Tajů-plné příklady

Geometrická řada

Žán Pól Kastról

23. ledna 2022

Obsah

1 Zadání příkladů

Zadání cv. 1: Hadí oči v moči

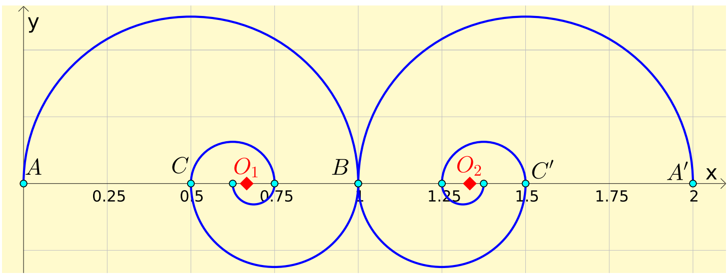
Řešení ⇒

V obrázku jsou naznačeny počátky dvou nekonečných spirál, které jsou tvořeny posloupností na sebe navazujících, postupně se zmenšujících půlkružnic.

Levá spirála začíná půlkružnicí nad průměrem AB, další půlkružnice je nad průměrem BC a tak dále, až do nekonečna. Koncový bod spirály leží po nekonečně mnoha iteracích v hadím oku O_1.

Pravá spirála je tvořena analogicky a končí v hadím oku O_2. Poloha jednotlivých bodů na ose x je patrná z obrázku. Urči

a) Jak dlouhé jsou spirály?
b) Urči polohu hadích očí O_1, O_2 na ose x.
c) Vysvětli název tohoto příkladu.



Zadání cv. 2: Hranatá spirála a Magické Voko

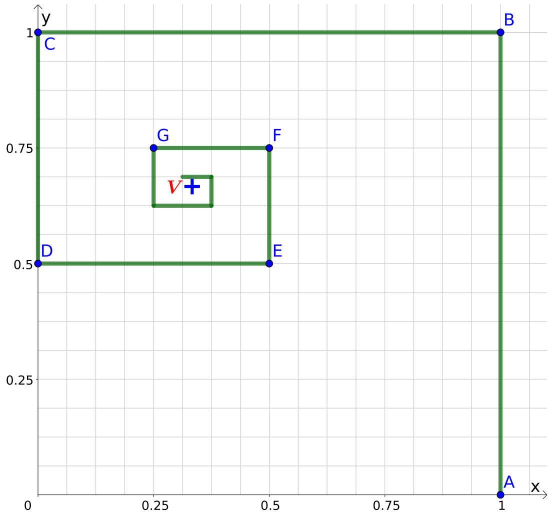
Řešení ⇒

V obrázku je naznačena konstrukce **nekonečné spirály** tvořené vždy dvojicemi kolmých úseček ($AB, BC \to CD, DE \to EF, FG$

atd.), které se postupně zmenšují v poměru patrném z obrázku. Spirála se zavíjí do **Magického Voka** V.

a) Urči délku celé spirály.

b) Urči souřadnice **Magického Voka** V.



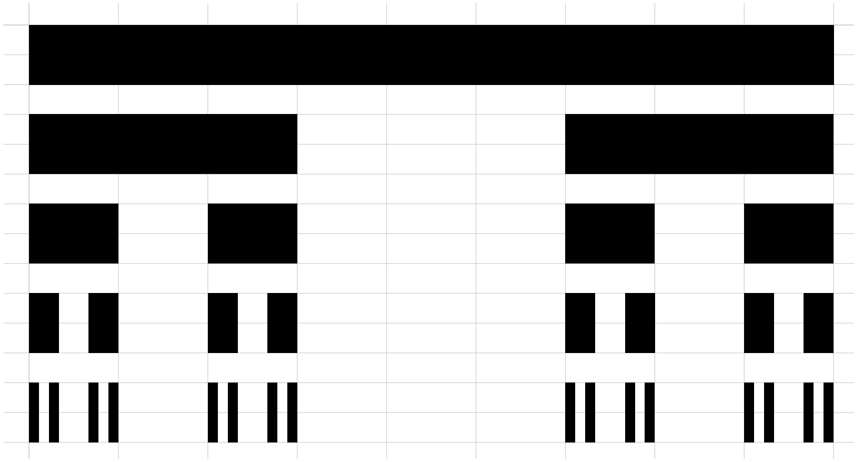
Zadání cv. 3: Cantorovo diskontinuum

Řešení ⇒

Urči délku Cantorova diskontinua.

https://cs.wikipedia.org/wiki/Cantorovo_diskontinuum

https://www.matfyz.cz/clanky/matykani-xiv-cantorovo-monstrum

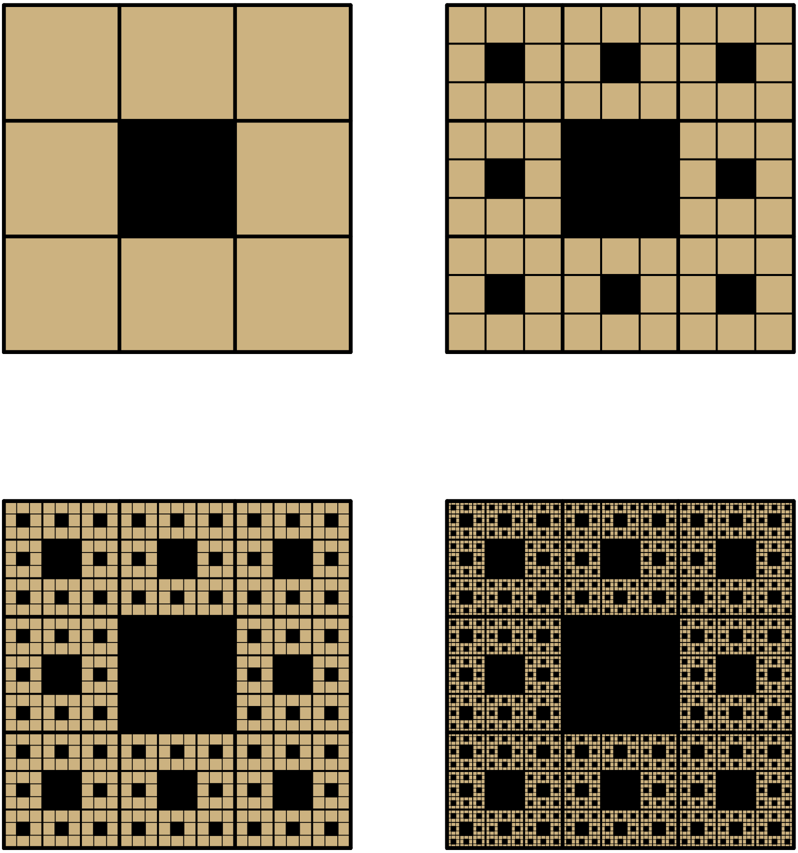


Zadání cv. 4: Sierpińského koberec

Řešení ⇒

Uvažujte tzv. „**Sierpińského koberec**“ (https://en.wikipedia.org/wiki/Sierpi%C5%84ski_carpet), který vznikne tak, že čtverec se stranou o délce jedné jednotky rozdělíme na 9 stejných čtverců, z nichž ten uprostřed odstraníme, a tento proces aplikujeme opakovaně na každý dílčí čtverec až „do nekonečna“. Viz obrázek, na kterém je zobrazeno několik prvních kroků (černě vyznačené části jsou odstraněny).

Jaký je obsah vzniklého Sierpińského koberce?



Obr. 2:

https://www.geogebra.org/m/jx5u7yvn

Zadání cv. 5: Pěkná rovnice — Řešení ⇒

Řešte v $\mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-2x)^k = 4x-2$$

Zadání cv. 6: Kochova vločka — Řešení ⇒

Urči obsah a obvod Kochovy vločky (pro n jdoucí do nekonečna):

https://www.geogebra.org/m/bpbvusfg.

https://en.wikipedia.org/wiki/Koch_snowflake.

Zadání cv. 7: Zjednodušte — Řešení ⇒

Zjednodušte vejraz:

$$2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\sqrt[16]{2}\cdot\ldots$$

Zadání cv. 8: Vyřešte rovnici — Řešení ⇒

$\ln x + \ln\sqrt[3]{x} + \ln\sqrt[9]{x} + \ln\sqrt[27]{x} + \cdots = \frac{3}{2}$.

2 Výsledky a řešení

Řešba cv. 1: Hadí oči v moči

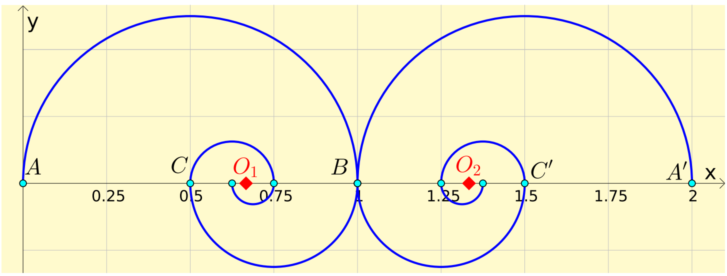
Zadání ⇒

V obrázku jsou naznačeny počátky dvou nekonečných spirál, které jsou tvořeny posloupností na sebe navazujících, postupně se zmenšujících půlkružnic.

Levá spirála začíná půlkružnicí nad průměrem AB, další půlkružnice je nad průměrem BC a tak dále, až do nekonečna. Koncový bod spirály leží po nekonečně mnoha iteracích v hadím oku O_1.

Pravá spirála je tvořena analogicky a končí v hadím oku O_2. Poloha jednotlivých bodů na ose x je patrná z obrázku. Urči

a) Jak dlouhé jsou spirály?
b) Urči polohu hadích očí O_1, O_2 na ose x.
c) Vysvětli název tohoto příkladu.



Výsledek:

a) $p = \pi$ b) $x_1 = \dfrac{2}{3}$ $x_2 = \dfrac{4}{3}$ c) viz Řešení níže

Řešení:

a) Sčítáme délky půlkružnic:

$$\begin{aligned} p &= p_1 + p_2 + p_3 + \dots \\ p &= \pi r_1 + \pi r_2 + \pi r_3 + \dots \\ p &= \pi(r_1 + r_2 + r_3 + \dots) \\ p &= \pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) \end{aligned}$$

Řadu v závoře důvěrně známe z proslulého vtipu[a], takže víme, že její součet je **jedna** ($\mathcal{HPB}$).

Délka každé spirály je tedy

$$\boxed{p = \pi}$$

To je mjéždupróčem také délka kružnice nad průměrem AB. Není to fascinující?!?

b) Představíme si, že děláme kroky po ose x z bodu A přes B do C a tak dále, každý krok vždy končí v koncovém bodě dané půlkružnice.

Po nekonečně mnoha krocích dorazíme do hadího oka O_1. Pro jeho $x-$ovou souřadnici bude zřejmě platit:

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots$$

Máme nekonečnou **GŘ** s prvním členem $a_1 = 1$ a a kvocíkem $q = -\frac{1}{2}$, takže ji můžeme sečíst (je splněna podmínka $|q| < 1$) a dostáváme

$$x_1 = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Vzhledem k symetrii zřejmě platí pro souřadnici druhého oka

$$x_2 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Hadí oči v moči mají souřadnice

$$\boxed{x_1 = \frac{2}{3} \qquad x_2 = \frac{4}{3}}$$

Oči tedy dělí úsečku AA' pěkně na třetiny!

c) *Hadí oči v hadí moči* je oblíbená specialita, kterou v nuselské restauraci u Bansethů vyžadoval stálý návštěvník Jaroslav Hašek (viz obr. níže). Jedná se o oči Krajty Obrovské, které se nakládají do směsi krajtí moči a osmdesáti procentního lihu.

Obr. 3

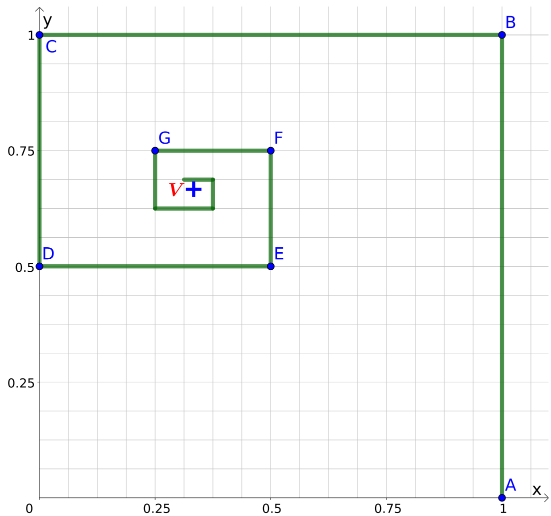
[a]Přijde do hospody nekonečně mnoho MATFYZÁKŮ a začnou si u hostinského postupně objednávat. První si dá půl piva, druhý čtvrt piva, třetí osminu piva atd. Hostinský povídá: „Vy jste ale volové“ a natočí jim jedno pivo.

Řešba cv. 2: Hranatá spirála a Magické Voko Zadání ⇒

V obrázku je naznačena konstrukce **nekonečné spirály** tvořené vždy dvojicemi kolmých úseček ($AB, BC \to CD, DE \to EF, FG$ atd.), které se postupně zmenšují v poměru patrném z obrázku. Spirála se zavíjí do **Magického Voka** V.

a) Urči délku celé spirály.

b) Urči souřadnice **Magického Voka** V.



Výsledek:

a) Délka nekonečné spirály je 4.

b) Magické Voko je $V = \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$

Řešení:

a) Součet zřejmě bude:

$$(1+1)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)+\dots$$

Neboli

$$2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$$

Od třetího členu řady dostáváme naši hospodskou řadu $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\dots=1$, takže bez dalšího počítání dostáváme součet

$$2+1+1=\boxed{4}$$

b) Podobně jako v předchozím příkladu „Hadí oči v moči" si představíme jednotlivé kroky, ovšem zvlášť ve směru osy x a zvlášť ve směru osy y.

Osa x: Jdeme z A $(x=1)$ do B. Zde se x nemění, ale z B do C se posunume doleva, takže x se zmenší o 1. A tak dále, dostáváme:

$$x_V=1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\dots$$

Tedy

$$x_V=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$$

Takže máme **GŘ** s prvním členem a kvocíkem

$$a_1=\frac{1}{2};\qquad q=-\frac{1}{2}$$

tedy

$$x_V=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Osa y: Analogicky dostáváme:

$$y_V = 0 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \ldots = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \ldots$$

Tedy

$$y_V = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

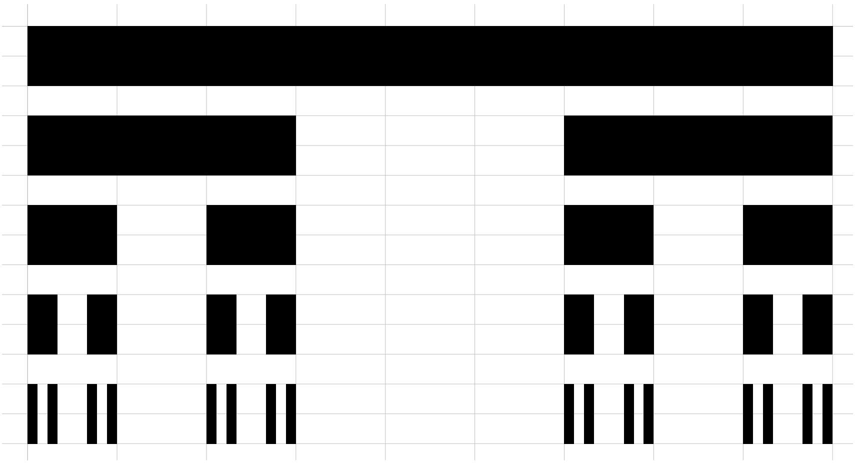
Takže **Magické Voko** má souřadnice

$$\boxed{V = \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]}$$

Řešba cv. 3: Cantorovo diskontinuum

Zadání ⇒

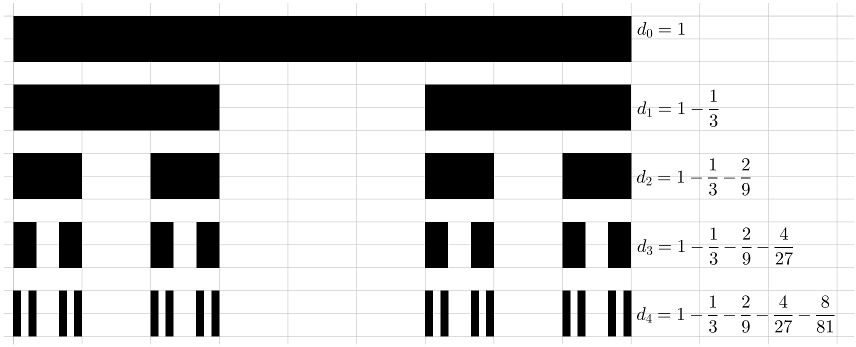
Urči délku Cantorova diskontinuaUrči délku Cantorova diskontinua.
https://cs.wikipedia.org/wiki/Cantorovo_diskontinuum
https://www.matfyz.cz/clanky/matykani-xiv-cantorovo-monstrum



Výsledek:

$d = 0$

Řešení:



Z obrázku vidíme, že

$$d_\infty = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} \cdots\right)$$

V závoře je **GŘ** s kvocíkem $q = \frac{2}{3}$, takže ji můžeme sečíst:

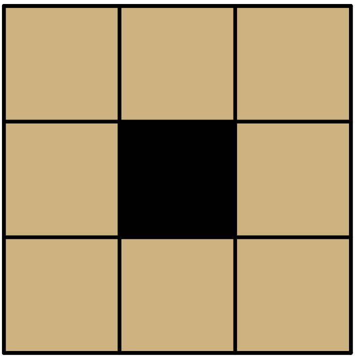
$$d_\infty = 1 - \left(\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}}\right) = 1 - 1 = \boxed{0}$$

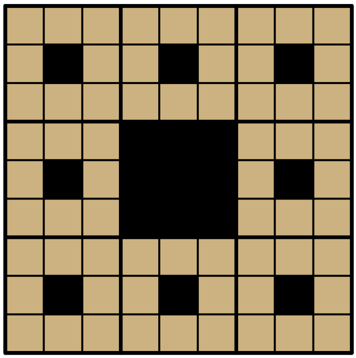
Řešba cv. 4: Sierpińského koberec

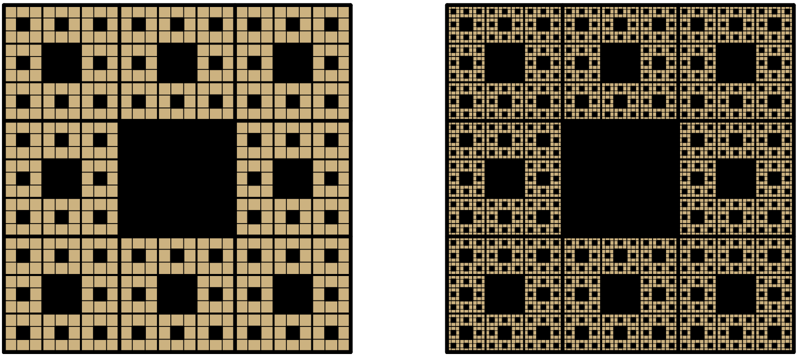
Zadání ⇒

Uvažujte tzv. „**Sierpińského koberec**“ (https://en.wikipedia.org/wiki/Sierpi%C5%84ski_carpet), který vznikne tak, že čtverec se stranou o délce jedné jednotky rozdělíme na 9 stejných čtverců, z nichž ten uprostřed odstraníme, a tento proces aplikujeme opakovaně na každý dílčí čtverec až „do nekonečna“. Viz obrázek, na kterém je zobrazeno několik prvních kroků (černě vyznačené části jsou odstraněny).

Jaký je obsah vzniklého Sierpińského koberce?







Obr. 5:

https://www.geogebra.org/m/jx5u7yvn

Výsledek:

$S = 0$

Řešení:

Každej Blbec vidí, že to je takto:

$$S = 1 - \frac{1}{9} - 8 \cdot \frac{1}{9^2} - 8^2 \cdot \frac{1}{9^3} \dots =$$
$$1 - \left(\frac{8^0}{9^1} + \frac{8^1}{9^2} + \frac{8^2}{9^3} + \dots \right)$$

Řadu v závoře sečteme:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{8}{9}} = 1$$

Takže dostáváme, že plocha toho Šerpiňskýho peršanu je

$$\boxed{S = 1 - 1 = 0}$$

Čili **PRD**!

Řešba cv. 5: Pěkná rovnice

Zadání ⇒

Řešte v $\mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-2x)^k = 4x-2$$

Výsledek:

$$\boxed{K = \left\{\frac{1}{2}\right\}}$$

Řešení:

Levá strana rovnice vypadá takto:

$$(1-2x)^1 + (1-2x)^2 + (1-2x)^3 + \ldots$$

Je to tedy nekonečná geometrická řada:

$$a_1 = (1-2x) \qquad ; \qquad q = (1-2x)$$

Aby šla řada sečíst, musí platit **podmínka** $|q| < 1$, tedy $|1-2x| < 1$. Tuto nerovnici vyřešíme a dostaneme definiční obor rovnice:

$$\begin{aligned}
&|1-2x| < 1 \\
&-1 < (1-2x) < 1 \\
&(-1 < 1-2x) \wedge (1-2x < 1) \\
&(x < 1) \wedge (x > 0) \\
&\underline{\underline{x \in (0;1)}} \qquad \text{(a)}
\end{aligned}$$

Rovnice má smysl tedy pouze v tomto intervalu. Za podmínky (a) lze tedy řadu sečíst:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1-2x}{1-(1-2x)} = \frac{1-2x}{2x}$$

Tento součet dosadíme do původní rovnice a rovnici vyřešíme:

$$\begin{aligned}
\frac{1-2x}{2x} &= 4x-2 \\
1-2x &= 2x(4x-2) \\
1-2x &= 8x^2-4x \\
8x^2-2x-1 &= 0 \\
D = 4+32 &= 36 \\
x_{1,2} &= \frac{2\pm 6}{16} \\
x_1 &= \frac{1}{2} \qquad \cancel{x_2 = -\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

Kořen x_2 nesplňuje podmínku (a), takže jsme ho vyškrtli.

$$\boxed{K = \left\{\frac{1}{2}\right\}}$$

Řešba cv. 6: Kochova vločka

Zadání ⇒

Urči obsah a obvod Kochovy vločky (pro n jdoucí do nekonečna):

https://www.geogebra.org/m/bpbvusfg.

https://en.wikipedia.org/wiki/Koch_snowflake.

Výsledek:

$$S_\infty = \frac{8}{5} S_1 = \frac{2\sqrt{3}}{5} a^2 \qquad o_\infty = \infty$$

Řešení obsahu:

- Obrázek (a) – původní zelený trojúhelník – bez újmy na obecnosti předpokládejme, že obsah je jednotkový.

$$S_1 = 1$$

- Obrázek (b) – přidáme 3 červené trojúhelníčky, které jsou devítinou původního zeleného.

$$S_2 = 3 \cdot \frac{1}{9}$$

- Obrázek (c) – přidáme přidáme $3 \cdot 4$ žlutých trojúhelníčků, které jsou devítinou červených.

$$S_3 = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = 3 \cdot \frac{4}{9^2}$$

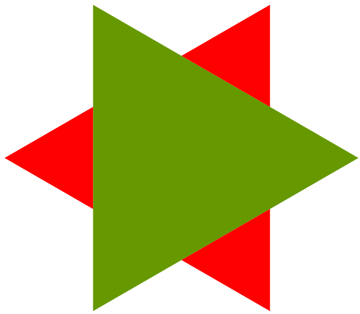
- Obrázek (d) – přidáme $3 \cdot 4 \cdot 4$ černých trojúhelníčků, které jsou devítinou žlutých.

$$S_4 = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = 3 \cdot \frac{4^2}{9^3}$$

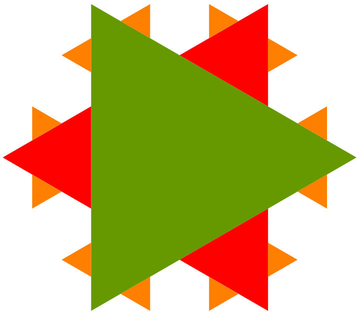
V limitě dostaneme součet

$$S_\infty = 1 + 3 \cdot \frac{4^0}{9} + 3 \cdot \frac{4^1}{9^2} + 3 \cdot \frac{4^2}{9^3} + \dots$$

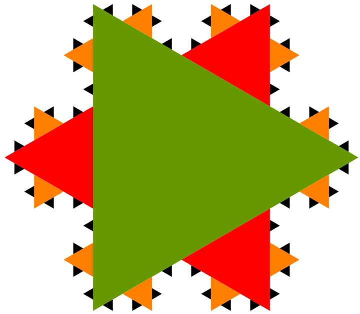
(a)



(b)



(c)



(d)

Vidíme, že se od **druhého** členu jedná o **geometrickou řadu** s kvocíkem $q = \frac{4}{9}$ a prvním členem $a_1 = \frac{1}{3}$. Pač $|q| < 1$, můžeme řadu sečíst:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{3}{5}$$

Pro celkový obsah Kochovy vločky tak dostáváme

$$S_\infty = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$$

Pokud obsah původního zeleného tr. nebude jednotkový a označíme jej S_1, dostáváme

$$\boxed{S_\infty = \frac{8}{5} S_1}$$

Přitom $S_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} a^2$, takže máme $S_\infty = \frac{8}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ a odtud

$$\boxed{S_\infty = \frac{2\sqrt{3}}{5} a^2}$$

Řešení obvodu:

Tak hele již u první iterace (přechod od obr.(a) k (b)) vidíme, že obvod se zvětší $\frac{4}{3}\times$. Jde tedy o geometrickou řadu s kvocíkem $q = \frac{4}{3}$, která není zřejmě konvergentní ($|q| > 1$) a pač první člen řady je kladný a kvocík též kladný, bude součet řady zřejmě ∞! Obvod Kochovy křivky je tedy nekonečný!

$$\boxed{o_\infty = \infty}$$

Řešba cv. 7: Zjednodušte **Zadání ⇒**

Zjednodušte vejraz:

$$2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[16]{2} \cdot \ldots$$

Výsledek:

4

Řešení:

$$2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[16]{2} \cdot \dots =$$

$$2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{8}} \cdot 2^{\frac{1}{16}} \cdot \dots =$$

$$2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\cdots} = 2^2 = \boxed{4}$$

Řešba cv. 8: Vyřešte rovnici

Zadání ⇒

$\ln x + \ln \sqrt[3]{x} + \ln \sqrt[9]{x} + \ln \sqrt[27]{x} + \cdots = \frac{3}{2}.$

Výsledek:

Obsah...

Řešení:

Def. obor rce je zřejmě $\mathbb{R}^+$. Upravíme levou stranu:

$$\begin{aligned}
&\ln x + \ln \sqrt[3]{x} + \ln \sqrt[9]{x} + \ln \sqrt[27]{x} + \cdots = \\
&\ln x + \frac{1}{3}\ln x + \frac{1}{9}\ln x + \frac{1}{27}\ln x + \cdots = \\
&\ln x \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots\right)
\end{aligned}$$

Řada v závoře má kvocík $q = \frac{1}{3}$ a první člen 1, takže součet je

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

Odtud

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}\ln x &= \frac{3}{2} \\
\ln x &= 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{x = e}$$