# Problemas – Tema 8

# Problemas resueltos - 8 - continuidad en funciones definidas a trozos

**1. Estudia la continuidad de la siguiente función en los puntos** $x=1$ **y** $x=5$ **.**

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & si \quad x<1 \\ 2x-4 & si \quad 1\le x\le 5 \\ \ln(x-5) & si \quad x>5 \end{cases}$$

Estudiemos la continuidad en $x=1$ .

$$\exists f(1)=2\cdot 1-4=-2$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-4x+3}{x-1}=\frac{0}{0} \quad \rightarrow \quad \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-4x+3}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x-3)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x-3)=-2$$

$$\lim_{x\to 1^+}(2x-4)=-2$$

$$f(1)=-2=L$$

La función es continua en $x=1$ .

Estudiemos la continuidad en $x=5$ .

$$\exists f(5)=2\cdot 5-4=6$$

$$\lim_{x\to 5^-}(2x-4)=6$$

$$\lim_{x\to 5^+}\ln(x-5)=-\infty$$

La función presenta una discontinuidad no evitable de salto infinito en $x=5$ .

**2. Determina $a$ y $b$ para que la función sea continua en $x=0$ y en $x=3$ .**

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si \quad x<0 \\ a\,x+b & si \quad 0\leq x\leq 3 \\ \dfrac{x^2-9}{x-3} & si \quad x>3 \end{cases}$$

La función es continua en $x=0$ si se cumplen los siguientes requisitos.

$$\exists\, f(0)=a\cdot 0+b=b$$

$$\lim_{x\to 0^-}(x^2+1)=0+1=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}(a\,x+b)=b$$

Límites laterales iguales → $b=1$ → Existe el límite y vale $L=1$

$$f(0)=1=L$$

La función es continua en $x=3$ si se cumplen los siguientes requisitos.

$$\exists\, f(3)=a\cdot 3+b=3\,a+1$$

$$\lim_{x\to 3^-}(a\,x+b)=3\,a+1$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}(x+3)=6$$

Límites laterales iguales → $3\,a+1=6$ → $a=\dfrac{5}{3}$

$$f(3)=6=L$$

**3. Calcula el valor de** $k$ **para que la función** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2} & si \quad x\neq 1 \; y \; x\neq 2 \\ -\sqrt{2k+1} & si \quad x=1 \end{cases}$ **sea continua en** $x=1$ **.**

Aplicamos las tres condiciones de continuidad de una función en un punto.

$\exists f(1)=-\sqrt{2k+1}$

$\lim_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\dfrac{0}{0}$ → Indeterminación → $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1^-} \dfrac{(x+1)}{(x-2)}=-2$

$\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\dfrac{0}{0}$ → Es el mismo límite de antes → $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=-2$

Igualamos los límites laterales → $L=-2=-2$

Y comprobamos que la imagen en el punto coincide con el límite:

$f(1)=L \quad -2=-\sqrt{2k+1} \;\rightarrow\; 4=2k+1 \;\rightarrow\; k=\dfrac{3}{2}$

**4. ¿Para qué valores de $a$ y $b$ la siguiente función es continua en todos los puntos de su dominio de definición?**

$$f(x)=\left\{\begin{matrix} b x^2+a x \quad si \quad x<-1 \\ \dfrac{a}{x} \quad si \quad -1\le x<1 \ , \ x\neq 0 \\ \dfrac{x^2+a x+1}{x+1} \quad si \quad x>1 \end{matrix}\right\}$$

Tenemos que estudiar la continuidad en los intervalos abiertos y en los puntos frontera.

Intervalos abiertos:

$x<-1$ → función polinómica → continua en todo ℝ → continua en $(-\infty,-1)$

$-1<x<1$ → función continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ → función continua en $(-1,1)-\{0\}$

$x>1$ → función polinómica → continua en $\mathbb{R}-\{-1\}$ → función continua en $(1,+\infty)$

Estudio en el punto frontera $x=-1$ :

$$f(-1)=\frac{a}{-1}=-a$$

$$\lim_{x\to -1^-} b x^2+a x=b-a \ , \ \lim_{x\to -1^+} \frac{a}{x}=\frac{a}{-1}=-a \ \rightarrow \ b-a=-a \ \rightarrow \ b=0$$

$$f(-1)=L \ \rightarrow \ -a=b-a \ \rightarrow \ b=0$$

Estudio en el punto frontera $x=1$ :

$\nexists f(1)$ → ¡OJO! la función no toma ningún valor para $x=1$ → función no definida para $x=1$ .

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{a}{x}=\frac{a}{1}=a \ , \ \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+a x+1}{x+1}=\frac{2+a}{2} \ \rightarrow \ a=\frac{2+a}{2} \ \rightarrow \ 2a=2+a \ \rightarrow \ a=2$$

Los límites laterales existen, coinciden y son finitos siempre que $a=2$ . Pero la función no está definida en $x=1$ . Estamos ante una discontinuidad evitable.

Por lo tanto en $x=1$ la función no es continua.

**5. Determinar $a$ y $b$ para que la función sea continua en toda la recta real.**

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3 & si \quad x<0 \\ a\,x+b & si \quad 0\le x\le 2 \\ x^3-1 & si \quad x>2 \end{cases}$$

Lo primero es estudiar la continuidad en los intervalos abiertos.

$x<0 \rightarrow f(x)=x^2+3$ → es continua en $x<0$ por ser polinómica

$0<x<2 \rightarrow f(x)=a\,x+b$ → es continua en $0<x<2$ por ser polinómica

$x>2 \rightarrow f(x)=x^3-1$ → continua en $x>2$ por ser polinómica

Analizamos la continuidad en los puntos frontera.

Para $x=0$ :

$f(0)=a\cdot 0+b=b$

$\begin{cases} \lim_{x\to 0-} x^2+3=3 \\ \lim_{x\to 0+} a\,x+b=b \end{cases}$ → Límites laterales iguales → $b=3$

$f(0)=L \rightarrow b=b$

Para $x=2$ con $b=3$ :

$f(2)=2a+3=2a+3$

$\begin{cases} \lim_{x\to 2-} a\,x+3=2a+3 \\ \lim_{x\to 2+} x^3-1=8-1=7 \end{cases}$ → Límites laterales iguales → $2a+3=7 \rightarrow a=2$

$f(2)=L \rightarrow 2a+3=2a+3$

Por lo tanto, para $a=2$ y $b=3$ tendremos $f(x)$ continua en toda la recta real.