

POLIEDROS REGULARES.

Se entiende por poliedro regular, un poliedro cuyas caras son un único polígono regular y además, en cada vértice concurren el mismo número de polígonos.

Con estas dos consideraciones, sólo existen 5 poliedros regulares convexos: Tetraedro, Cubo (Hexaedro), Octaedro, Dodecaedro e icosaedro.

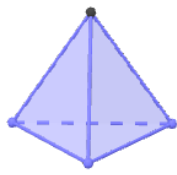
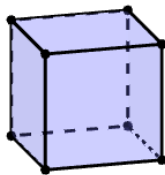
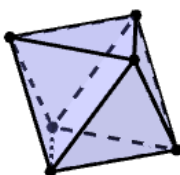
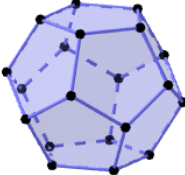
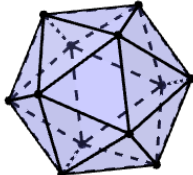
Los poliedros regulares verifican la fórmula de Euler,

$$C+V=A+2$$

Todos los poliedros convexos verifican esta igualdad.



Completa, utilizando la relación anterior los valores de C,V,A que no están escritos.

Tetraedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
				
Caras=4	C=6	C=	C=12	C=20
Vértices=4	V= 8	V= 6	V=	V=12
Aristas=6	A=	A= 12	A=32	A=



Vamos a construir estos poliedros utilizando el software GeoGebra, en particular la vista 3D de este programa.

Antes de empezar con construcción de poliedros regulares, vamos a explorar un poco GeoGebra 3D.

GeoGebra 3D

Una de las novedades más significativas de la versión 5.0 de GeoGebra (septiembre 2014) fue la incorporación de la vista 3D.

La vista 3D tiene barra de herramientas propia, que contiene herramientas comunes a la vista grafica 2D y otras específicas para trabajar en el espacio.

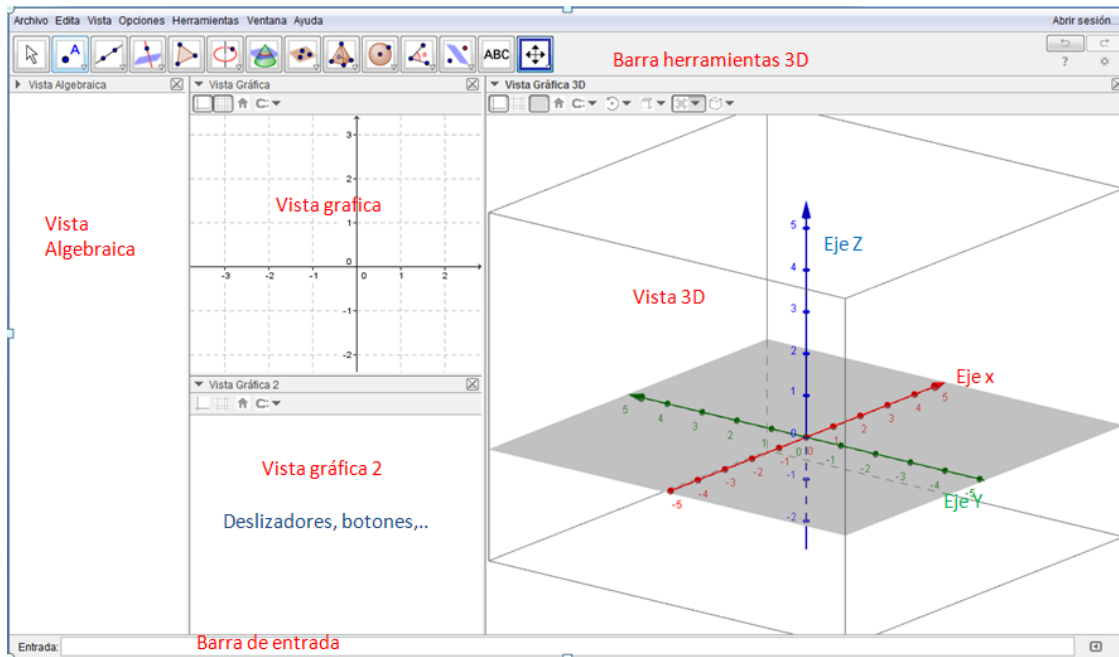


Además de las herramientas de esta barra hay multitud de comandos que amplían las posibilidades de construcción en el espacio.

La vista 3D, está interconectada con el resto de vistas, lo que aumenta su potencia y funcionalidad.

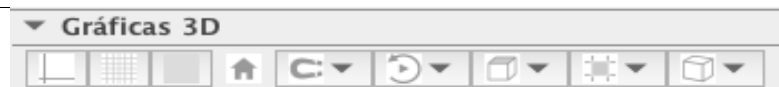
Para trabajar en la vista 3D, es conveniente que ésta ocupe una parte grande de la pantalla, las vistas algebraica y grafica (o grafica 2) deben estar presentes, por lo que es bueno tener una disposición de pantalla en que nos sintamos cómodos.

Una disposición adecuada puede ser como se muestra:





Ocasionalmente pueden abrirse otras ventanas: CAS, Hoja Cálculo, proyección 2D,...




Estos botones facilitan la manipulación de la vista 3D




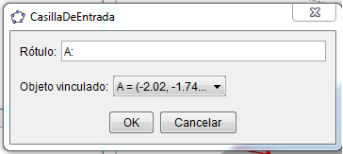


1. Primeros pasos con GeoGebra 3D

Creación de Puntos 3D. Varias formas de hacerlo.

- Selecciona la herramienta punto  y haz clic en la vista 3D, el punto se crea sobre el plano XY. 

Este punto puede desplazarse con el ratón, bien sobre el plano XY o bien verticalmente.	Al hacer clic en el punto aparecen las imágenes:	
	 Desplazamiento horizontal	 Desplazamiento vertical.

- En la barra de entrada podemos introducir directamente sus coordenadas $A = (1,1,2)$ y el punto se crea en esa posición que puede moverse con ratón como se ha indicado.
- Utilizando casillas de entrada. Es la forma más versátil.

	Crea un punto en plano XY	
	Crea casilla de entrada en vista gráfica o vista gráfica 2 En rótulo escribe A: Objeto vinculado A	
Ahora puede editarse la casilla e introducir el punto que se desea o bien mover el punto con el ratón.		

La construcción de rectas, planos, y figuras geométricas es bastante intuitiva utilizando la barra de herramientas que muestra la vista 3D.

Segmentos y Rectas. Basta seleccionar la herramienta correspondiente y seleccionar dos puntos.


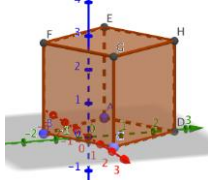
Polígonos. Crea tres puntos, al menos uno de ellos fuera del plano XY . Selecciona la herramienta Polígono y construye el triángulo que tiene esos puntos como vértices.

Plano. Construye ahora el plano que pasa por esos tres puntos.

La construcción de prismas, pirámides, cilindros conos y esfera son muy intuitivos desde la barra de herramientas, pero en esta sesión vamos a centrarnos en poliedros regulares.

2.- Poliedros regulares.

Construir un poliedro regular en GeoGebra es muy sencillo.

	Crea dos puntos sobre el plano XY. Sean A y B	
Cubo(A,B) y pulsa INTRO, y ya está construido un cubo de Arista AB.		
Modifica los aspectos visuales. Pulsa botón derecho en vista algebraica sobre cubo , elige Propiedades. Cambia color, estilo, opacidad,...		
Construido el cubo así, puede ocurrir que si giramos la vista gráfica se salga de la pantalla,...		

Vamos a utilizar a partir de ahora una plantilla que facilita la construcción de poliedros.

Abrir archivo plantillapoliedros.ggb (valida también para otras construcciones 3D).

Plantilla preparada para facilitar construcción de poliedros regulares, de forma que ya aparezcan centrados en eje Z, y así facilitar rotaciones y otras operaciones.

Seleccionar **n=3 para construir tetraedro, octaedro e icosaedro** (cara triángulo equilátero), **n=4 para construir cubo** y **n=5 para dodecaedro**.

Para construir un poliedro regular basta escribir la instrucción:

Nombrepoliedro(A,B,C) con nombrepoliedro= tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro o icosaedro según el poliedro regular que se desee construir.

Utilizando esta plantilla, vamos a construir los 5 poliedros regulares convexos y “hacer matemáticas” a partir de su construcción.

Actividad 1. El cubo.

1.1. Abre el archivo plantillapoliedros.ggb y construye un cubo.

Construye un cubo, para ello sitúa el deslizador n=4 y escribe en la barra de entrada Cubo(A,B,C). Modifica aspectos visuales. (Botón Mejor color de las caras suave y opacidad no muy grande.

1.2 Cortes en el cubo.

Estudiar cortes en cubo por plano perpendicular a recta que pasa por vértices opuestos .

Cubo(A,B,C) crea el cubo a		
	Recta. Selecciona dos vértices opuestos.	
	Construye un punto sobre la recta	
	Plano perpendicular. Selecciona punto y recta.	
	Herramienta intersección de superficies. Selecciona el plano y el cubo.	
Botón derecho sobre plano y elige “representación 2D de ...” Se muestra la sección plana.		
Mueve el punto sobre la recta para ver en la nueva vista las secciones que se originan.		

¿Qué polígonos se obtienen como corte del cubo?

¿Es posible que la sección sea un hexágono regular? ¿Dónde ha de estar situado el punto?

1.3 Haz una construcción similar, pero ahora, en vez de recta por dos vértices opuestos, sitúa los dos puntos sobre aristas opuestas.

¿qué figuras polígonos puedes conseguir ahora?

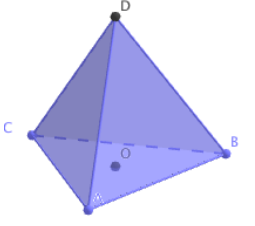
Es posible obtener un pentágono? ¿Puede ser regular?

¿Es posible obtener polígonos de más de 6 lados? ¿Por qué?


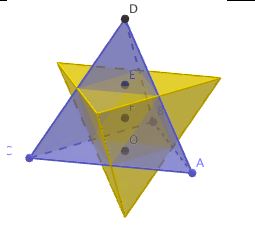
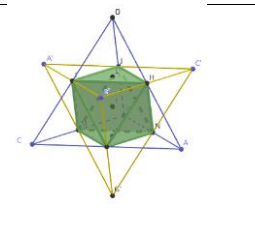


Intenta conseguir distintos tipos de triángulos y cuadriláteros.

Actividad 2. Tetraedro

2.1. Construye utilizando la plantilla un tetraedro.

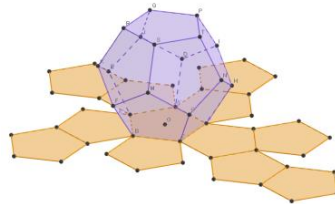

<p>Selecciona $n=3$ en la plantilla.</p> <p>Tetraedro(A,B,C),</p>	
<p>Botón derecho en vista algebraica sobre tetraedro y cambia aspectos visuales: color, grosor,...</p>	

2.2. Construir a partir del tetraedro la estrella octángula, el cubo y el octaedro.

	<p>Punto medio centro, y selecciona el centro de la base O y el vértice D</p>	 
	<p>Selecciona O y E (punto medio del apartado anterior)</p>	
<p>Refleja(a,F) con esto hacemos simetría central del tetraedro en el punto F.</p>		
	<p>Punto medio de las aristas del tetraedro inicial.</p>	
<p>Octaedro(H,I,J) o las letras que correspondan</p>		

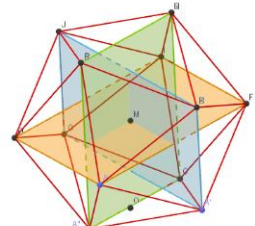
¿Qué poliedro se obtiene uniendo los 8 vértices de los dos tetraedros? Intenta construirlo con GeoGebra.

Actividad 3. Desarrollo plano de los poliedros regulares.

Abre el archivo plantillapoliedros.ggb y selecciona $n=5$		
Construye un dodecaedro. Dodecaedro(A,B,C) sea a .		
$a=2$ 	En vista gráfica 2, deslizador entre 0 y 1. Sea t su nombre	
Desarrollo[a,t] Basta mover el deslizador para obtener el desarrollo. Oculta e poliedro, y anima el deslizador .		

De igual forma puede construir el desarrollo del resto de poliedros regulares, y también de prismas y pirámides.

Actividad 4. Icosaedro y rectángulo áureo.

Selecciona $n=3$ en plantilla Icosaedro(A,B,C)	
Construye sobre él tres rectángulos perpendiculares uniendo vértices de aristas opuestas.	
Comprueba que los rectángulos construidos son áureos. Mide la longitud de los lados de uno de los rectángulos y comprueba que su cociente es:	
$\frac{a+b\sqrt{5}}{2}$	

Puede hacerse también de forma inversa la construcción:

Construir tres rectángulos áureos perpendiculares y sobre sus vértices construir el icosaedro.

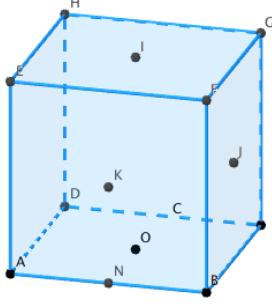

Para ello define: $a=0$, $b=1$, $c = (1 + \sqrt{5}) / 2$

Define los puntos (a, b, c) , $(a, b, -c)$, $(a, -b, c)$, $(a, -b, -c)$,... rotando las letras.

Actividad 5. Dualidad de poliedros regulares

Se denomina poliedro dual al poliedro que tiene los vértices en los centros de las caras del poliedro inicial.

¿Qué poliedro es el dual del cubo? Vamos a comprobarlo utilizando GeoGebra.

<p>Selecciona $n=4$ en la plantilla, Cubo (A,B,C)</p> <p>Modifica aspectos visuales(color, grosor líneas, opacidad) del cuboo seleccionándolo en ventana algebraica con botón derecho.</p>	
<p> Punto medio y selecciona dos vértices opuestos de cada una de las caras.</p>	
<p>¿Qué poliedro se forma al unirlos puntos centrales de cada cara? ¿Qué polígono es cada cara del nuevo poliedro? ¿Cuántas caras tiene?</p>	
<p>Octaedro(I,J,K)</p>	
<p>Cambia aspectos visuales. Puedes construir casillas de control para mostrar/ocultar el poliedro y su dual.</p>	


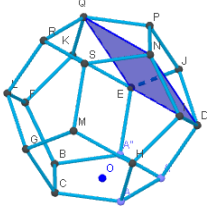
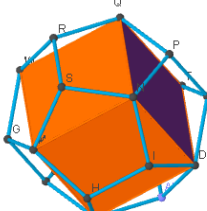
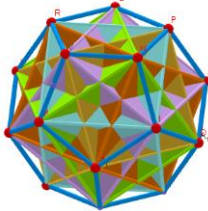
5.2 Utiliza GeoGebra para construir el poliedro dual del dodecaedro.

En este caso para determinar el centro de las caras (pentágonos) del dodecaedro, es más sencillo trazar la recta perpendicular a cara cara por el centro del dodecaedro

¿Qué poliedro es el dual del tetraedro?

Actividad 6 . Inscribir un poliedro regular en otro.

Inscribir un cubo en un dodecaedro. Mediante rotación del cubo, inscribir 5 cubos en dodecaedro.

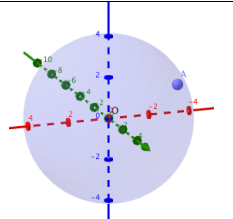



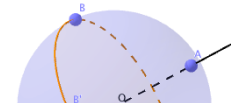








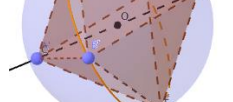
<p>Sobre la plantilla de apartado 1. Seleccionar $n=5$.</p>		
<p>Dodecaedro(A,B,C) , cambia en propiedades la opacidad a valor 0.</p>		
	<p>Construir polígono eligiendo 4 puntos que formen cuadrado.</p>	
<p>Cubo(D,N,Q). Sea b nombre del cubo.</p>		
		
<p>Mediante rotaciones del cubo sobre el eje Z puede construirse la figura de la derecha donde se representan cinco cubos en el dodecaedro.</p>		
<p>Rota (b, 72°, EjeZ) Repetir tres veces cambiando el nombre del cubo a rotar o bien el ángulo.</p>		

Actividad 7. Inscribir los poliedros regulares en la esfera.

Una vez construido un poliedro, construir la esfera que pasa por todos sus vértices es muy sencillo. Basta determinar el centro del poliedro y a continuación construir la esfera centrada en él y que pase por un vértice cualquiera.

7.1 Vamos a intentar el procedimiento inverso. Dada una esfera, construir un poliedro inscrito en ella.

Construir el octaedro inscrito en una esfera . (El octaedro es el poliedro más sencillo de inscribir en la esfera)

<p>$O=(0,0,0)$ para construir el centro de la esfera en el origen de coordenadas.</p>	
 <p>Esfera(O,4) construimos la esfera de centro O y radio 4.</p>	
 <p>Selecciona la herramienta punto y haz clic sobre la esfera.</p>	
 <p>Simetría central y selecciona A y O en ese orden, sea A' el punto simétrico. Obien escribe: Refleja(A,O)</p>	
 <p>Recta que pasa por A y A'. Recta(A,A')</p>	
 <p>Plano perpendicular a la recta por el punto O</p>	
 <p>Intersección de dos superficies y selecciona el plano y la esfera. Se construye la circunferencia intersección. Puedes ocultar el plano.</p>	
 <p>Construye un punto B sobre la circunferencia</p>	
 <p>Rotación Axial y selecciona el punto B, a recta y en el cuadro que aparece a continuación cambia 45º por 90º</p>	
<p>Octaedro(B,A,A')</p>	

Estima que proporción o porcentaje es el volumen es el octaedro respecto al de la esfera.

Comprueba midiendo los volúmenes si tu estimación ha sido buena. Basta utilizar el comando Volumen(a) . Siendo a el sólido que queremos medir.