



## 4

## Winkel zwischen Vektoren, Schnittwinkel

### Didaktische Hinweise

In dieser Station werden erprobte Unterrichtsmaterialien und Ideen zur handlungsorientierten Einführung von Winkeln zwischen Vektoren vorgestellt. Die Materialien können zur Gestaltung einer Doppelstunde in der Arbeitsform „Gruppenarbeit“ verwendet werden.

Das zentrale Anliegen der Konzeption ist die Förderung der Kompetenz „Mathematisch Probleme lösen (K2)“ im Anforderungsbereich II bis III (Strukturieren, Mathematisieren und Lösen eines realen Problems) und die Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens.

Hauptsächlich werden folgende Leitideen<sup>1</sup> angesprochen:

Leitidee Messen (L2): Streckenlängen und Winkelgrößen im Raum auch mithilfe des Skalarprodukts bestimmen.

Leitidee Raum und Form (L3): geometrische Sachverhalte in Ebene und Raum koordinatisieren, das Skalarprodukt geometrisch deuten.

Die folgende (reale) Fragestellung wird im Unterricht untersucht: „Wie müssen die Enden eines (zylindrischen) Handlaufs einer abknickenden Treppe angesägt werden, damit die Teilstücke des Handlaufs möglichst gut aufeinanderpassen?“

Ausgehend von Kenntnissen der Vektorgeometrie und der bereits bekannten Definition des Skalarprodukts sollen die Schüler eine Lösung für das Problem finden und diese Lösung auch praktisch umsetzen und überprüfen. Denkbare weitere Lösungsstrategien wären: Berechnung von Längen und Anwendung des Kosinussatzes, Berechnung und Übertragung von Längen und Messung eines Winkels in einem konstruierten Dreieck (mit berechneten Seitenlängen). Steht GeoGebra zur Verfügung, wäre auch eine digitale Modellierung und Auswertung denkbar.

### Ziele und Förderung von Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler ...

- ... stärken ihre Kompetenz „Mathematisch Probleme lösen“: ...können einen Lösungsweg zu einer Problemstellung, z. B. durch ein mehrschrittiges, strategiegestütztes Vorgehen, finden.
- ... stärken ihre Kompetenz „Mathematisch kommunizieren“ (K6): ...mehrschrittige Lösungswege, Überlegungen und Ergebnisse verständlich darlegen.
- ... wenden das Skalarprodukt an, um Winkeln zwischen Vektoren zu bestimmen.
- ... bestimmen den Schnittwinkel zweier Geraden.
- ... können Winkel zwischen Vektoren und Schnittwinkel voneinander abgrenzen.

### Übersicht der Materialien

- Hinweise zur Durchführung, mögliches Tafelbild
- Schülerarbeitsblätter: Winkel\_Vektoren\_Arbeitsauftrag und Winkel\_Vektoren\_Aufgaben
- GeoGebra-Arbeitsblatt: Handlauf\_Modell.ggb

<sup>1</sup> Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusminister-konferenz vom 18.10.2012), insbesondere S.14ff

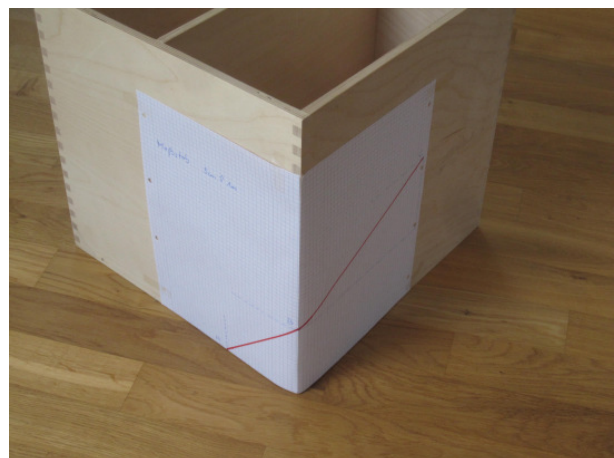
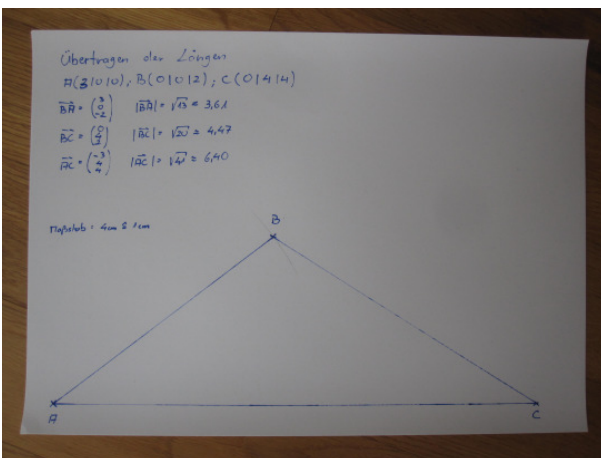
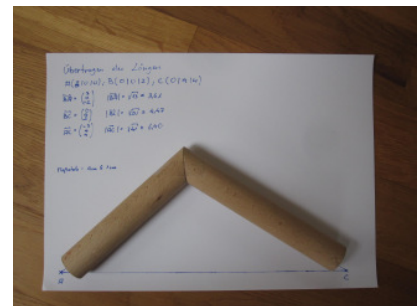
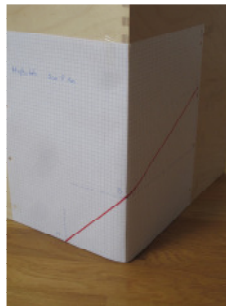
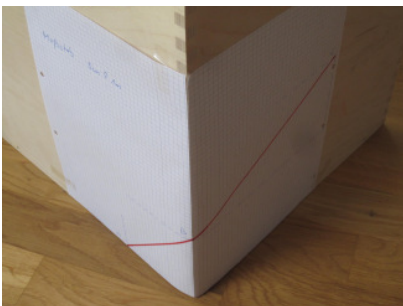


*Hinweise zur Durchführung und Methode*

Zeitlich könnte sich die Doppelstunde an die Definition des Skalarproduktes anschließen (Motivation und Herleitung im TG z.B. über den physikalischen Begriff der „Arbeit“) oder das Thema Vektorgeometrie mit einer handlungsorientierten Aufgabe abschließen.

Ein besonderer Reiz der Problemstellung liegt darin, dass die Aufgabe auch *praktisch* gelöst werden sollte<sup>2</sup>. Möchte man auf diesen Aspekt nicht verzichten, so sollte man folgende Materialien zur Verfügung stellen bzw. anfertigen:

- Gehrungssäge (mit oder ohne Winkelmesser)
- Sicherheitshinweise zum Benutzen der Säge
- Langer Holzzyylinder (z.B. Besenstiel) zum Zersägen
- Modell der Treppe (z.B. Schnurr- oder Drahtmodell oder ein beschriftetes 3D Modell) zur Überprüfung der vorgeschlagenen Lösungen.



<sup>2</sup> Bei der ersten Konfrontation mit dem Problem habe ich gestaunt, welche Fehler und falschen Überlegungen sich bei mir *im Kopf* bildeten. Diese wurden dann sofort bei der praktischen Umsetzung offenbar... ;-)

## Die Neuerungen im Lehrplan und im Abitur

### Modul 5 Vektorgeometrie

---



Um die Problemstellung klar zu formulieren und die Konfrontationsphase möglichst kurz zu halten, wird ein Arbeitsblatt verwendet, auf dem die Aufgabenstellung skizziert ist.

Die zur Verfügung stehenden Hilfsmittel werden vorgestellt: Eine Gehrungssäge (evtl. ohne Winkeleinteilung), Holzzylinder, die noch „abgelängt“ werden müssen und ein Modell, das den Verlauf der Treppen zeigt und zur Überprüfung des Lösungsvorschlags dient. Es wird darauf hingewiesen, bei der Bedienung der Säge vorsichtig zu sein (Unfallgefahr).

Die Aufgabe soll in Gruppenarbeit gelöst werden, ein intensiver Gedankenaustausch und ein Aufteilen der vielfältigen Aufgaben soll explizit gefördert werden.

Die Aufgabe der Gruppenarbeit ist recht komplex. Gefordert werden sowohl Geschick in der Durchführung einer praktischen Tätigkeit, eine mathematische Modellierung, sowie die Herleitung einer den Schülern noch nicht bewussten „Formel“ – bisher ist nur die Definition des Skalarprodukts bekannt.

Zu Aufgabenbeginn ist noch überhaupt nicht klar, welche Größen zur Lösung des Problems hilfreich sind. Selbst dann, wenn der Winkel zwischen den Vektoren bestimmt wurde, sind noch weitere Ideen zur praktischen Umsetzung einzubringen (vgl. Anlage: mögliches Tafelbild).

Eine sehr genaue Zeitvorgabe wird nicht gegeben, die Schüler sollen genügend Zeit bekommen, sodass mindestens eine Gruppe das Problem lösen kann. Bei dieser Vorgehensweise besteht natürlich die Gefahr, dass eine mögliche Verlaufsplanung hinfällig wird, ein Erreichen aller Lernziele in dieser Stunde nicht mehr gelingt. Dies wird in Kauf genommen – erwartungsgemäß ist eine Arbeitszeit von 30min aber nicht unrealistisch.

Ein eventuelles Abmessen von Winkeln und Längen am Modell wird nicht gestattet. Erst nachdem eine Lösung ausgearbeitet wurde, soll die praktische Überprüfung erfolgen. Sollte sich der Vorschlag als richtig erweisen, wird die Gruppe gebeten, ihre Dokumentation mit Visualizer und Beamer jedem sichtbar zu machen und die Vorgehensweise zu erläutern. Zentrale Ideen werden herausgehoben und von allen notiert (Ergebnissicherung). Es ist denkbar, dass eine Gruppe das Problem mit Hilfe des Kosinussatzes löst, ohne das Skalarprodukt explizit zu nutzen oder eine konstruktive Lösung (über Längen und Messen oder mit GeoGebra) findet. Diese Lösung wird auf jeden Fall als richtig gewürdigt. Die Lehrkraft wird nach weiteren Lösungsideen fragen und eventuell als weitere Vereinfachung das Hilfsmittel Skalarprodukt nennen.

Eine Modellierung des Problems in Geogebra dient zur weiteren Bestätigung und zur Veranschaulichung abgeänderter Aufgaben- und Fragestellungen (z.B. „Hat man einen rechten Winkel, falls...“).

Erfahrungsgemäß kommt es nicht selten vor, dass die Modellierung des Problems mit Vektoren „falsch“ gewählt wird, sodass der zu 180 Grad komplementäre Winkel bestimmt wurde. Dies könnte dann direkt genutzt werden, um zu Schnittwinkel zwischen Geraden überzuleiten....