Rotação para o nível superior

Ana Carolina Bortolami Leite

Bruno Cavalcanti de Araújo Souto Santos

2018

Em uma rotação todos os pontos de uma figura rodam à volta de um ponto (centro de rotação), num determinado sentido e seguindo um determinado ângulo (ângulo de rotação). O sentido dessa rotação pode ser positivo, é o que chamamos de sentido anti- horário e também negativo, que é o sentido horário. Em uma rotação a figura original roda e é transformada em figura igual, na qual todos os seus pontos estão à mesma distância do ponto de rotação que os pontos originais.

Matematicamente, o operador linear da rotação é uma matriz, chamada de matriz de rotação. Elas buscam em princípio representar, em linguagem matemática, operações físicas reais associadas às rotações de objetos.

$$M = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad , \quad \text{se } M \in \mathbb{R}^2$$

Definição:

Uma matriz de rotação é uma transformação linear que quando multiplicada por qualquer vetor provoca uma rotação desse vetor segundo um eixo mantendo a sua norma (comprimento).

Propriedades:

- $M \in \mathbb{R}^{NxN}$ é uma matriz de rotação se, e somente se, M é ortonormal.

Observação: Para que M seja ortonormal, necessariamente seus autovetores (vetores coluna) são dois a dois ortogonais, isto é, o produto escalar (ou interno) entre eles seja nulo e cada um deles é unitário (possui norma igual a um).

- A matriz rotação é anti-simétrica: sua inversa é igual a sua transposta.

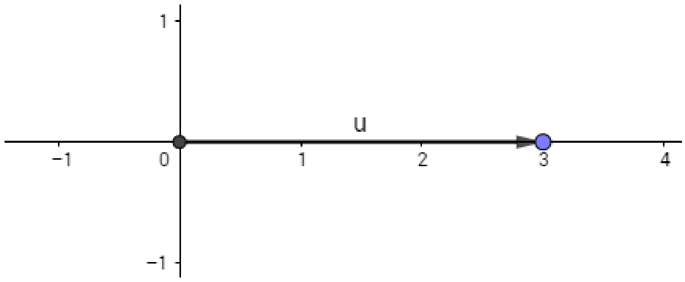
$$M^t = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = M^{-1}$$

- O determinante da matriz rotação é igual a um.

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + sen^2\theta = 1$$

- Veremos como de fato ocorrem as transformações a partir de um exemplo no $\mathbb{R}^2$.

1. Considere o vetor $\vec{u} = (3{,}0)$. Queremos obter o vetor $\vec{v}$ tal que $\vec{v}$ seja uma rotação de 30° ($\frac{\pi}{6}$ em radianos) em relação a $\vec{u}$.



Sendo assim, temos que $M = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

Para encontrar $\vec{v}$, fazemos $\vec{v} = \mathrm{M}.\vec{u}$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{2} - 0.\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} + 0.\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Portanto, $\vec{v} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Com a ajuda do aplicativo Geogebra, é possível construir os dois vetores e utilizando a ferramenta ângulo, confere-se o grau como mostrado abaixo.