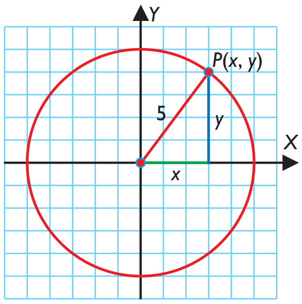
1 circunferencia

PIENSA Y CALCULA



Aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo del dibujo, escribiendo los cuadrados de los catetos en el primer miembro. ¿Qué fórmula obtienes?

1.2 Circunferencia de centro $C(a, b)$ y radio R

La **circunferencia de centro $C(a, b)$ y radio R** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al centro es R. Su ecuación es:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

La **ecuación general de la circunferencia** es:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

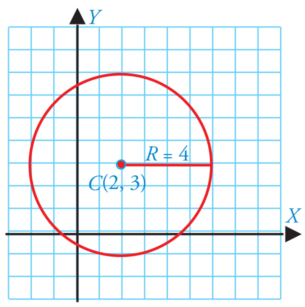
Es una ecuación de 2.º grado en dos variables x, y, tal que los coeficientes de x^2 y de y^2 son iguales y no aparece el término en xy

Dada la ecuación general de la circunferencia, para hallar el **centro** y el **radio** se aplica:

$$C(a, b) = C\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}\right) \qquad R = \sqrt{a^2 + b^2 - p}$$

EJERCICIO RESUELTO

1 Halla la ecuación general de la circunferencia que tiene el centro en el punto $C(2, 3)$ y radio $R = 4$



$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4^2 \Rightarrow$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 16 \Rightarrow$

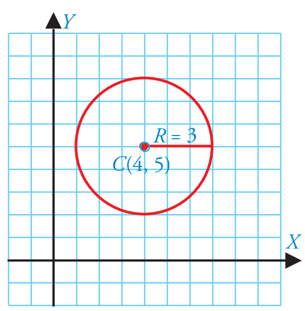
$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$

EJERCICIO RESUELTO

2 Halla el centro y el radio de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 32 = 0$

$$C\left(\frac{8}{2}, \frac{10}{2}\right) = C(4, 5)$$

$$R = \sqrt{4^2 + 5^2 - 32} = \sqrt{16 + 25 - 32} = \sqrt{9} = 3$$



1.3 Potencia de un punto respecto a una circunferencia

La **potencia de un punto *P*, respecto a una circunferencia *c*,** es el producto constante de los segmentos:

$$p = PA \cdot PB$$

Para obtener la potencia de un punto respecto a una circunferencia se sustituyen las coordenadas del punto P en la ecuación general de la circunferencia.

Un punto P es exterior a la circunferecia, está en ella o es interior, según la potencia sea positiva, nula o negativa.

OBSERVA

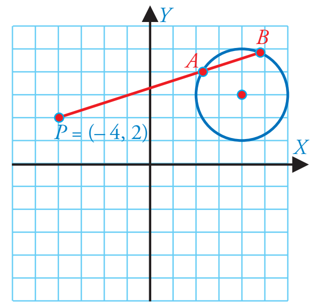
A y B son los puntos de intersección de una recta que pasa por P con la circunferencia.

EJERCICIO RESUELTO

3 **Halla la potencia del punto $P(-4, 2)$ respecto de la siguiente circunferencia. Haz el dibujo y comprueba que, como es positivo, el punto P está en el exterior.**

$c: x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$

$$p(P, c) = (-4)^2 + 2^2 - 8 \cdot (-4) - 6 \cdot 2 + 21 =$$
$$= 16 + 4 + 32 - 12 + 21 = \mathbf{61}$$



1.4 Eje y centro radical

El **eje radical de dos circunferencias** es el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen igual potencia respecto de las dos circunferencias.

Si las dos circunferencias se cortan, es la recta que pasa por los dos puntos de corte.

Para hallar la ecuación del eje radical se restan las dos ecuaciones de la circunferencia; si alguno de los coeficientes de x^2 e y^2 es distinto de uno, se divide previamente por su coeficiente.

EJERCICIO RESUELTO

4 **Halla el eje radical de las siguientes circunferencias. Haz el dibujo con las dos circunferencias y el eje radical.**

$c_1: x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$

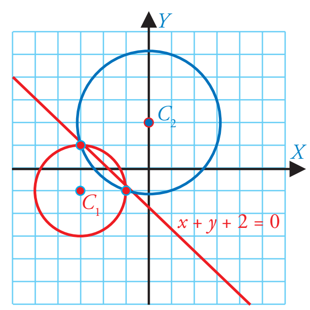
$c_2: x^2 + y^2 \qquad - 4y - 6 = 0$

Restando las dos ecuaciones obtenemos:

$6x + 6y + 12 = 0$

Simplificando entre 6 obtenemos:

$x + y + 2 = 0$



Se define el **centro radical de 3 circunferencias** como el punto que tiene igual potencia respecto a las 3 circunferencias. Para hallarlo, se determinan dos ejes radicales y se resuelve el sistema obtenido.

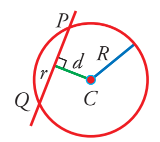
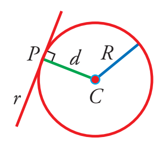
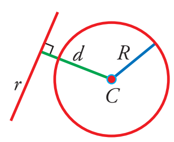
2 Posiciones relativas de rectas y circunferencias

PIENSA Y CALCULA

De las siguientes ecuaciones, ¿cuál corresponde a una recta y cuál a una circunferencia? Calcula mentalmente: en la recta, la pendiente y la ordenada en el origen, y en la circunferencia, el centro y el radio.

a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$ b) $y = 2x - 5$

2.1 Posiciones relativas de una recta y una circunferencia

Secante	
	$d < R$
Tangente	
	$d = R$
Exterior	
	$d > R$

Una recta puede ser secante, tangente o exterior a una circunferencia. Su posición relativa se puede estudiar de dos formas:

a) Resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

b) Hallando la distancia, *d,* del centro de la circunferencia a la recta; el radio, *R,* de la circunferencia, y comparando los valores.

En ambos casos se pueden presentar tres situaciones:

- La recta es **secante** a la circunferencia si al resolver el sistema se obtienen dos puntos, o bien $d < R$
- La recta es **tangente** a la circunferencia si al resolver el sistema se obtiene un punto, o bien $d = R$
- La recta es **exterior** a la circunferencia si al resolver el sistema no se obtiene ningún punto, o bien $d > R$

Para resolver el sistema formado por una recta y una circunferencia, se despeja en la ecuación de la recta la incógnita más fácil, se sustituye este valor en la ecuación de la circunferencia y se resuelve la ecuación de 2.º grado resultante.

EJERCICIO RESUELTO

5 **Halla los puntos de corte, si los hay, de la siguiente recta y de la circunferencia y estudia su posición relativa:**

$$r \equiv x - y = 4$$
$$c \equiv x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$$

Haz el dibujo.

Se resuelve el sistema formado por ambas ecuaciones:

a) Se despeja la y de la 1.ª ecuación:

$$x - y = 4 \Rightarrow -y = -x + 4 \Rightarrow y = x - 4$$

b) Se sustituye este valor en la ecuación de la circunferencia:

$$x^2 + (x - 4)^2 - 4x - 2(x - 4) - 4 = 0$$

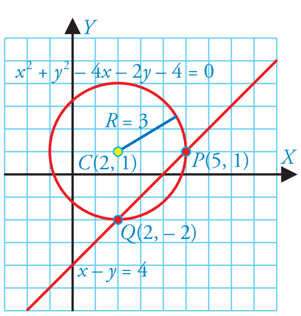
c) Se efectúan las operaciones:

$$x^2 + x^2 - 8x + 16 - 4x - 2x + 8 - 4 = 0$$
$$2x^2 - 14x + 20 = 0$$
$$x^2 - 7x + 10 = 0$$
$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}$$

d) Se sustituye $x = 5$ en $y = x - 4 \Rightarrow y = 5 - 4 = 1 \Rightarrow P(5, 1)$

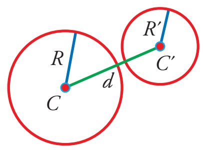
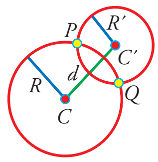
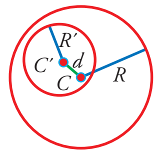
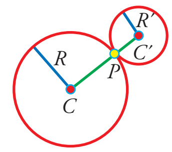
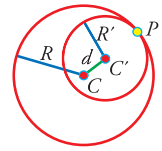
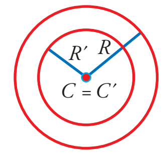
Se sustituye $x = 2$ en $y = x - 4 \Rightarrow y = 2 - 4 = -2 \Rightarrow Q(2, -2)$

Como se obtienen dos puntos, la recta es **secante** a la circunferencia.



2.2 Posición relativa de dos circunferencias

Dos circunferencias pueden ser:

Exteriores	Secantes	Una interior a la otra	Tangentes exteriores	Tangentes interiores	Concéntricas
					
$d > R + R'$	$R - R' < d < R + R'$	$d < R - R'$	$d = R + R'$	$d = R - R'$	$d = 0$

Para hallar la posición relativa de dos circunferencias, se resuelve el sistema formado por ambas ecuaciones, y son secantes, tangentes, exteriores o interiores según los puntos que tengan en común.

Para precisar más la posición relativa, se hallan los radios R, R' $(R > R')$ y la distancia entre los centros, d

RESOLVER EL SISTEMA FORMADO POR DOS CIRCUNFERENCIAS

Para resolver el sistema formado por dos circunferencias, se restan las ecuaciones y se obtiene una ecuación de 1.er grado. Se despeja en esta ecuación la incógnita más fácil y se sustituye en la ecuación de la circunferencia más sencilla.

EJERCICIOS RESUELTOS

6 **Halla los puntos de corte de las siguientes circunferencias y estudia su posición relativa:**

$\mathbf{c_1 \equiv x^2 + y^2 + 2x - 2y - 6 = 0}$

$\mathbf{c_2 \equiv x^2 + y^2 - 4x - 8y + 18 = 0}$

Se resuelve el sistema:

a) Se resta a la 1.ª ecuación la 2.ª:

$6x + 6y - 24 = 0 \Rightarrow x + y - 4 = 0 \Rightarrow y = 4 - x$

b) Se sustituye este valor en la 1.ª ecuación:

$x^2 + (4 - x)^2 + 2x - 2(4 - x) - 6 = 0$

c) Se efectúan las operaciones:

$x^2 + 16 - 8x + x^2 + 2x - 8 + 2x - 6 = 0$

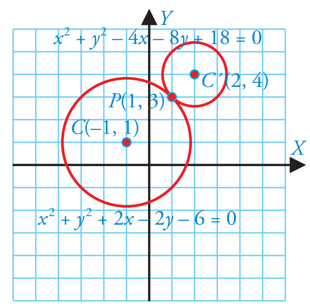
$2x^2 - 4x + 2 = 0$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

d) Se sustituye $x = 1$ en $y = 4 - x \Rightarrow y = 4 - 1 = 3 \Rightarrow$ **$P(1, 3)$**

Como solo se obtiene un punto $P(1, 3)$, las circunferencias son **tangentes.**



OBSERVA

$C(-1, 1)$, $R = 2\sqrt{2}$

$C'(2, 4)$, $R' = \sqrt{2}$

$d = d(C, C') = 3\sqrt{2}$

$d = R + R'$