

11

Modellieren der Oberkasseler Brücke

Didaktische Hinweise

Die folgende Station stellt eine Idee zur Modellierung räumlicher Objekte mit Hilfe der mathematischen Werkzeuge aus der Vektorgeometrie vor. Bei diesem Beispiel durchlaufen die Schülerinnen und Schüler alle vier Stufen des Modellierungskreislaufs. Neben der Kompetenz mathematisch zu modellieren sind technisches Verständnis und physikalische Kenntnisse über die Zerlegung von Kräften notwendig, da der Text, der die reale Situation beschreibt, zahlreiche Fachbegriffe und technisch-physikalische Darstellungen enthält.

Die Station bietet vielfältige Möglichkeiten der Differenzierung: Die Aufgabenstellung reicht vom einfachen Darstellen im selbstgewählten Koordinatensystem bis hin zum Berechnen der Zug- und Druck-Kräfte, die bei der Brücke auftreten können.

Arbeitsauftrag für SchülerInnen

Sie entwickeln mit Hilfe des Bildes *Oberkasseler Brücke.jpg* (*) ein mathematisches Modell der Oberkasseler Brücke, das Sie mit GeoGebra dynamisch darstellen und mit dessen Hilfe Sie quantitative Aussagen über Längen und Winkel an der realen Brücke machen können.

Wenn Sie nicht weiterkommen, können Sie sich die Tipps zu den Aufgaben anschauen. Versuchen Sie aber zuerst, eine eigene Lösung zu finden.

(*) Quelle: <https://structurae.de/fotos/207108-oberkasseler-bruecke>, Fotograf Nicolas Janberg

1. Aufgabe

- *Von der Realsituation zum realen Modell*

Diskutieren Sie in der Gruppe über Annahmen/ Vereinfachungen/ Idealisierungen, die Sie vornehmen wollen, um ein reales Modell der Oberkasseler Brücke zu erstellen. Beschreiben Sie das reale Modell so genau wie möglich.

- *Vom realen zum mathematischen Modell*

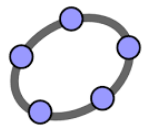
Übertragen Sie Ihr reales Modell in ein mathematisches Modell. Stellen Sie dieses Modell in einem zweidimensionalen Koordinatensystem dar.

- *Vom mathematischen Modell zur mathematischen Lösung*

Wie lang sind die einzelnen Seile von der Fahrbahn bis zum Pylon?
Wie groß sind die Abstände zwischen den Einspannpunkten auf der Fahrbahn?
Wie groß sind die Abstände zwischen den Einspannpunkten am Pylon?
Welche Winkel treten zwischen der Fahrbahn und den Seilen auf?

- *Passt die mathematische Lösung zur realen Situation?*

Überprüfen Sie, ob Ihre Ergebnisse zur realen Oberkasseler Brücke passen. Diskutieren Sie, wie die Vereinfachungen Ihres Modells die Ergebnisse beeinflussen. Wie könnten diese Annahmen verbessert werden?



2. Aufgabe

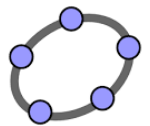
- a) Um zu quantitativen Aussagen über die auftretenden Kräfte in den Seilen und im Pylon zu kommen beschränken Sie sich auf Kräfte, die in der Ebene wirken, in der die Seile liegen. Sie zerlegen die vertikalen Kräfte, die an den unteren Seilenden angreifen, in eine Komponente, die in Richtung des Seils, und eine, die in horizontaler Richtung zum Pylon hin wirkt. Nach den Gesetzen der Physik ist der Vektor der vertikalen Kraft gleich der Summe der Vektoren der beiden Teilkräfte.

Sie stellen zunächst für einen Angriffspunkt die Zerlegung einer vertikalen Kraft von 200 kN grafisch dar.

- b) Untersuchen Sie anschließend, die resultierende Kraft im Pylon, wenn an allen unteren Seil-Enden gleich große Kräfte angreifen.
- c) Ermitteln Sie experimentell, wie groß die einzelne vertikale Kraft höchstens sein darf, wenn das Seil höchstens 5000 kN Zugkraft aufnehmen kann?

Joker

- Um wie viel dürfen sich die Kräfte auf beiden Seiten höchstens unterscheiden, wenn die Richtung der resultierenden Gesamtkraft im Pylon um höchstens 5° von der Senkrechten abweichen darf.
- Wie wirkt es sich auf die Richtung der Gesamtkraft im Pylon aus, wenn an einem der unteren Seilenden eine besonders große vertikale Kraft auftritt?
- ...



Informationsblatt

Die Oberkasseler Brücke, wenn auch nicht in ihrer heutigen Form, ist die älteste der Düsseldorfener Rheinbrücken für den Individualverkehr. Sie verbindet die am rechten Rheinufer liegende Innenstadt mit dem linksrheinischen Stadtteil Oberkassel.

In der heutigen Form ist die Oberkasseler Brücke eine Schrägseilbrücke mit einem auf der linken Rheinseite in der Mittelachse der Brücke stehenden, senkrechten Pylon und vier harfenförmig und in Längsrichtung fast symmetrisch angeordneten Seilen. Ihre von dem Pylon über den Rhein reichende Hauptöffnung hat eine Spannweite von 257,75 m. Dort lagert der Brückenträger auf einem unmittelbar am Ufer stehenden Pfeiler. Die andere, linksrheinische Hälfte überbrückt das Hochwasserbett. Das gesamte Brückenbauwerk ist 615 m lang.



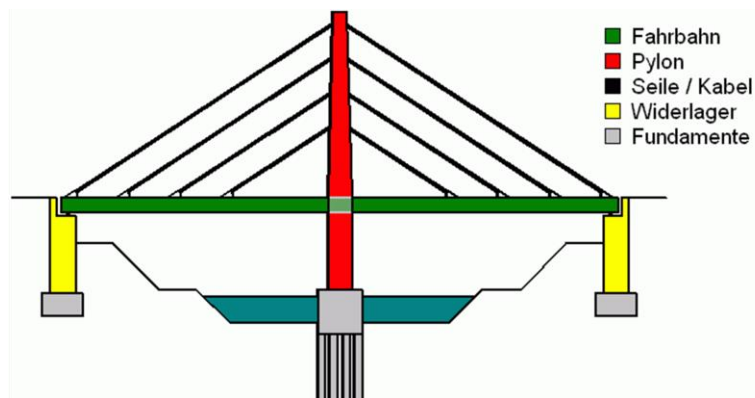
Quelle: <https://structurae.de/fotos/207108-oberkasseler-bruecke>
Fotograf Nicolas Janberg

Der 103 m hohe Pylon steht im Flachwasser der leichten Linkskurve des Flusses. Er überragt die Fahrbahn um 79 m. Von ihm sind in beide Fahrtrichtungen vier parallel laufende Doppelseile zur Mittelachse des Brückendecks gespannt, die im Pylon über Sattelager geführt sind. Die Doppelseile sind horizontal dicht nebeneinander angeordnet, so dass sie aus größerer Entfernung wie ein einziges Seil aussehen.

Der 103 m hohe Pylon steht im Flachwasser der leichten Linkskurve des Flusses. Er überragt die Fahrbahn um 79 m. Von ihm sind in beide Fahrtrichtungen vier parallel laufende Doppelseile zur Mittelachse des Brückendecks gespannt, die im Pylon über Sattelager geführt sind. Die Doppelseile sind horizontal dicht nebeneinander angeordnet, so dass sie aus größerer Entfernung wie ein einziges Seil aussehen.

Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Oberkasseler_Brücke

Schematische Darstellung der Oberkasseler Brücke

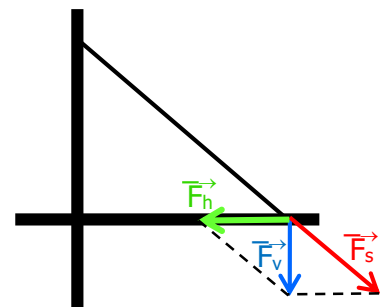


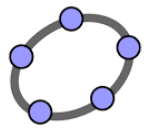
Nach Matthias079 - self drawn, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1175027>

Funktion des Tragwerks

Die vertikalen Lasten werden über die Spannseile in Form von Zugkräften an den Pylon geleitet und von diesem als Druckkraft senkrecht in den Baugrund eingeleitet. Die horizontalen Kraftkomponenten entstehen auf beiden Seiten in Richtung des Pylons und werden durch den Fahrbahnträger aufgenommen.

F_v : Vertikale Last, F_h horizontale Kraft, F_s Zugkraft im Seil.



**Tipps zur 1. Aufgabe**


- a) Im realen Modell werden nur vertikale Kräfte betrachtet, die an einzelnen Punkten angreifen. Außerdem gehen Sie von einer starren Form der Brücke aus. Beschreiben, inwiefern sich die Realität von diesen Annahmen unterscheidet.

- b) Sie öffnen in GeoGebra ein Grafikfenster und fügen als Hintergrundbild das Bild ein.

1 LE entspricht in der Realität 1 m, wenn die linke untere Ecke $(-178|-101)$ und die rechte obere Ecke $(173|132)$ ist.



In diesem Koordinatensystem definieren Sie die geometrischen Objekte, die die Brücke im mathematischen Modell beschreiben

Tipps

 oder *Bearbeiten* → *Bild einfügen von*,
Kontextmenü: *Eigenschaften, Grundeinstellungen* → *Hintergrundbild*

Eigenschaften, Position

Eigenschaften, Grundeinstellungen → *Objekt fixieren*

- c) Mit Hilfe der Werkzeuge  und  bestimmen Sie die Abstände und Winkel.
- d) Zur Beurteilung des Modells untersuchen Sie, welche Annahmen aus Teil a) zu eher zu kleinen oder eher zu großen Ergebnissen führen. Machen Sie dementsprechende Verbesserungsvorschläge.

Tipps zur 2. Aufgabe

- a) Sie wählen einen der Seil-Endpunkte aus und legen den Maßstab für die Darstellung der Kräfte im Koordinatensystem fest, z.B. 1 kN \sim 0,2 cm. Dann geben Sie den Vektor für die vertikale Kraft und die Richtung der Zugkraft im Seil ein, im Beispiel:

Eingabezeile

$F_h = \text{Vektor}[(0, -40)]$

$v_s = \text{Richtung}[\text{Gerade}[\langle \text{Anfangspunkt des Seils} \rangle, \langle \text{Endpunkt des Seils} \rangle]]$

Zur Bestimmung der Länge des Kraftvektors \vec{F}_s gibt es mehrere Möglichkeiten:


- Ausprobieren mit Hilfe eines Schiebereglers.
- Konstruktion des achsenparallelen rechtwinkligen Dreiecks.
- Berechnen mit dem Satz des Pythagoras oder mit $|\vec{F}_s| = \frac{|\vec{F}_s|}{\cos(\varphi)}$, wobei φ der Winkel zwischen Seil und Pylon ist.


Der Vektor der horizontalen Kraft ist die Differenz der Vektoren $\vec{F}_v - \vec{F}_s$.

Vergessen Sie nicht, die Länge der Vektoren in Kräfteinheiten (kN) umzurechnen!

- b) Wenn an allen unteren Seil-Enden gleich große Kräfte angreifen, sind bei dieser Schrägseilbrücke Zugkräfte in den Seilen gleich groß. Die Kraft, die insgesamt auf den Untergrund wirkt, ist vier Mal so groß wie die Kraft in einem der oberen Seil-Enden.

Sie zeichnen die Vektoren der beiden Zugkräfte, die im selben Punkt des Pylons angreifen, und ihren Summenvektor ein.

Mit  auf den Punkt und den Vektor klicken

- c) Mit einem Schieberegler variieren Sie die Länge der Vektoren. Beachten Sie aber, dass die Länge der übrigen Vektoren angepasst werden muss. Die Größe der Zugkraft zeigen Sie mit  als Text an. Verwenden Sie dabei als Objekt $5 \cdot |F_s|$.