Prof. Fabio Simas, Disciplina: FM I
Escola de Matemática - UNIRIO

1 Introdução às Funções

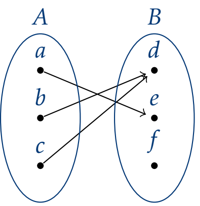
Essa disciplina trata de funções reais de uma variável real (melhor explicado a seguir). Não abordaremos o significado de número real.

Função

Uma *relação* f entre os elementos de dois conjuntos não vazios, A e B, é uma **função de A em B** se todo elemento do conjunto A estiver relacionado a um único elemento do conjunto B.
outra definição possível é
Uma **função** f do conjunto A para o conjunto B é uma *correspondência* que a cada elemento do conjunto A faz corresponder um único elemento do conjunto B.

Exemplos elementares

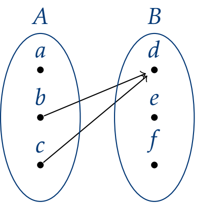
A figura ilustra a função f do conjunto $A = \{a, b, c\}$ no conjunto $B = \{d, e, f, g\}$. As setas indicam a correspondência.



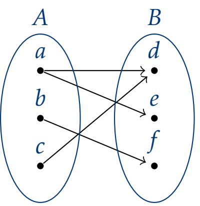
Em linguagem simbólica matemática escreve-se:

$f(a) = e$,
$f(b) = d$ e
$f(c) = d$.

As relações das figuras a seguir não são funções.



Não é função porque nem todo elemento de A está relacionado a um elemento de B.



Não é função porque nem todo elemento de A está relacionado a um **único** elemento de B.

Domínio, contradomínio e imagem

Em uma função, o conjunto de partida é chamado de **domínio da função**. No exemplo, o domínio é o conjunto A. O conjunto de chegada é o **contradomínio da função**.
A notação usual é $f : A \to B$.
Se a é um elemento de A, isto é, $a \in A$, denota-se por $f(a)$ o elemento de B que corresponde a a. Assim, $f(a) \in B$ é a *imagem de a por f*. O conjunto cujos elementos são as imagens dos elementos de A por f é o **conjunto imagem da função** f (Notação: $Im(f)$). No exemplo, $Im(f) = \{d, e\}$.

Funções reais de variável real

Uma função real de uma variável real é uma função em que tanto o domínio como o contradomínio são subconjuntos do conjunto dos números reais.
Exemplos: $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$, $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, dada por $g(n) = \sqrt{x}$ ou $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, dada por $h(n) = 2n - 1$ se n é positivo e $h(n) = -2n$ caso contrário.
Atenção! Nesta disciplina, exceto quando mencionado explicitamente, todas as funções são reais de uma variável real.
Quando o domínio não for mencionado supõe-se que ele é o maior subconjunto dos números reais para o qual a função faz sentido no contexto.
Quando o contradomínio não for mencionado supõe-se que se trata do conjunto dos números reais.

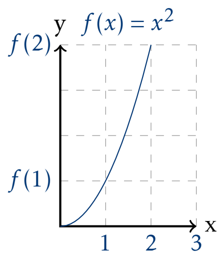
Gráfico de função

O gráfico de uma função $f : A \to B$ é o subconjunto $\mathrm{Graf}(f)$ do produto cartesiano $A \times B$ formado pelos pares ordenados do tipo $(a, f(a))$, em que $a \in A$. Em símbolos matemáticos, tem-se

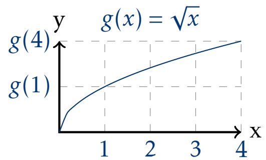
$$\mathrm{Graf}(f) = \{(a, f(a)) \in A \times B \,/\, a \in A\}.$$

As figuras a seguir ilustram os gráficos das funções f, g e h da seção anterior.

Álgebra: $\mathrm{Graf}(f) = \left\{(a, a^2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\right\}$.
Geometria:

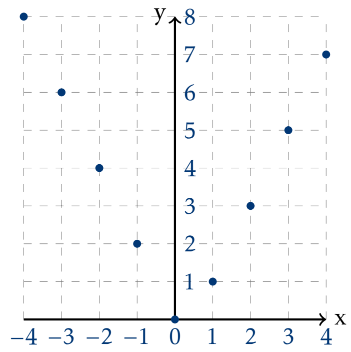


Álgebra: $\mathrm{Graf}(g) = \left\{(a, \sqrt{a}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\right\}$.
Geometria:



Álgebra:
$\mathrm{Graf}(h) = \{(a, -2a) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \,/\, a \in \mathbb{Z}\}$.
Geometria:

$$h(n) = \begin{cases} -2n, \text{ se } n \le 0 \\ 2n+1, \text{ se } n > 0 \end{cases}$$



Funções crescentes, decrescentes e constantes

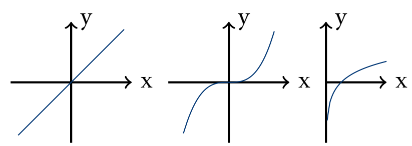
Dizemos que uma **função f é crescente** quando para quaisquer $a < b$ em seu domínio vale $f(a) < f(b)$.
Dizemos que uma **função f é decrescente** quando para quaisquer $a < b$ em seu domínio vale $f(a) > f(b)$.
Dizemos que uma **função f é constante** quando existe uma constante c tal que $f(x) = c$ para todo elemento x no domínio de f.

Exemplos algébricos

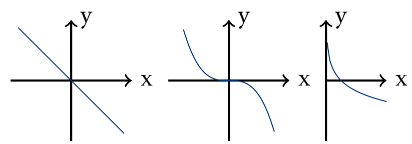
As seguintes funções são crescentes: $f(x) = x$, $f(x) = 5x$, $f(x) = x^3$.
As seguintes funções são decrescentes: $f(x) = -x$, $f(x) = -5x$, $f(x) = -x^3$.
As seguintes funções são constantes: $f(x) = 0$, $f(x) = -17$, $f(x) = 2$.

Exemplos geométricos

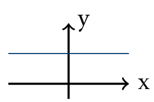
Gráficos de funções crescentes costumam se parecer com as imagens a seguir:



Gráficos de funções decrescentes costumam se parecer com as imagens a seguir:



Gráficos de funções constantes costumam se parecer com as imagens a seguir:

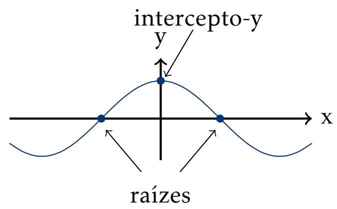


Intervalos de crescimento e decrescimento

Quando I é um intervalo contido no domínio da função f em que a função é crescente, isto é, f seria crescente se seu domínio fosse apenas I, dizemos que o intervalo I é um **intervalo de crescimento da função f**.
A definição de intervalo de decrescimento é análoga.

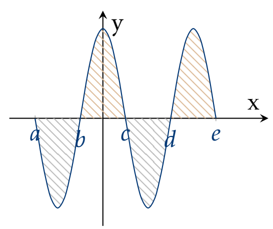
Raízes e intercepto-y de função

Seja a elemento do domínio da função f.
O número a é chamado **raiz (ou zero) de f** quando $f(a) = 0$. As raízes são representadas graficamente pela interseção do gráfico com o eixo x.
O número a é chamado **intercepto-y de f** quando $f(0) = a$. O intercepto-y de uma função é representado pela interseção do gráfico com o eixo y.
No gráfico fica assim:



Sinal de uma função

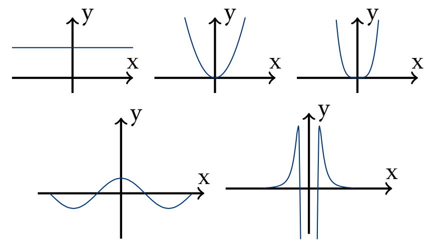
Seja a elemento do domínio da função f.
Dizemos que **a função é positiva em a** se $f(a) > 0$. Dizemos que a função é positiva num certo intervalos, se f é positiva em todos os elementos desse intervalo.
As definições de função negativa, não-positiva e não-negativa em um elemento e em um intervalo são análogas.
No gráfico fica assim:



A função é positiva nos intervalos (b, c) e (d, e) e é negativa nos intervalos (a, b) e (c, d).

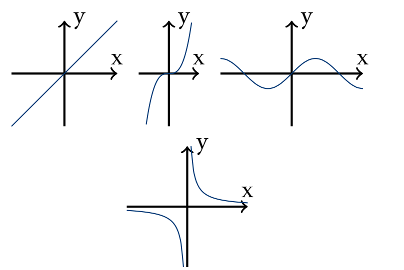
Função par

Geometria: Uma função é chamada de par quando seu gráfico é simétrico com relação ao eixo y.
Álgebra: Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é par quando seu domínio tem a propriedade de que se $a \in A$, então $-a \in A$ e $f(-a) = f(a)$.
São funções pares: função constante $f(x) = 2$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^4$, $f(x) = \cos(x)$ e $f(x) = \dfrac{3x^4 - x^2}{x^8}$. Os gráficos das funções são respectivamente:



Função ímpar

Geometria: Uma função é chamada de ímpar quando seu gráfico é simétrico com relação à origem do sistema de coordenadas $O = (0, 0)$.
Álgebra: Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é par quando seu domínio tem a propriedade de que se $a \in A$, então $-a \in A$ e $f(-a) = -f(a)$.
São exemplos de funções ímpares: $f(x) = x$, $f(x) = x^3$, $f(x) = \sin(x)$ e $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Os gráficos das funções são respectivamente:



Aprofundamento

Na disciplina de Álgebra Linear você aprenderá sobre *espaços vetoriais*. Grosseiramente, um espaço vetorial é um conjunto em que faz sentido somar e subtrair seus elementos e também multiplicar os elementos por números reais, obtendo-se como resultado elementos do mesmo conjunto. O conjunto das funções reais de uma variável real é um espaço vetorial (verifique!). Os subconjuntos formados, respectivamente, pelas funções pares e pelas funções ímpares também são espaços vetoriais (verifique!). Mais ainda, qualquer função pode ser escrita como a soma de uma função par com uma função ímpar (verifique!).