6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Für die Leistungen werden entsprechend der konkreten Lösungsqualität Punkte im vorgegebenen Rahmen vergeben. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung"). Es dürfen nur ganzzahlige Punkte vergeben werden.

Aufgabe 3:

Modelllösung a)

(1) $x \cdot (x-3)^2 = x \cdot (x^2 - 6 \cdot x + 9) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x.$

(2) Aus der Darstellungsform D1 kann man direkt die Gleichung der Ableitungsfunktion bestimmen.

Aus der Darstellungsform D2 kann man unmittelbar die Nullstellen ablesen.

Modelllösung b)

$f'(x) = 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 9$, $f''(x) = 6 \cdot x - 12$.

Aus der notwendigen Bedingung $f'(x) = 0$ für lokale Extremstellen ergibt sich $x^2 - 4 \cdot x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{2^2 - 3} = 1 \vee x = 2 + \sqrt{2^2 - 3} = 3$.

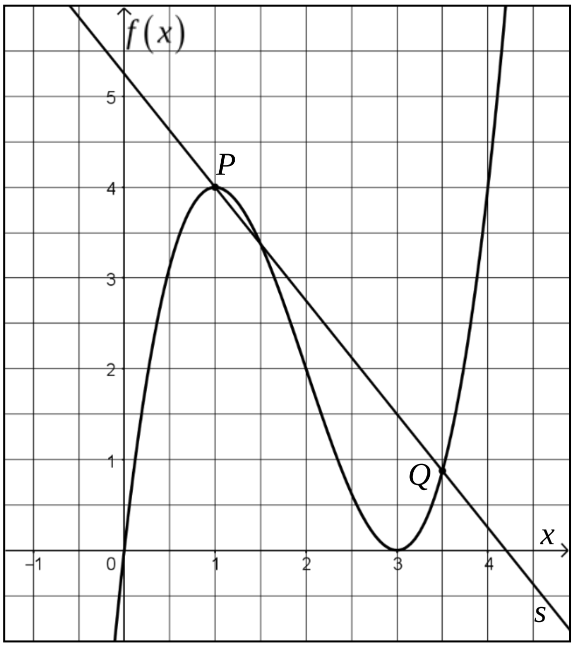
Zusätzlich gilt: $f''(1) = -6 < 0$ und $f''(3) = 6 > 0$. Daher ist 1 die lokale Maximalstelle und 3 die lokale Minimalstelle von f.

Mit $f(1) = 4$ und $f(3) = 0$ folgt, dass $H(1 \mid 4)$ der lokale Hochpunkt und $T(3 \mid 0)$ der lokale Tiefpunkt des Graphen von f ist.

[Hinweis: Eine Argumentation an Graphen ist aufgrund des Operatorzusatzes „rechnerisch" nicht zulässig.]

Modelllösung c)

(1)



Ansatz: $s: y = m \cdot x + b$.

$$m = \frac{0{,}875 - 4}{3{,}5 - 1} = -\frac{5}{4}.$$

Einsetzen der Koordinaten von P in $y = m \cdot x + b$ liefert:

$$4 = -\frac{5}{4} \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = 5\frac{1}{4}.$$

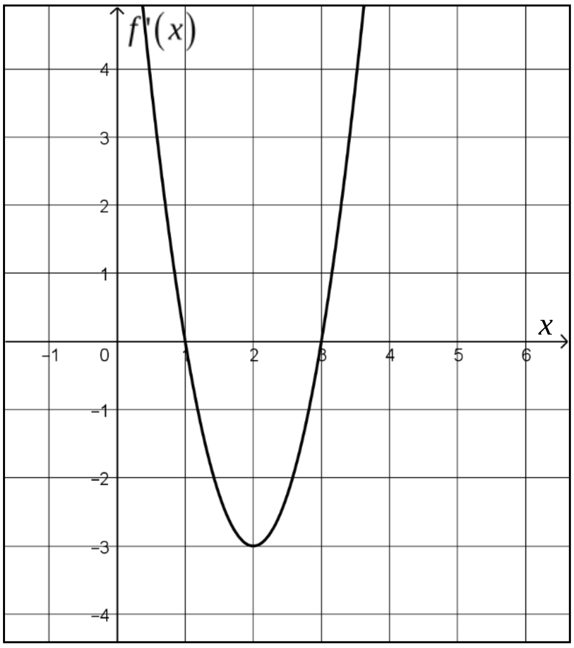
Gleichung der Sekante $s: y = -\frac{5}{4} \cdot x + 5\frac{1}{4}$.

(2) $\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right) + 180° \approx 128{,}66°$.

[Die Angabe $\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right) \approx -51{,}34°$ ist ebenfalls zulässig.]

Modelllösung d)

(1)

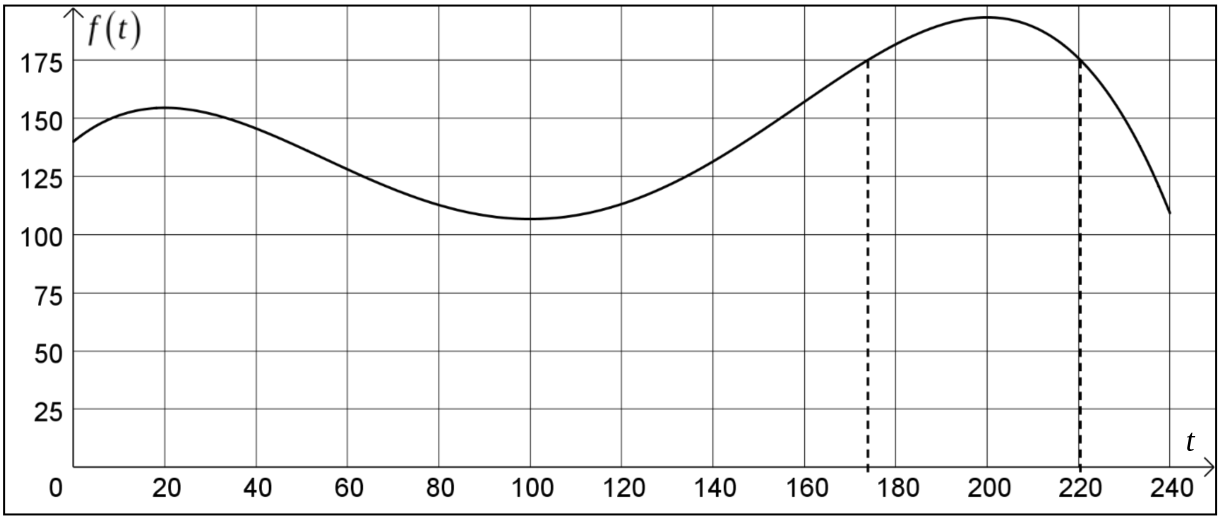


[Hinweis: Zur Ermittlung von Funktionswerten bietet es sich an, eine Wertetabelle mit dem WTR zu erzeugen.]

(2) Der Graph von g' geht durch eine Verschiebung um 4 Einheiten nach oben aus dem Graphen von f' hervor. Der Graph von g' hat damit keine Nullstelle, also kann der Graph von g keinen lokalen Extrempunkt besitzen.

Aufgabe 4:

Modelllösung a)



Der Graph von f verläuft ungefähr im Intervall $[175;220]$ oberhalb von $y = 175$.

Es liegen ungefähr 45 Minuten lang Blutzuckerwerte über $175\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ vor.

Modelllösung b)

Das absolute Maximum von f kann nur an einer Nullstelle von f' oder an einer Randstelle auftreten.

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{250\,000} \cdot (t-20) \cdot \left(t^2 - 300 \cdot t + 20\,000\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow t - 20 = 0 \vee t^2 - 300 \cdot t + 20\,000 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 20 \vee t = 150 - \sqrt{150^2 - 20\,000} = 100 \vee t = 150 + \sqrt{150^2 - 20\,000} = 200.$$

Zusätzlich gilt:

$f(180) \approx 181{,}8$, $f(200) \approx 193{,}3$ und $f(240) \approx 109{,}3$.

[Hinweis: Zur Ermittlung der Funktionswerte bietet es sich an, eine Wertetabelle mit dem WTR zu erzeugen.]

Der größte Blutzuckerwert im Zeitraum von 180 Minuten bis 240 Minuten nach Beobachtungsbeginn beträgt ungefähr $193{,}3\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$.

[Hinweis: In der zugehörigen Aufgabenstellung bezieht sich der Operatorzusatz „rechnerisch“ auf die gesamte Untersuchung (hier: Lage und Art der Extremstellen). Eine Argumentation an Graphen ist daher nicht zulässig.]

Modelllösung c)

(1) Eine passende Aufgabenstellung ist:

Ermitteln Sie die Zeitpunkte im Beobachtungszeitraum, zu denen die Blutzuckerwerte am schnellsten steigen bzw. fallen.

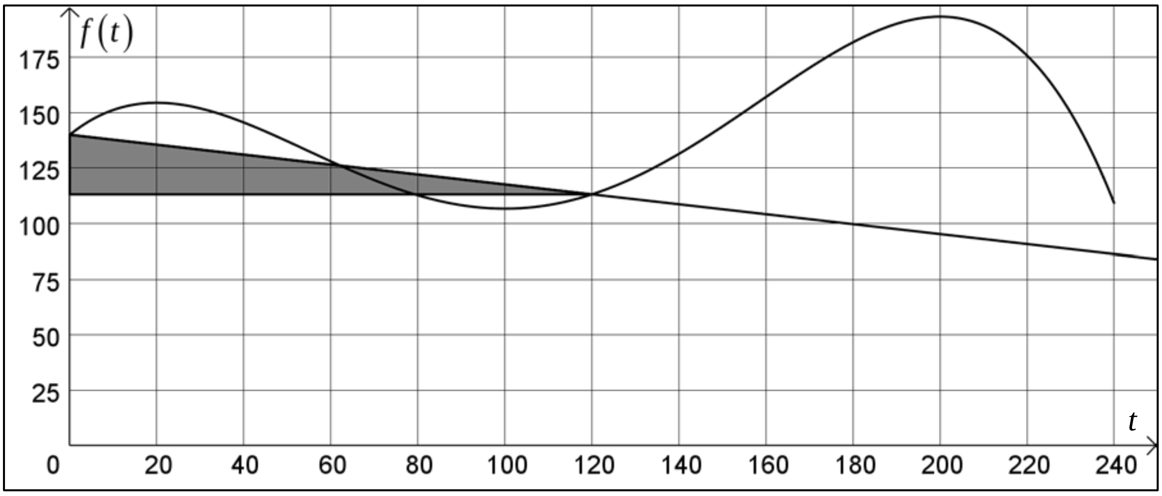
(2) Die absoluten Extremstellen der Änderungsrate f' des Blutzuckerwertes können nur die Nullstellen von f'' oder die Randstellen sein. Der Vergleich der Funktionswerte von f' an diesen Stellen liefert die absoluten Extremstellen von f'.

(3) Zu Beobachtungsbeginn steigt der Blutzuckerwert am schnellsten, am Ende des Beobachtungszeitraums fällt der Blutzuckerwert am schnellsten.

Modelllösung d)

(1) Geometrische Bedeutung von Term I: Steigung der Sekante durch die beiden Punkte $\left(0\,|\,f(0)\right)$ und $\left(120\,|\,f(120)\right)$ des Graphen von f.

Geometrische Bedeutung von Term II: Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $\left(120\,|\,f(120)\right)$.



(2) Bedeutung der berechneten Werte im Sachzusammenhang:

I: Während der ersten 120 Minuten nach Beobachtungsbeginn nimmt der Blutzuckerwert pro Minute durchschnittlich um $0{,}224\,\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ ab.

II: 120 Minuten nach Beobachtungsbeginn nimmt der Blutzuckerwert mit der momentanen Rate von $0{,}64\,\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ pro Minute zu.