Name: ____________________

Beispielaufgaben Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase ab 2024

Mathematik

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x \text{ , } x \in \mathbb{R}.$$

Der Graph von f ist in der *Abbildung 1* dargestellt.

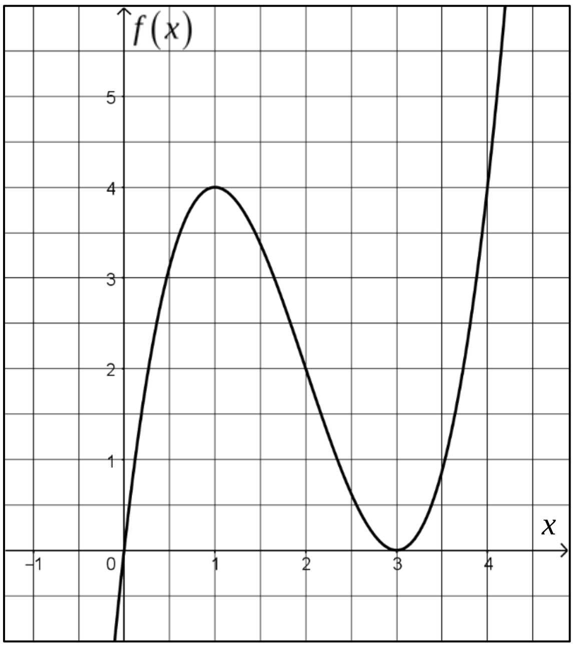


Abbildung 1

a) (1) *Weisen Sie nach, dass gilt:*

$$x \cdot (x-3)^2 = x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x.$$

(2) Für die Gleichung der Funktion f gibt es also die beiden folgenden Darstellungsmöglichkeiten:

D1: $f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x \text{ , } x \in \mathbb{R}$.

D2: $f(x) = x \cdot (x-3)^2 \text{ , } x \in \mathbb{R}$.

Nennen Sie zu jeder der beiden Darstellungsmöglichkeiten D1 bzw. D2 jeweils einen Vorteil bei der Untersuchung von Eigenschaften der Funktion f.

(2 + 2 Punkte)

b) *Untersuchen Sie rechnerisch die Funktion f auf lokale Extremstellen und ermitteln Sie rechnerisch die Art der lokalen Extremstellen und die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen von f.*

(8 Punkte)

Name: ____________________

c) (1) *Zeichnen Sie die Sekante s durch die Punkte* $P(1|4)$ *und* $Q(3{,}5|0{,}875)$ *in die Abbildung 1 ein und ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung von s.*

(2) *Berechnen Sie den Steigungswinkel* α *von s.*

(5 + 2 Punkte)

d) Betrachtet wird jetzt die Ableitungsfunktion f' mit $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 9$.

(1) *Zeichnen Sie den Graphen von* f' *in die Abbildung 2 ein.*

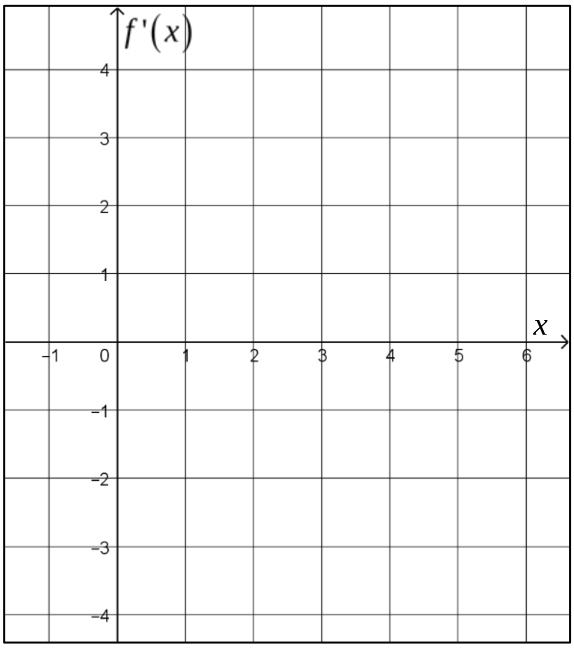


Abbildung 2

(2) Gegeben ist außerdem die Ableitungsfunktion g' mit $g'(x) = f'(x) + 4$.

Entscheiden Sie begründet, ob der Graph einer möglichen Ausgangsfunktion g mindestens einen lokalen Extrempunkt besitzt.

(3 + 2 Punkte)

Name: ____________________

Aufgabe 4:

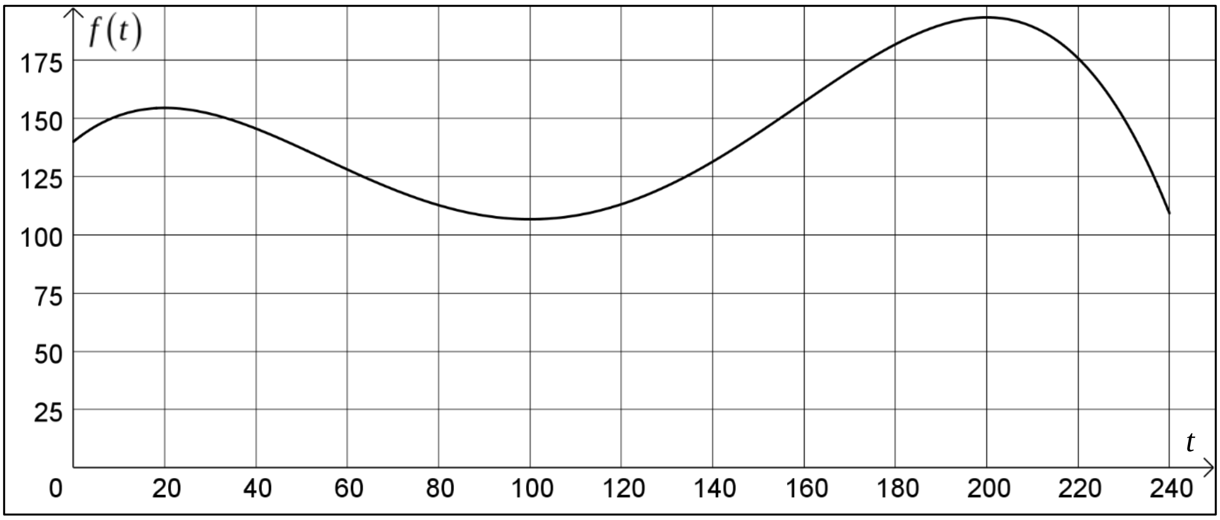
Patienten, die an Diabetes leiden, müssen regelmäßig Blutzuckermessungen durchführen. In der Regel wird dazu ein Blutstropfen auf einem Teststreifen mit einem elektronischen Testgerät analysiert. Seit einiger Zeit sind auch kontinuierliche Blutzuckermessungen möglich. Dabei wird durch einen Sensor fortlaufend der Blutzuckerwert des Diabetes-Patienten gemessen und übertragen, z. B. an eine Handy-App.

Der Blutzuckerwert eines Diabetes-Patienten wird für $0 \le t \le 240$ durch die auf $I\!R$ definierte Funktion f mit

$$f(t) = -\frac{1}{1000000} \cdot t^4 + \frac{4}{9375} \cdot t^3 - \frac{13}{250} \cdot t^2 + \frac{8}{5} \cdot t + 140$$

modelliert. Dabei ist t die Zeit seit Beobachtungsbeginn in Minuten und $f(t)$ der Blutzuckerwert in Milligramm pro Deziliter $\left(\frac{\text{mg}}{\text{dl}}\right)$.

In der *Abbildung* ist der Graph von f im Intervall $[0;240]$ dargestellt.



Abbildung

a) *Ermitteln Sie anhand der Abbildung, wie lange bei dem Diabetes-Patienten im Beobachtungszeitraum Blutzuckerwerte über* $175 \frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ *vorliegen.*

(3 Punkte)

Name: ____________________

b) Der höchste Blutzuckerwert wird im Zeitraum von 180 Minuten bis 240 Minuten nach Beobachtungsbeginn angenommen.

Untersuchen Sie rechnerisch, zu welchem Zeitpunkt der höchste Blutzuckerwert vorliegt, und berechnen Sie diesen Wert.

Ohne Nachweis darf verwendet werden: $f'(t) = -\frac{1}{250\,000} \cdot (t-20) \cdot (t^2 - 300 \cdot t + 20\,000)$.

(7 Punkte)

c) Bei der Lösung einer Aufgabenstellung im gegebenen Sachzusammenhang wurden mit einem MMS Berechnungen durchgeführt. Dabei ergab sich:

- Die Gleichung $f''(t) = 0$ hat die beiden Lösungen t_1 und t_2 mit $t_1 \approx 54{,}6$ und $t_2 \approx 158{,}7$.
- $f'(0) = 1{,}6$, $f'(t_1) \approx -0{,}91$, $f'(t_2) \approx 1{,}35$, $f'(240) \approx -4{,}93$.

(1) *Geben Sie eine passende Aufgabenstellung im Sachzusammenhang zu den angegebenen Berechnungen an.*

(2) *Erläutern Sie den dargestellten Lösungsweg.*

(3) *Formulieren Sie einen Antwortsatz zu Ihrer Aufgabenstellung.*

(2 + 3 + 1 Punkte)

d) Gegeben sind die beiden Terme

I $\quad \frac{f(120) - f(0)}{120 - 0}$ $\qquad$ II $\quad f'(120)$.

(1) *Geben Sie an, welche geometrische Bedeutung die beiden Terme* I *und* II *für den Graphen von f haben und veranschaulichen Sie Term* I *in der Abbildung.*

Die Werte der beiden Terme I und II wurden berechnet:

I $\quad \frac{f(120) - f(0)}{120 - 0} = -0{,}224$ $\qquad$ II $\quad f'(120) = 0{,}64$.

(2) *Geben Sie die Bedeutung der beiden berechneten Werte im Sachzusammenhang an.*

(4 + 4 Punkte)