2. Verhalten im Unendlichen

DEFINITION

Sei $f: x \longmapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ eine gebrochen rationale Funktion, so bezeichnen wir mit

$z = deg(p(x))$ den Grad des Zählers und mit $n = deg(q(x))$ den Grad des Nenners.

Wir betrachten die Funktion $f_c: x \longmapsto \overset{g(x)}{\frac{1}{x^2}} + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ und stellen fest, dass

$$\lim_{x \to \pm\infty} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0^+} + \underbrace{c}_{\to c} = c,$$

weshalb wir eine waagrechte Asymptote bei $y = c$ erwarten. Dies gilt für jede Funktion $f: x \longmapsto g(x) + c$, wenn $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$, also der Zählergrad von g kleiner ist als der Nennergrad von g.

Um f in die bekannte Form einer geb.-rat. Funktion überzuführen, müssen wir die Summe auf den Hauptnenner bringen:

$$f: x \longmapsto \frac{1}{x^2} + c \cdot \frac{x^2}{x^2} = \frac{cx^2 + 1}{x^2}$$

Der Nachweis gelingt nun über Ausklammern des größten Exponenten:

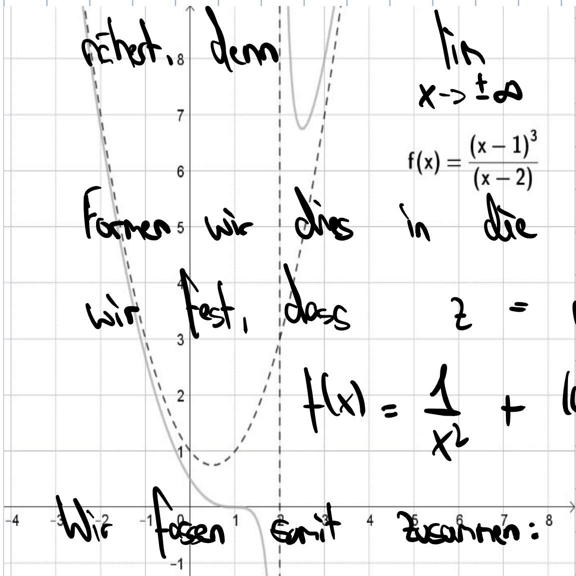
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{cx^2 + 1}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x^2} \cdot \left(c + \frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}} = \lim_{x \to \pm\infty} \underbrace{c}_{\to c} + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0} = c$$

Da der größte Exponent des Zählers über die Erweiterung entsteht, ist bei $z < n$ $y = 0$ die waagrechte Asymptote und bei $z = n$ über die Leitkoeffizienten ablesbar, z. B. $h(x) = \frac{3x^3 + x}{2x^3 + 1000x^2}$ besitzt die waagrechte Asymptote $y = \frac{3}{2}$.

Analog können wir schlussfolgern, dass die Funktion

$$f: x \longmapsto \frac{1}{x^2} + cx + d$$

weit entfernt von der Definitionslücke sich der linearen Funktion $cx + d$ asymptotisch an-



nähert, denn $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0^+} + cx + d \approx cx + d$

Formen wir dies in die Standardform einer geb.-rat. Form um, so stellen wir fest, dass $z = n + 1$, da

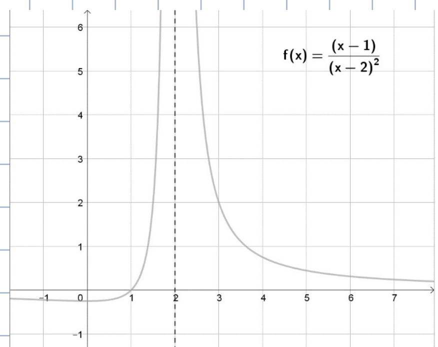
$$f(x) = \frac{1}{x^2} + (cx + d) \cdot \frac{x^2}{x^2} = \frac{cx^3 + dx^2 + 1}{x^2}$$

Wir fassen somit zusammen:

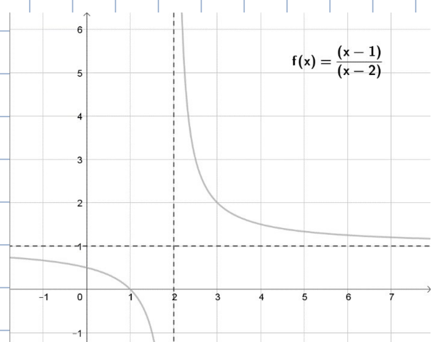
MERKE

Der Graph G_f einer gebrochen-rationalen Funktion $f: x \longmapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ hat für $|x| \longrightarrow \infty$ im Fall ...

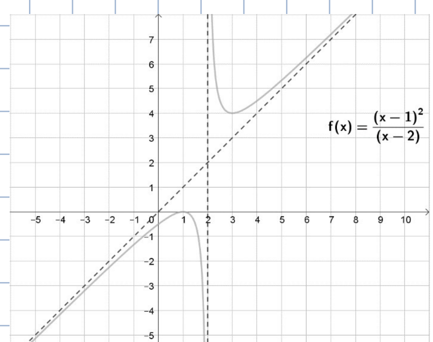
... $z < n$ die x-Achse als waagrechte Asymptote



... $z = n$ eine waagrechte Asymptote bei $y = c$ und es gilt
$$f(x) = g(x) + c$$



... $z = n + 1$ eine schräge Asymptote bei $y = cx + d$ und es gilt
$$f(x) = g(x) + cx + d$$



... $z > n+1$ eine ganzrationale Funktion $h(x)$ als Asymptote und es gilt
$$f(x) = g(x) + h(x)$$