Geometría 3D pentagonal en atrezzo navideño

En los últimos días de noviembre hemos visitado varias tiendas buscando aprovisionamiento para el atrezzo navideño. Finalmente hemos decidido decorar nuestra casa con unas estrellas preciosas que hemos visto en una de ellas. Al preguntar el precio, nos dimos cuenta de que con nuestro presupuesto no podíamos comprarlo. Mi tía y su amiga, ya jubiladas y amantes de las matemáticas, GeoGebra y la costura, han sugerido que podíamos confeccionarlas con tela y una estructura de alambre. Una de ellas nos ayudaría a diseñarlas con GeoGebra y la otra lo haría "a mano" con cálculos algebraicos.

Nos hemos puesto todas manos a la obra…

La pregunta es: ¿cuánta tela y alambre necesitaremos para hacer varias estrellas de distintos tamaños?

Nos gustaría hacer al menos tres. Nuestro salón no es muy grande, por lo que el tamaño del brazo de la estrella mayor no debería superar los 60 cm. Los de las otras dos podrían ser de 30 cm y 20 cm, respectivamente. El grosor de las estrellas también debe estar limitado para que no tengan demasiado volumen.

Resolución del problema

Iniciamos el proceso de resolución analizando la figura, tomando varias fotos en la tienda (de frente y de perfil para tener suficientes datos) y determinando las variables que intervienen en el problema. A continuación, elaboramos un plan de actuación.

Para conocer la cantidad de tela que tenemos que comprar, necesitamos calcular la superficie total de la estrella pentagonal. Observamos que, vista de frente, sus vértices forman dos pentágonos, uno externo y otro interno. Inicialmente definimos tres variables: ***R*** radio de la circunferencia exterior, ***r*** radio de la circunferencia interior y ***h***, la distancia del centro de la estrella a la "barriga" de la misma.

Para calcular la cantidad de alambre necesaria y construir su estructura, debemos medir las piezas que conformarán la estrella. Hemos observado que está formada por 20 triángulos iguales y que, para hacer su patrón, es preciso conocer sus ángulos.

A continuación, mi tía y su amiga se han puesto simultáneamente a resolver el problema algebraicamente y con GeoGebra.
Después de medir en la fotografía, hemos observado que, para que se conserven las proporciones, tanto el radio ***r*** como la altura ***h***, las hagamos depender del radio ***R*** de la circunferencia exterior donde está inscrito el pentágono grande.

1. **Resolución con GeoGebra**

Después de insertar las fotos de frente y de perfil en la vista Gráfica 2D, definimos las variables numéricas: los deslizadores ***R***, ***r*** y ***h***. Construimos dos circunferencias concéntricas en O=(0,0,0) de radios R y r, y dibujamos dos pentágonos, ajustando los valores de los deslizadores para que "encajen" en las fotos. En la circunferencia exterior a partir de 5 puntos rotados 72º, y en la interior otros cinco rotados 36º respecto a los primeros. El vértice central de la figura en 3D será el punto C=(0,0,h). A continuación, en la vista gráfica 3D, establecemos el EjeY como vertical y dibujamos el triángulo t1 que será el patrón de toda la figura. Con el comando simetría especular, construimos sus simétricos t2, t3 y t4 respecto a los planos YZ (x=0) y XY (z=0).

Con la lista l1= {t1,t2,t3,t4} y el comando secuencia concluimos la figura:

Secuencia(Rota(l1, i * 72°, EjeZ), i, 0, 5)

Ya solo quedaba sumar las áreas de todos los triángulos (iguales), 20*t1 para calcular la cantidad de tela necesaria y dibujar los segmentos respectivos para el cálculo del alambre de la estructura y sumarlos:

20*segmento(A,C) + 20*segmento(C,D) +2 h

Con la herramienta Ángulo calculamos los tres ángulos ***α***, ***β*** y ***χ*** del triángulo t1, para tenerlos en cuenta en la construcción de la estructura.

En la resolución de todo problema, y más con GeoGebra, las construcciones se realizan no de manera lineal sino dando un paso adelante y dos pasos atrás… Cuando casi habíamos acabado la construcción y, después de intercambiar información con la "resolutora algebraica" observamos que, para mantener las proporciones de la figura, solo se necesitaba el deslizador R; por lo que redefiniendo las variables $r = 0.43\,R$ y $h = 1/3\,R$, y se simplifica mucho el problema.

Finalmente hemos utilizado la Vista Gráfica 2 para mejorar la presentación. El valor de R=6.5 ajusta muy bien las fotos. Moviendo el deslizador R a 20, 30 y 60 hemos obtenido los valores que necesitamos. Se encuentran en las tablas 1 y 2, que se presentan en la resolución algebraica. Lo más importante; gracias al deslizador, podemos cotejar fácilmente con la construcción de GeoGebra que **¡las dos resoluciones dan los mismos resultados!**

2. Resolución algebraica

- *Superficie de la tela*

Vista la estrella desde el eje Z (Figura 1), consideramos que los vértices exteriores (A) e interiores (B) se encuentran en el plano Z=0 y que el vértice central (C) de la estrella se encuentra sobre el eje Z pero fuera del plano XY.

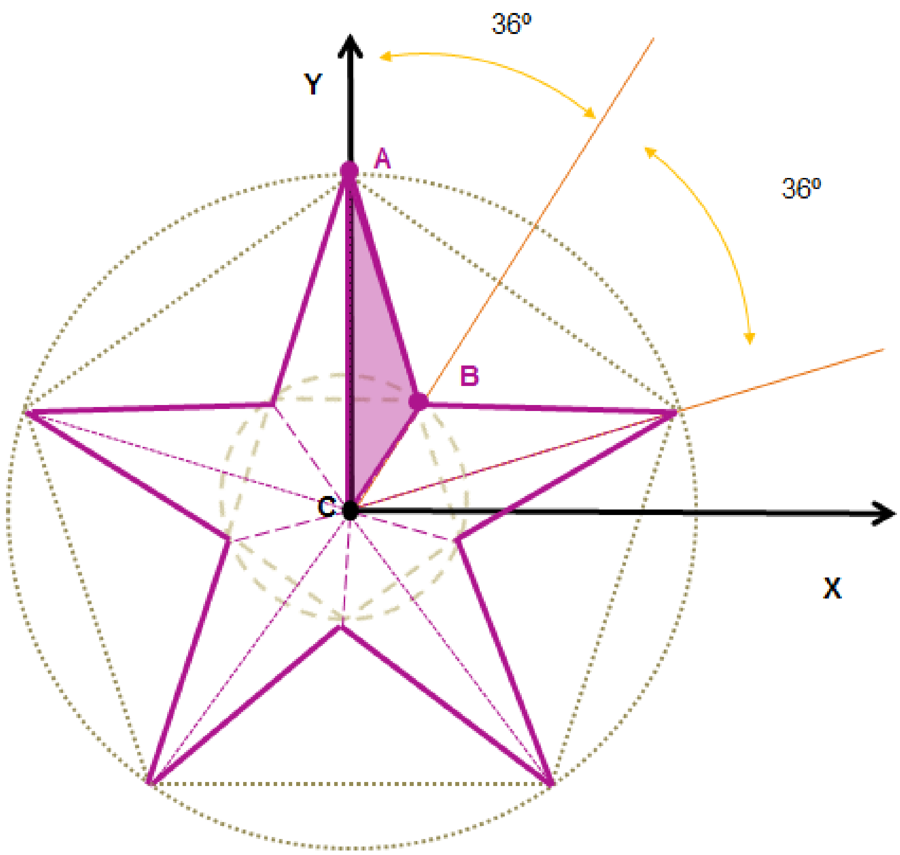

Figura 1

La superficie de tela necesaria para construir la estrella será 20 veces el área del triángulo sombreado en la Figura 1, ya que la estrella tiene dos caras.

Llamamos ***R*** la distancia desde el origen de coordenadas al punto A , ***r*** la distancia desde el origen de coordenadas al punto B y ***h*** la distancia desde el origen de referencia al punto C**.**

El área del triángulo sombreado en la Figura 1 puede calcularse haciendo uso del semiperímetro del triángulo ***s*** y del tamaño de los lados del triángulo a, b y c

$$\text{Área} = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)s}$$

donde a es la distancia del punto C al punto A, b es la distancia del punto C al punto B y c es la distancia del punto A al punto B.

Coordenadas de los puntos:

A (0, R, 0), **B** (r sen 36º, r cos 36º, 0), **C** (0, 0, h)

Los lados del triángulo se pueden calcular como:

$$a = \sqrt{R^2 + h^2}$$

$$b = \sqrt{r^2\, sen^2 36 + r^2 \cos^2 36 + h^2}$$

$$c = \sqrt{r^2 sen^2 36 + (r \cos 36 - R)^2}$$

Para que el aspecto de nuestras estrellas sea similar al de la fotografía nos hemos dado cuenta que las distancias ***R***, ***r*** y ***h*** deben mantener una proporción concreta. Midiendo sobre la fotografía hemos obtenido que :

$r/R = 0.43$ por tanto $r = 0.43\, R$

y que $h = 1/3\, R$; por tanto:

$$a = \sqrt{R^2 + 1/9\, R^2}$$

$$b = \sqrt{0.1849\, R^2\, sen^2 36 + 0.1849\, R^2 \cos^2 36 + 1/9\, R^2}$$

$$c = \sqrt{0.1849\, R^2 sen^2 36 + (0.43\, R \cos 36 - R)^2}$$

La tabla 1 muestra los lados del triángulo para los tres tamaños de estrella así como la superficie y la superficie de la estrella:

R (cm)	r (cm)	h(cm)	Lados (cm)			Area triángulo (cm^2)	Area total (cm^2)
			a	b	c		
60	25,8	20,0	63,2	32,6	42,0	618,9	12378,5
30	12,9	10,0	31,6	16,3	21,0	154,7	3094,6
20	8,6	6,7	21,1	10,9	14,0	61,5	1229,3

Tabla 1

Sumando las áreas totales la superficie total de tela que se necesita es 1.7 m^2

- *Ángulos del triángulo*

Para calcular los ángulos del triángulo utilizamos el teorema del coseno. Los ángulos ***α***, ***β*** y ***χ*** aparecen identificados en la figura 2.

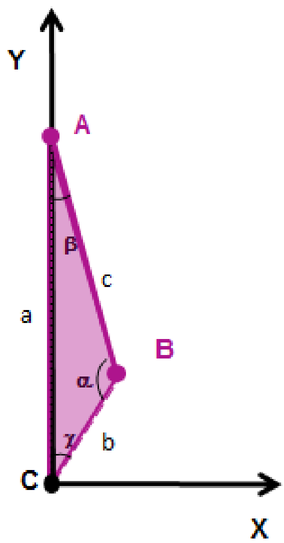

Figura 2

De tal forma que:

$$\cos(\alpha)=(a^2-b^2-c^2)/(-2\,b\,c)$$
$$\cos(\beta)=(b^2-a^2-c^2)/(-2\,a\,c)$$
$$\cos(\chi)=(c^2-a^2-b^2)/(-2\,a\,b)$$

Haciendo uso de los valores de a,b,c que aparecen en la Tabla 1 obtenemos los ángulos:

α =115.36º, β=27.80º y χ=36.83º; siendo independientes del tamaño de la estrella.

- *Longitud de alambre*

Para mantener tersa la tela utilizaremos una estructura de alambre. Esta estructura deberá mantener los brazos de la estrella y el grosor de la misma.

Para mantener los brazos de la estrella utilizaremos alambres uniendo el vértice central (C) con los vértices exteriores (A) e interiores (B), para la cara vista desde el eje +Z. Por tanto necesitaremos 5 tramos de longitud ***a*** y otros 5 de longitud ***b.***

De manera similar en la cara vista desde el eje -Z existirá un vértice central (C'), simétrico de C respecto al plano XY, que deberá estar también unido con los vértices interiores y exteriores. Por tanto, necesitaremos otros 5 tramos de longitud ***a*** y otros 5 de longitud ***b.***

Por último, para mantener el grosor de la estrella, otro alambre debe unir los vértices centrales C y C' que distan entre sí 2***h.***

La longitud total de alambre será:

$$\text{Longitud Total} = 10\,a + 10\,b + 2\,h$$

Utilizando los valores de la Tabla 1 obtenemos la longitud de alambre para cada tamaño de estrella (ver Tabla 2)

R (cm)	h(cm)	Lados (cm)			Longitud alambre (cm)
		a	b	c	
60	20,0	63,2	32,6	42,0	998,9
30	10,0	31,6	16,3	21,0	499,4
20	6,7	21,1	10,9	14,0	333,0

Tabla 2