Kuželovy Sečky

Tečna v bodě kružnice planimetricky

Žán Pól Kastról

4. července 2022

1 Věta o tečně kružnice

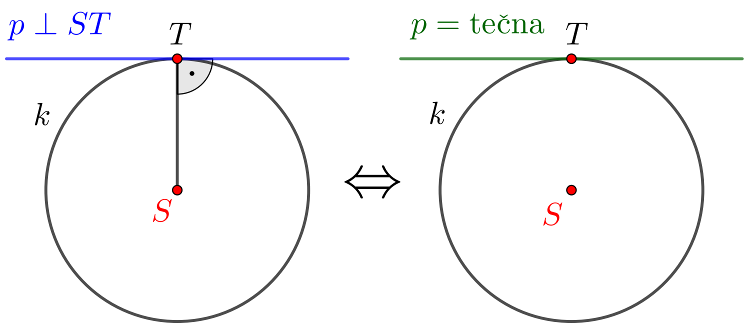
Definice 1: Tečna kružnice

Tečna *kružnice* je taková přímka, která s ní má společný **právě jeden** bod.

Tato definice je obdobná původní Eukleidově definici 2 z knihy III. jeho Základů[1].

Věta 1: Věta o tečně kružnice

Přímka p je tečnou kružnice k se středem S v dotykovém bodě T **právě když** je kolmá na poloměr ST (obr.1).



Obr. 1

Věta má tvar ekvivalence, takže důkaz uděláme ve dvou krocích, kdy dokážeme postupně dvě implikace:

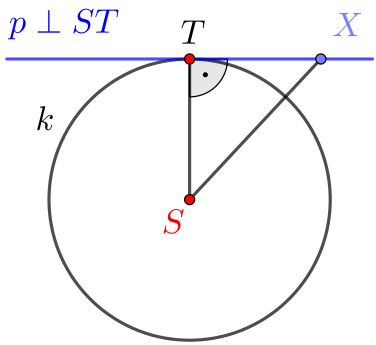
[1] http://aleph0.clarku.edu/ djoyce/elements/bookIII/defIII2.html

Krok 1: $p \perp ST \Rightarrow p =$ tečna.

Jestliže přímka p prochází bodem T kružnice k se středem S a je *kolmá* na poloměr ST, **potom** je to *tečna* kružnice v bodě T.

Toto tvrzení najdeme v knize III. Eukleidových základů v podobě **důsledku** věty 3.16[2]. Protože věta 3.16 zahrnuje poznatky, které zde nepotřebujeme („horn angles“), dokážeme si tento krok jinak.

Důkaz kroku 1. Máme tedy kružnici k, její libovolný bod T a kolmici p vedenou bodem T na poloměr ST. Chceme ukázat, že p je tečna kružnice k, tedy že kromě bodu T nemá s kružnicí žádný další společný bod.



Obr. 2

Na p zvolíme libovolný bod X různý od T (obr.2). Úsečka SX je

[2]

- Video 1 – https://youtu.be/NWcnIXRjT7A
- Video 2 – https://youtu.be/GFNYgdFK-xY
- Heath online – http://aleph0.clarku.edu/ djoyce/elements/bookIII/propIII16.html

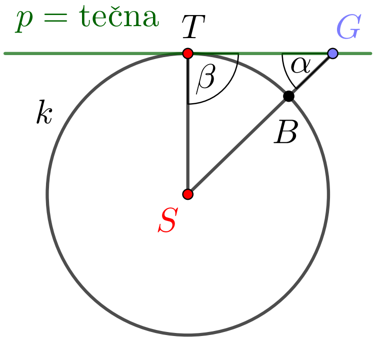
přeponou v pravoúhlém ΔSTX, takže je jistě *větší* než odvěsna ST. Ale protože ST je poloměr kružnice, znamená to, že vzdálenost bodu X od středu S je větší než poloměr a bod X nemůže ležet na kružnici k. Jediným společným bodem přímky p a kružnice k je tedy bod T. Přímka p je tedy tečnou kružnice k v bodě T. Tím je Krok 1 dokázán. □

Krok 2: $p =$ **tečna** $\Rightarrow p \perp ST$.

Jestliže přímka p je *tečnou* kružnice k v bodě T, **potom** je *kolmá* na poloměr ST.

Toto tvrzení najdeme v knize III. Eukleidových základů v podobě věty 3.18[3] a my si nyní Eukleidův důkaz předvedeme.

Eukleidův důkaz kroku 2 – sporem. ($p =$ tečna $\wedge\, p \not\perp ST$.).



Obr. 3

3

- Heath online – http://aleph0.clarku.edu/ djoyce/elements/bookIII/propIII18.html
- Video – https://youtu.be/xZ8qVv8Use8

Předpokládejme, že p je tečna kružnice k v bodě T, ale není kolmá na ST (V obr.3 tedy $\beta < 90°$). Na p musí proto existovat bod $G \neq T$ takový, že $SG \perp p$. Trojúhelník ΔSGT je tedy pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu G. (V obrázku 3 je tedy $\alpha = 90°$, i když do tak nevypadá!)

Víme, že v každém trojúhelníku leží proti většímu úhlu větší strana, a protože $\alpha > \beta$, musí být $|ST| > |SG|$. Z obrázku ale vidíme[4], že $|SG| > |SB| = |ST|$. Dostáváme tedy, že má současně platit

$$|ST| > |SG| \wedge |SG| > |ST|$$

což je spor.

Tečna v T tedy musí být kolmá na poloměr ST. Tím je krok 2 dokázán. □

Poznámka: Větu o tečně můžeme alternativně vyslovit také takto:

Věta 2: Věta o tečně kružnice – alter. formulace

Každá kružnice se středem S má v daném bodě T **právě jednu tečnu**. Je to **kolmice** na ST v bodě T.

Krok 1 je návod na konstrukci tečny v bodě T pomocí kolmice k poloměru a **Krok 2** ukazuje, že každá tečna musí být touto kolmicí, tedy, že tečna v daném bodě je **jedna jediná**.

2 Další možnosti důkazu Kroku 2

Eukleides dokazoval tuto implikaci *sporem*. Ukažme si ještě důkaz *přímý* a důkaz *obměnou*.

[4]Neměli bychom předtím dokázat, že tečna může obsahovat kromě bodu dotyku jen vnější body kružnice (viz dále věta 3)? Eukleides to podle mě neudělal a spoléhá se jen na obrázek a na to co vidíme?!

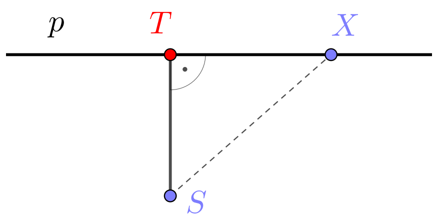
2.1 Přímý důkaz kroku 2

Nejprve si vezmeme jednoduchý příklad a pomocnou větičku:

Příklad 1

Je dána přímka p a bod $S \notin p$. Najdi bod $T \in p$ tak, aby vzdálenost ST byla minimální.

Stačí spustit kolmici z S na p. Pata kolmice je hledaným bodem T.



Obr. 4

Důkaz. Na p zvolíme libovolný bod $X \neq T$. Zřejmě $|SX| > |ST|$, pač SX je přepona v pravoúhlém ΔSTX. Ze všech bodů přímky p má tedy bod T nejmenší vzdálenost od S. (Minimum velikosti úsečky $|SX|$ tedy existuje a je právě jedno.) $\square$

Věta 3: Pomocná větička o tečně

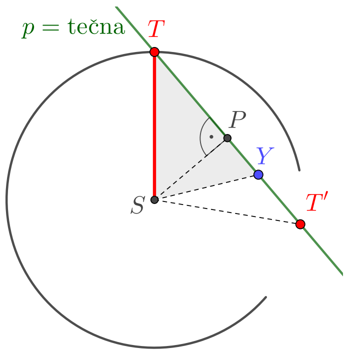
Všechny body tečny kružnice (kromě dotykového bodu) leží **vně** kružnice.

Důkaz. Sporem. Předpokládejme, že tečna obsahuje nějaký vnitřní bod kružnice Y (obr.5).

V ΔSTY platí $|SY| < |ST|$, protože Y je vnitřní bod k. V trojúhelníku leží proti menší straně menší úhel, takže úhel u vrcholu T není jistě pravý.

Spustíme-li proto z bodu S kolmici na přímku TY, dostaneme patu $P \neq T$.

Sestrojíme bod T' osově souměrný s T podle osy SP.



Obr. 5: Může tečna obsahovat vnitřní bod kružnice Y?

Ze souměrnosti plyne $|ST| = |ST'|$. Vzdálenost bodu T' od S je tedy rovna poloměru, takže T' leží na kružnici. Přímka TY má tedy s kružnicí aspoň dva společné body. To je ale spor s definicí tečny. Tečna tedy neobsahuje žádné vnitřní body kružnice, takže všechny ostatní body tečny (kromě T) jsou **vnější** body. □

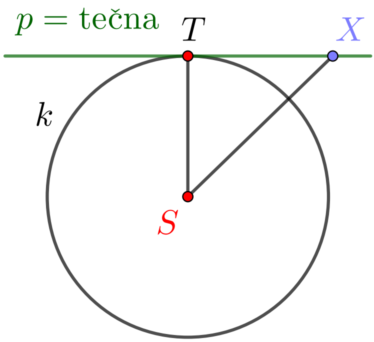
Nyní můžeme dokázat Krok 2 přímo:

Krok 2: $p =$ tečna $\Rightarrow p \perp ST$.

Jestliže přímka p je *tečnou* kružnice k v bodě T, **potom** je *kolmá* na poloměr ST.

Přímý důkaz Kroku 2. Vezměme nyní tečnu kružnice v bodě T (obr.6).

Dle **Věty** 3 platí pro její libovolný bod $X \neq T$, že leží **vně** kružnice. Proto platí $|SX| > |ST|$. Ze všech bodů tečny má tedy dotykový bod T nejmenší vzdálenost od bodu S, takže dle **Příkladu** 1 musí být $ST \perp TX$. **Proto je tato tečna kolmicí.**



Obr. 6

□

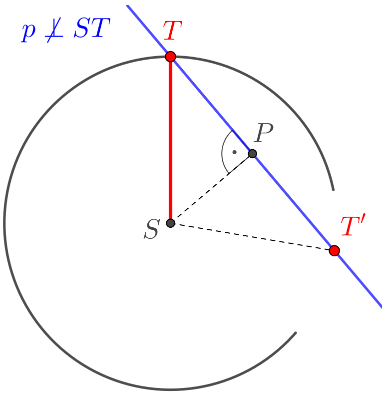
2.2 Důkaz Kroku 2 obměnou

Obměna implikace $A \Rightarrow B$ je $\neg B \Rightarrow \neg A$. V našem případě zní tedy obměna: „ $p \not\perp ST \Rightarrow p \neq$ tečna.“ Není-li však přímka p tečnou a přitom prochází bodem T kružnice, musí to být sečna, tedy:

Obměna Kroku 2: $p \not\perp ST \Rightarrow p =$ sečna.

Jestliže přímka p prochází bodem T kružnice k a není kolmá na poloměr ST, **potom** je to sečna.

Důkaz. Ukážeme, že v případě, že $p \not\perp ST$, existuje kromě bodu T další bod, který má přímka p společný s kružnicí k, takže je to sečna.



Obr. 7

Protože $p \not\perp ST$, musí na p existovat bod $P \neq T$ takový, že $p \perp SP$ (obr.7). Sestrojíme bod T' osově souměrný s T podle osy SP. Ze souměrnosti plyne $|ST| = |ST'|$. Vzdálenost bodu T' od S je tedy rovna poloměru, takže T' leží na kružnici. Přímka p má dva společné body s k, takže je to sečna. $\square$