avec le celui résultant de l'enregistrement; • explore différents sons avec le logiciel et compare les graphiques obtenus.	L'adulte • planifie les opérations à faire ; • observe l'effet de la variation du paramètre sur le graphique ; • fait plusieurs simulation; • recourt au modèle de la fonction logarithmique; • utilise les lois des logarithmes.	Amener l'adulte à diviser la situation en sous-problème ; revoir les concepts et les savoirs du cours ou pouvant servir à la résolution ; explorer différentes situations ; faire une simulation graphique ; s'imaginer expliquer ce qu'on doit faire à un ami qui ne connait pas bien les concepts ; anticiper les résultats; planifier les étapes qu'il aura à faire avant de commencer.

Compétence 2 : Déployer un raisonnement mathématique

2.1 Utilisation correcte des concepts et des processus mathématiques appropriés

Tâche 1	Tâche 2	Tâche 3	Rétroaction
L'adulte • obtient les résultats cohérents en fonction de la longueur déterminée du manche de la guitare; • démontre ses résultats par l'utilisation du rapport de mesure entre les frettes (division par $\sqrt[12]{2}$).	L'adulte • obtient les résultats cohérents en fonction de la fréquence et des caractéristiques qu'il a déterminées pour les harmoniques; • démontre son résultat en expliquant la valeur de chaque paramètre dans la fonction; • fait le lien avec les caractéristiques du graphique obtenu.	L'adulte • obtient des résultats justes en fonction des valeurs qu'il a choisies ; • démontre ses résultats avec la loi des logarithme; • trouve que doubler la hauteur d'un son ajoute environ 3 décibels ($10\times\log_{10}2$) et que multiplier le son par 20 ajoute environ 13 décibels ($10\times\log_{10}20$) et que ce nombre s'ajoute à la mesure initiale et ce, peut importe la valeur initiale.	Amener l'adulte à sortir du contexte et prendre le problème en terme mathématique ; prendre le temps de bien faire les calculs ; valider quelques résultats ; vérifier la plausibilité des résultats avec le graphique et avec ce qu'il avait anticipé ; valider certains résultats en utilisant deux façons de les calculer ; valider avec GeoGebra.

2.2 Mise en œuvre convenable d'un raisonnement mathématique adapté à la situation

Tâche 1	**Tâche 2**	**Tâche 3**	**Rétroaction**
L'adulte • applique le modèle de la fonction rationnelle en faisant le lien entre les paramètres et la longueur de la distance où placer les frettes ; • présente une conclusion cohérente avec les résultats obtenus.	L'adulte • applique le modèle de la fonction cosinus en faisant le lien entre les paramètres de la fonction et les caractéristiques de la note et de ses harmoniques; • présente une conclusion cohérente avec les résultats obtenus.	L'adulte • applique le modèle de la fonction logarithmique en faisant le lien entre les paramètres de la fonction et les caractéristiques de l'intensité du son; • présente une conclusion cohérente avec les résultats obtenus.	Amener l'adulte à revenir au contexte; relire la question afin de voir si les résultats sont cohérents et si on a répondu à toutes les questions; confirmer les calculs avec la représentation graphique sur le livret GeoGebra; revoir chaque étape pour s'assurer de la fluidité du raisonnement.

2.3 Structuration adéquate des étapes d'une démarche pertinente

Tâche 1	Tâche 2	Tâche 3	Rétroaction
• présente une démarche claire en nommant les étapes ; • identifie chacun des calculs des éléments ; • respecte les normes d'écriture des modèles de fonctions ; • inscrit les unités de mesure et elles sont exactes; • présente ses résultats finaux de façon claire.	• présente une démarche claire en nommant les étapes ; • identifie chacun des calculs des éléments ; • respecte les normes d'écriture des modèles de fonctions ; • inscrit les unités de mesure et elles sont exactes ; • présente ses résultats finaux de façon claire.	• présente une démarche claire ; • identifie chacun des calculs des éléments ; • respecte les normes d'écriture des fonctions ; • inscrit les unités de mesure et elles sont exactes ; • présente ses résultats finaux de façon claire.	Amener l'adulte à vérifier les unités pour chaque réponse et sous-réponse ; mettre les étapes et les réponses en évidence ; se mettre dans la peau d'un lecteur qui ne connait pas bien les concepts, prendre du recul ; valider avec GeoGebra.

Sources et références

Quelques ressources Internet

Vous retrouverez ces liens dans le livret GeoGebra. Tous les liens ont été consultés entre janvier et juin 2018.

Sites utiles pour les élèves

Allô Prof, https://www.alloprof.qc.ca/Pages/Accueil.aspx

Couleur science, L'échelle des décibels, https://couleur-science.eu/?d=2014/08/07/18/30/15-lechelle-des-decibels

La perception sonore chez l'être humain, travaux pratiques sur le son : http://perceptionsonoretpe.free.fr/I-1.html,.

Tableau des fréquences en format PDF, https://www.deleze.name/marcel/physique/musique/Frequences.pdf

TPE 1s Saint-Michel : Le son, site plutôt complet, https://sites.google.com/site/tpe1ssaintmichelleson/home

Vidéos

Le logarithme et l'audition (28:07), https://youtu.be/Y-x_LiE6jzQ

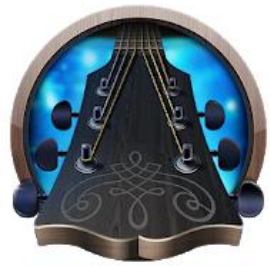
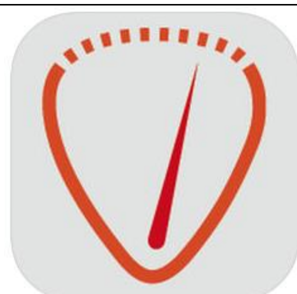
Les mathématiques et la musique (24:31), https://youtu.be/cTYvCpLRwao

Micmaths, Merveilleux logarithmes (15:12) https://youtu.be/rWfl7Pw8YVE

Son pur et son complexe (5:22) https://youtu.be/2328B6D5Joo

APPLICATIONS

À installer sur cellulaire ou tablette

Lien	Image	Détails
Accordeur Chromatique de Guitare et Basse Gratuit Google		Affiche la fréquence des notes.
Accordeur de Guitare Précis Apple		Affiche la fréquence des notes. Adapté pour le cellulaire.
Sonomètre : Sound Meter Google		Mesure les décibels, affiche les extrêmes ainsi que le type d'environnement. De plus, il est en français.
Décibel X – dBA sonomètre Apple		En plus de mesurer les décibels, l'application affiche le type d'environnement associé à ce niveau sonore.

Autres ressources consultées pour la conception de cette SA.

Caractéristiques des sons : https://www.maxicours.com/soutien-scolaire/physique/terminale-s/200131.html

CNED, Académie en ligne, Son et musique : http://www.academie-en-ligne.fr/ressources/7/sp03/al7sp03tepa0013-sequence-01.pdf

Des logarithmes aux décibels : http://www.epsic.ch/cours/electronique/techn99/acous/AQDBLOG.html

Échelle et somme de sons : https://fr.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9cibel

Échelle logarithmique de la longueur d'un tuyau d'orgue et la note : https://fr.wikipedia.org/wiki/Hauteur_%28musique%29

L'hamonique : https://fr.wikipedia.org/wiki/Harmonique_(musique)

Le hertz : https://fr.wikipedia.org/wiki/Hertz

Les sons purs et les sons complexes : https://tpeinfluancemusique.webnode.fr/le-son2/les-sons-purs/

Notes de musique : https://www.sonelec-musique.com/electronique_bases_notes_musique.html

Onde sonore : https://fr.wikipedia.org/wiki/Son_(physique)

Pallascio, Richard et Doddridge, Éric,(2006) *Montrez cette mathématique que je ne saurais voir*, Éditions Nouvelles, 193 pages, Chapitre 1, Maths et musique : quels rapport, France Caron (ISBN-10 : 978-2-923446-02-8) http://editionsnouvelles.blogspot.com/2011/03/montrez-cette-mathematique-que-je-ne.html#links

Sons graves, sons aigus : hauteur et fréquence : http://www.spirit-science.fr/doc_musique/Sensation-sonore.html calcul de la différence entre deux tonalités avec les log. Perception de l’oreille humaine.

Tpe sur l’acoustique, l’audition et la cymatique niveau 1°S : http://tpe-audition-acoustique-cymatique.e-monsite.com/pages/a-les-caracteristiques-physiques-d-une-onde-sonore.html

Tableau des fréquences

		Fréquence (Hertz)					
Frette	Longueur (cm)	6ième	5ième	4ième	3ième	2ième	1ière
0	65,0	81,4	110,0	146,8	196,0	246,9	329,6
1	61,4	87,3	116,5	155,6	207,7	261,6	349,2
2	57,9	92,5	123,5	164,8	220,0	277,2	370,0
3	54,7	98,0	130,8	174,6	233,1	293,7	392,0
4	51,6	103,8	138,6	185,0	246,9	311,1	415,3
5	48,7	110,0	146,8	196,0	261,6	329,6	440,0
6	46,0	116,5	155,6	207,7	277,2	349,2	466,2
7	43,4	123,5	164,8	220,0	293,7	370,0	493,9
8	40,9	130,8	174,6	233,1	311,1	392,0	523,3
9	38,6	138,6	185,0	246,9	329,6	415,3	554,4
10	36,5	146,8	196,0	261,6	349,2	440,0	587,3
11	34,4	155,6	207,7	277,2	370,0	466,2	622,3
12	32,5	164,8	220,0	293,7	392,0	493,9	659,3
13	30,7	174,6	233,1	311,1	415,3	523,3	698,5
14	29,0	185,0	246,9	329,6	440,0	554,4	740,0
15	27,3	196,0	261,6	349,2	466,2	587,3	784,0