Problemas – Tema 9

Problemas resueltos - 27 - área y volumen

1. Sean los puntos $A(0,1,1)$ **,** $B(2,1,3)$ **,** $C(-1,2,0)$ **y** $D(2,1,m)$

a) Calcula m **par** A, B, C y D **estén en un mismo plano.**

b) Determina la ecuación del plano respecto los puntos A **y** B **son simétricos.**

c) Calcula el área del triángulo de vértices A, B, C **.**

a) Los cuatro puntos son coplanarios si los tres vectores que podemos formar tomando uno de los puntos como origen común (por ejemplo el punto A), pertenecen a un mismo plano. Es decir, los tres vectores debe ser linealmente dependientes (por ser coplanarios). Por lo tanto, el rango de la matriz cuadrada 3×3 que forman los tres vectores no puede ser tres: el determinante de esa matriz debe ser nulo.

$$\vec{AB}=(2,0,2) \quad , \quad \vec{AC}=(-1,1,-1) \quad , \quad \vec{AD}=(2,0,m-1)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & m-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & m-1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow 2m-6=0 \rightarrow m=3$$

Los cuatro puntos pertenecen al mismo plano siempre que $m=3$.

b) Buscamos un plano de ecuación general $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$ que cumpla que la recta r que une los puntos $A(0,1,1)$ y $B(2,1,3)$, corte al plano de manera perpendicular justo en el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

Con el vector director $\vec{u_r}$ de la recta tendremos el vector normal al plano $\vec{u_\Pi}=(A,B,C)$. Y con el punto medio del segmento $\overline{AB}$ tendremos las coordenadas de un punto del plano, por lo que podremos obtener el término independiente de la ecuación general $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$.

$$\vec{AB}=\vec{u_r}=(2,0,2) \rightarrow \vec{u_\Pi}=(2,0,2)\perp\Pi$$

$$P= \text{punto medio } \overline{AB} =\left(\frac{0+2}{2},\frac{1+1}{2},\frac{1+3}{2}\right)=(1,1,2)$$

$$\Pi: 2x+2z+D=0 \quad , \quad P(1,1,2)\in\Pi \rightarrow 2+4+D=0 \rightarrow D=-6$$

$\Pi: 2x+2z-6=0$ → Podemos simplificar a → $\Pi: x+z-3=0$

c) Nuestro triángulo tiene por vértices $A(0,1,1)$, $B(2,1,3)$, $C(-1,2,0)$. Si recordamos una de las aplicaciones del producto vectorial, el área del triángulo de vértices conocidos cumple la siguiente relación:

$$A_{Triángulo}=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|$$

El módulo del producto vectorial podemos obtenerlo de la siguiente relación.

$$|\vec{AB}\times\vec{AC}|=|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|\cdot sen(\alpha)$$

Siendo α el ángulo formado por ambos vectores.

O bien podemos directamente el vector resultante del producto vectorial, y luego aplicar su módulo. Vamos a tomar esta segunda opción.

$$\vec{AB}=(2,0,2) \quad , \quad \vec{AC}=(-1,1,-1)$$

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 0 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=0-2\hat{j}+2k-(0+\hat{2}\hat{i}-2\hat{j})=-2\hat{i}+2\hat{k}$$

$$|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

Siendo el área del triángulo finalmente:

$$A_{Triángulo}=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\quad u^2$$

2. Dos de los tres vértices de un triángulo son los puntos $A(1,1,1)$ y $B(1,1,3)$. El tercer vértice C está en la recta r que pasa por los puntos $P(-1,0,2)$ y $Q(0,0,2)$.

a) Determinar la ecuación de la recta r.

b) Calcular el punto C para que el área del triángulo sea igual a $\sqrt{15}\,u^2$.

a) El vector director de la recta r será:

$$\vec{PQ}=(1,0,0)$$

Si la recta pasa por el punto $Q(0,0,2)$, la ecuación de la recta será → $r:\begin{Bmatrix} x=a \\ y=0 \\ z=2 \end{Bmatrix}$

b) El punto C es un punto arbitrario de la recta → $C(a,0,2)$ → Este punto cumple que forma un triángulo con los puntos A y B que encierra un área de $\sqrt{15}\,u^2$. El área del triángulo se calcula como la mitad del módulo del producto vectorial de $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$.

$$\vec{AB}=(0,0,2)$$

$$\vec{AC}=(a-1,-1,1)$$

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ a-1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0+0+2(a-1)\hat{j}-(0+0-2\hat{i})=2\hat{i}+2(a-1)\hat{j}=(2,2a-2,0)$$

El módulo de este vector resulta:

$$|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\sqrt{2^2+(2a-2)^2}=\sqrt{4+4a^2+4-8a}=\sqrt{4a^2-8a+8}=2\sqrt{a^2-2a+2}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\sqrt{15} \quad\rightarrow\quad \sqrt{a^2-2a+2}=\sqrt{15} \quad\rightarrow\quad a^2-2a+2=15 \quad\rightarrow\quad a^2-2a-13=0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$a=\frac{2\pm\sqrt{4+52}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{56}}{2}$$

Por lo que punto C solución puede tomar dos valores:

$$C\left(\frac{2+\sqrt{56}}{2},0,2\right) \quad , \quad C\left(\frac{2-\sqrt{56}}{2},0,2\right)$$

3. Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(1,3,-4), B(2,6,7), C(5,-1,2)$ **.**

a) Calcular el área del paralelogramo.

b) Obtener el cuarto vértice del paralelogramo.

a) Si obtenemos dos vectores del paralelogramo con un vértice común, podremos obtener su área haciendo el módulo del producto vectorial de ambos vectores.

$$\vec{AB}=(1,3,11) \quad , \quad \vec{AC}=(4,-4,6) \quad \rightarrow \quad Área=|\vec{AB}\times\vec{AC}|$$

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 3 & 11 \\ 4 & -4 & 6 \end{vmatrix}=18\hat{i}+44\hat{j}-4\hat{k}-(12\hat{k}-44\hat{i}+6\hat{j})=62\hat{i}+38\hat{j}-16\hat{k}=(62,38,-16)$$

$$Área=|\vec{AB}\times\vec{AC}|=6\sqrt{154}\,u^2$$

b) El cuarto vértice lo obtenemos sabiendo que los lados opuestos del paralelogramo son paralelos y de igual longitud. Si $D(x,y,z)$, tendremos:

$$\vec{AB}=\vec{DC} \quad \rightarrow \quad (1,3,11)=(5-x,-1-y,2-z)$$

Igualamos componentes → $(x,y,z)=(4,-4-9)$

4. Sean los vectores $\vec{u}=(1,0,1)$, $\vec{v}=(0,2,1)$, $\vec{w}=(m,1,n)$.

a) Halla m y n sabiendo que los tres vectores son linealmente dependientes y que $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$.

b) Para $n=1$, halla los valores de m para que el tetraedro determinado por los tres vectores tenga volumen 10 unidades cúbicas.

a) Tres vectores linealmente dependientes no tienen rango igual a 3. Por lo tanto, el determinante formado por los tres vectores debe anularse.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & n \end{pmatrix} \rightarrow |A|=0 \rightarrow 2n+0+0-(2m+0+1)=0 \rightarrow 2n-2m=1$$

Una segunda condición la sacamos de los vectores que son ortogonales entre sí, es decir, que son perpendiculares. El producto escalar de dos vectores perpendiculares es igual a 0.

$$\vec{u}\cdot\vec{w}=0 \rightarrow (1,0,1)\cdot(m,1,n)=0 \rightarrow m+n=0 \rightarrow m=-n$$

Con ambas condiciones tenemos un sistema 2x2. Llevamos $m=-n$ a la primera condición.

$$2n-2m=1 \rightarrow 4n=1 \rightarrow n=\frac{1}{4} \ , \ m=\frac{-1}{4}$$

b) El volumen de un tetraedro es un sexto del valor absoluto del producto mixto de los tres vectores.

$$V=\frac{1}{6}|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$$

El producto mixto podemos obtenerlo de forma directa mediante el siguiente determinante:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix}=2-(2m+1)=1-2m$$

Por lo tanto:

$$10=\frac{1}{6}|1-2m| \quad \rightarrow \quad 60=|1-2m|$$

Es una ecuación con valor absoluto, por lo que debo considerar la opción positiva y la opción negativa en argumento del valor absoluto.

$$60=1-2m \quad \rightarrow \quad m=\frac{-59}{2}$$

$$60=2m-1 \quad \rightarrow \quad m=\frac{61}{2}$$

5. Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,1,0)$, $B(1,0,2)$ y $C(0,2,1)$.

a) Halla el área de dicho triángulo.

b) Calcula el coseno del ángulo en el vértice A .

a) El área de un triángulos se obtiene como la mitad del módulo del producto vectorial de dos vectores con vértice en común.

El producto vectorial da un vector perpendicular al plano formado por los otros dos. Se puede calcular las componentes de este vector con ayuda de un determinante.

$$\vec{AB}=(0,-1,2) \quad , \quad \vec{AC}=(-1,1,1)$$

$$Área=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}| \quad \rightarrow \quad \vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicamos regla de Sarrus para resolver el determinante:

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=-\hat{i}-2\hat{j}+0-(\hat{k}+2\hat{i}+0)=-3\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k} \quad \rightarrow \quad \vec{AB}\times\vec{AC}=(-3,-2,-1)$$

Obtenemos módulo del vector → $|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\sqrt{9+4+1}=\sqrt{14} \quad \rightarrow \quad Área=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\frac{\sqrt{14}}{2}\ u^2$

b) El ángulo del vértice A será un ángulo comprendido entre 0º y 180º que podemos obtener con ayuda del producto escalar. Ojo, no es el ángulo entre dos rectas, sino entre dos vectores; por lo tanto, no aplicamos el valor absoluto al numerador

$$\cos(\hat{A})=\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|} \quad \rightarrow \quad \cos(\hat{A})=\frac{0-1+2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{15}$$

No nos lo pide el enunciado, pero el ángulo final sería: $\hat{A}\simeq 75{,}04\,^o$