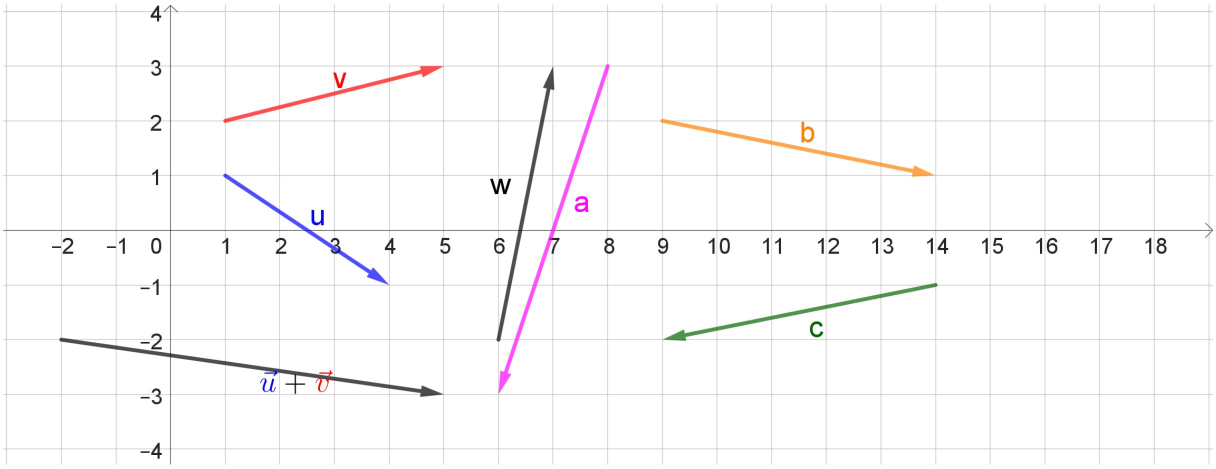


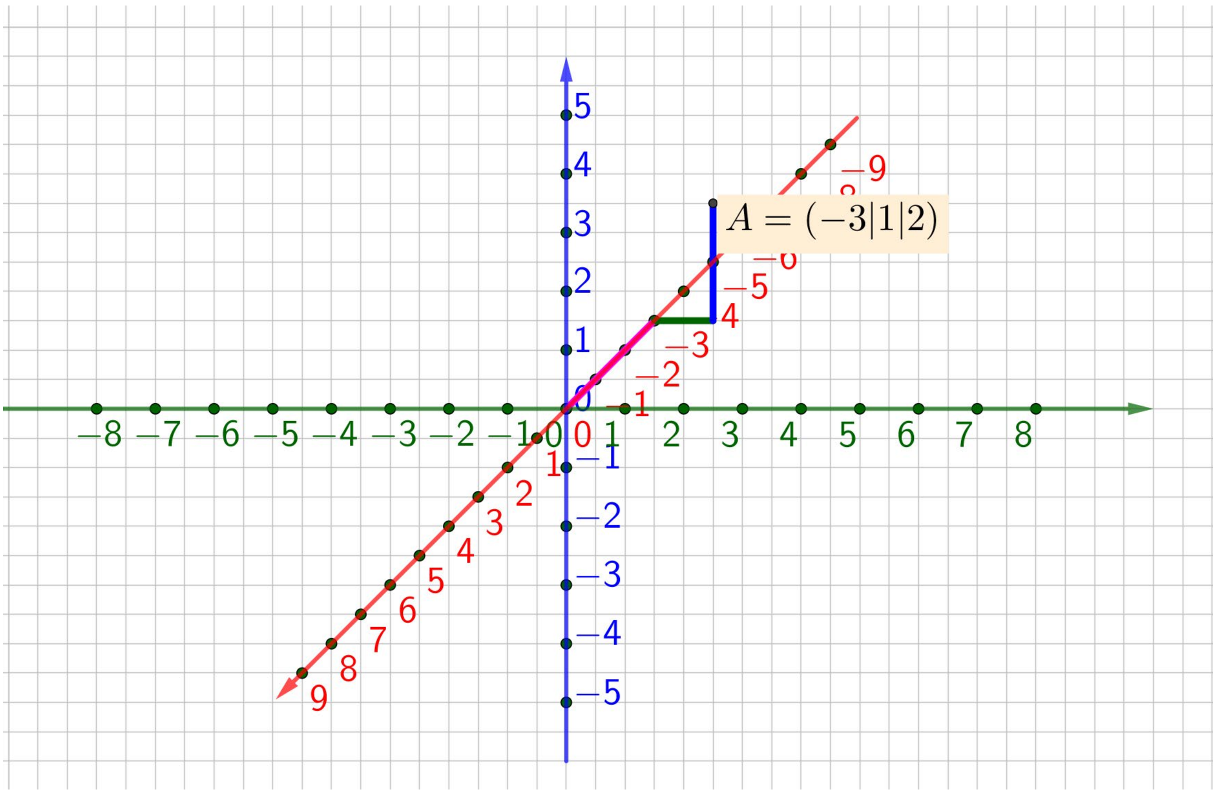
Beispiel:

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} + \vec{a} =$$

$$\vec{b} + \vec{c} =$$

Aufgabe 2



Fortsetzung auf der nächsten Seite.

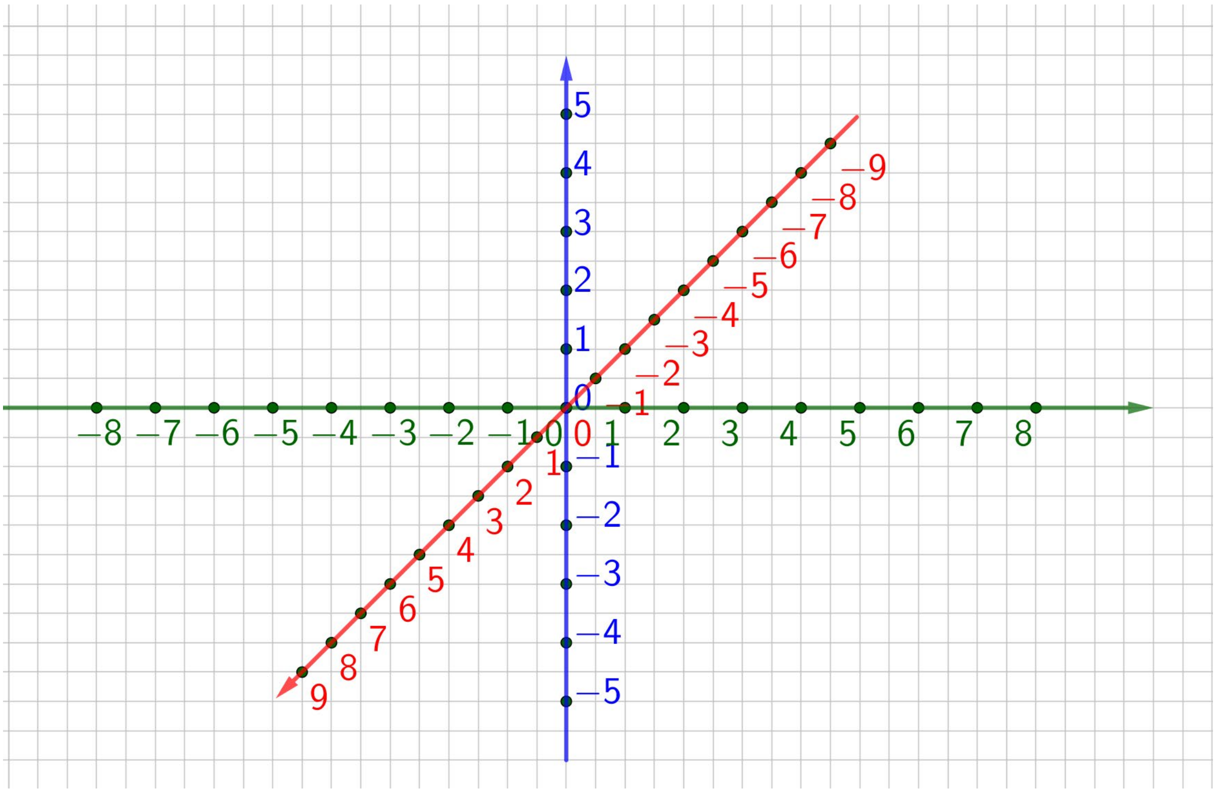
Ein 3-dimensionales Koordinatensystem zeichnet man ins Heft, indem man die y-Achse horizontal zeichnet, die z-Achse vertikal zeichnet und die x-Achse im 45°-Winkel in die Richtig nach links-unten zeichnet.

Die Skalierung auf der x-Achse wird perspektivisch verkürzt.

Korrekt ist eine Verkürzung mit dem Faktor $\sqrt{\frac{1}{2}}$, wie in der Zeichnung oben gezeigt. Wenn man auf „Kästchenpapier" zeichnet, kann man z.B. die Skalenstriche auf der y-Achse und der z-Achse in Abstand von zwei „Kästchen" zeichnen und die Skalenstriche auf der x-Achse im Abstand einer „Kästchendiagonale".

Zeichnen Sie weitere Punkte in das Koordinatensystem ein und geben Sie die Koordinaten der Punkte an.

Aufgabe 3



Zeichen Sie die Punkte $A(4|1|3), B(0|5|1), C(-4|-3|-2)$ und $D(-1,0,0)$ in das Koordinatensystem.

Zeichnen Sie die Gerade g durch die Punkte A und B und die Gerade h durch die Punkte C und D.

Geben Sie die Ortsvektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{d}$ der vier Punkte an.

Geben Sie die Geradengleichungen der beiden Geraden an.

Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden (auf der nächsten Seite finden Sie eine Beispielrechnung mit zwei anderen Geraden).

Beispielrechnung:

A = (-3, 5, 2)
B = (-1, -11, 6)
C = (2, -5, -1)
D = (0, -4, 1.5)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -11 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Ein Richtungsvektor der Geraden g ist:

$$\vec{r}_g = \begin{pmatrix} -1 \\ -11 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 \\ -11-5 \\ 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -16 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ein Richtungsvektor der Geraden h ist:

$$\vec{r}_h = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ -4+5 \\ \frac{3}{2}+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Alle Ortsvektoren $\vec{x}$ der Geraden g lassen sich durch die folgende Geradengleichung schreiben:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -16 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Alle Ortsvektoren $\vec{x}$ der Geraden h lassen sich durch die folgende Geradengleichung schreiben:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

In 3 Dimensionen müssen Geraden sich nicht schneiden. Wenn sich die Geraden aber schneiden, dann muss die folgende Gleichung für λ und μ eine Lösung besitzen:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -16 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Das führt zum LGS (linearen Gleichungssystem):

$$\left| \begin{matrix} -3 + 2\lambda = 2 - 2\mu \\ 5 - 16\lambda = -5 + 1\mu \\ 2 + 4\lambda = -1 + \frac{5}{2}\mu \end{matrix} \right|$$

Umstellen

$$\left|\begin{array}{r} 2\ \lambda + 2\mu = 5 \\ -16\ \lambda - 1\mu = -10 \\ 4\ \lambda - \frac{5}{2}\ \mu = -3 \end{array}\right|$$

Ein Gleichungssystem mit 2 Variablen und 3 Gleichungen ist nur dann lösbar, wenn die Lösung, die sich aus zwei der drei Gleichungen ergibt, auch die dritte Gleichung erfüllt.

Deshalb löse ich zunächst nur die ersten beiden Gleichungen des LGS

$$\left|\begin{array}{r} 2\ \lambda + 2\mu = 5 \\ -16\ \lambda - 1\mu = -10 \end{array}\right| \begin{array}{l} I \\ II \end{array}$$

$$\begin{array}{r} I \\ 2 \cdot II \end{array}\left|\begin{array}{r} 2\ \lambda + 2\mu = 5 \\ -32\lambda - 2\mu = -20 \end{array}\right| \begin{array}{l} I' \\ II' \end{array}$$

$$I' + II' : -30\lambda = -15 | \div (-30)$$

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

Einsetzen in I

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 2\mu = 5$$

$$2\mu + 1 = 5 | -1$$

$$2\mu = 4 | \div 2$$

$$\mu = 2$$

Wenn das LGS eine Lösung hat, dann müssen $\lambda = \frac{1}{2}$ und $\mu = 2$ auch die dritte Gleichung des LGS erfüllen:

$$4\ \lambda - \frac{5}{2}\ \mu = -3 \left| \begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{2} \\ \mu = 2 \end{array}\right.$$

$$4 \cdot \frac{1}{2} - \frac{5}{2} \cdot 2 = -3$$

$$2 - 5 = -3$$

$$-3 = -3$$

Das ist eine wahre Aussage. Die dritte Gleichung wird erfüllt. Jetzt kann man $\lambda = \frac{1}{2}$ in die Geradengleichung g einsetzen oder μ in die Geradengleichung h und man erhält den Ortsvektor des Schnittpunktes:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -16 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Der Schnittpunkt ist $S(-2|-3|4)$