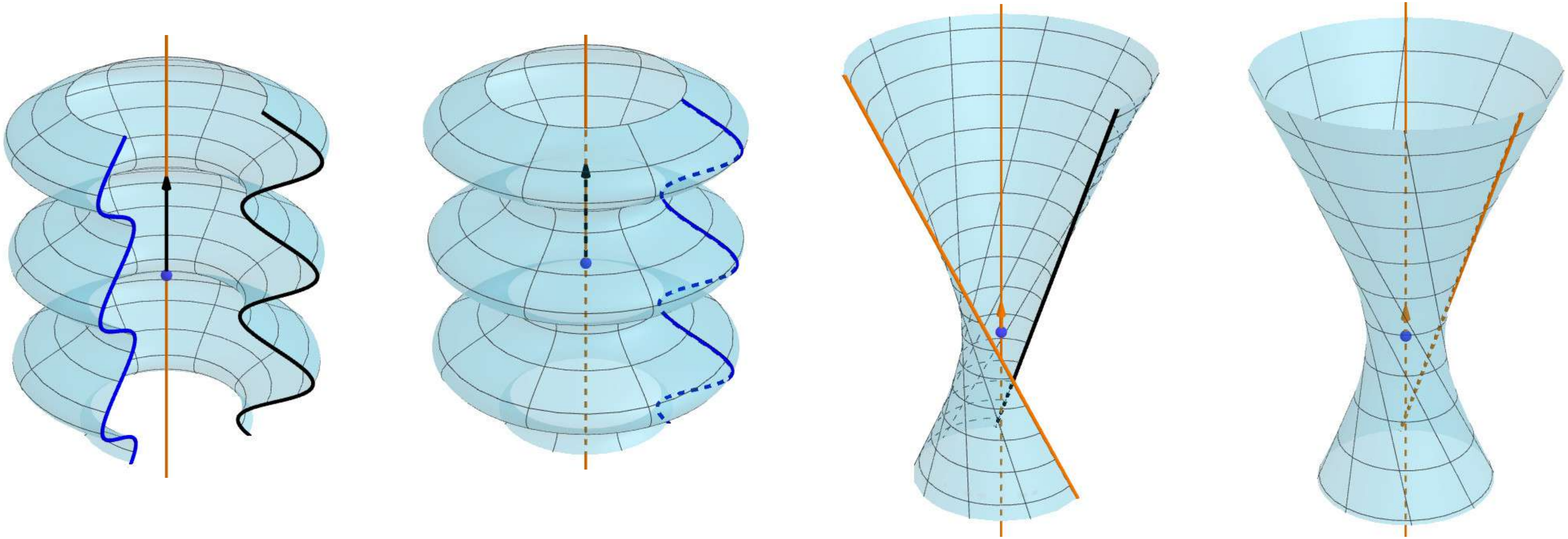
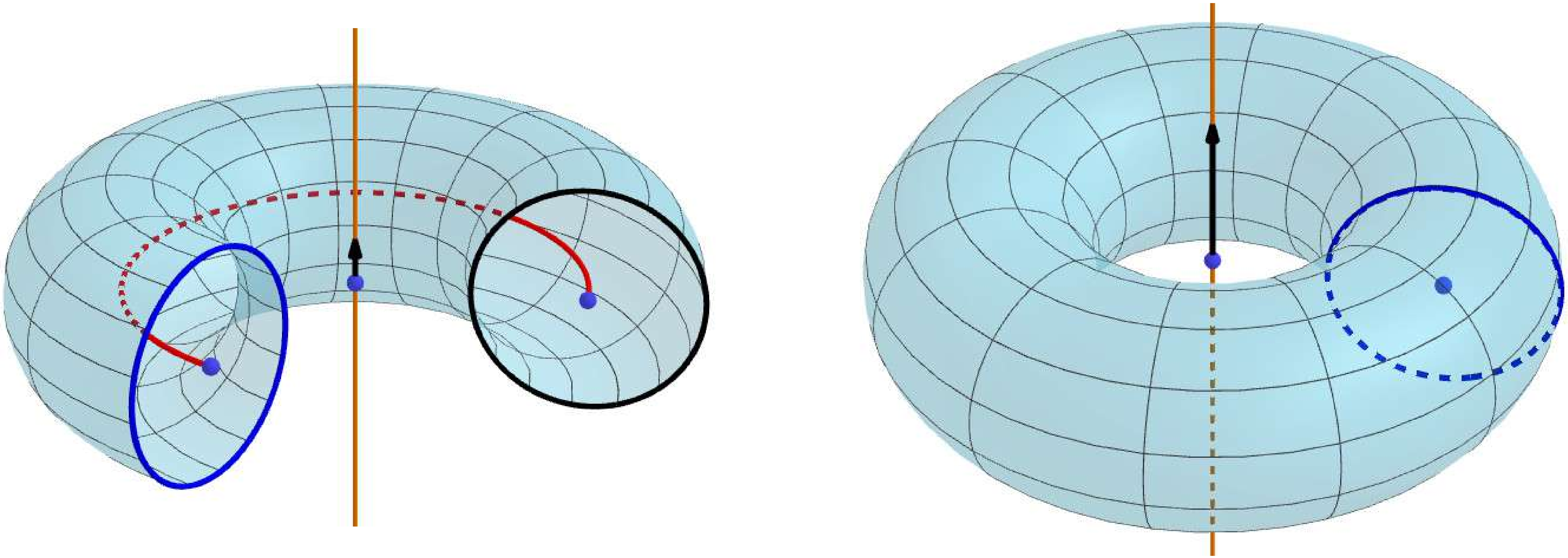
Superfícies de Revolução

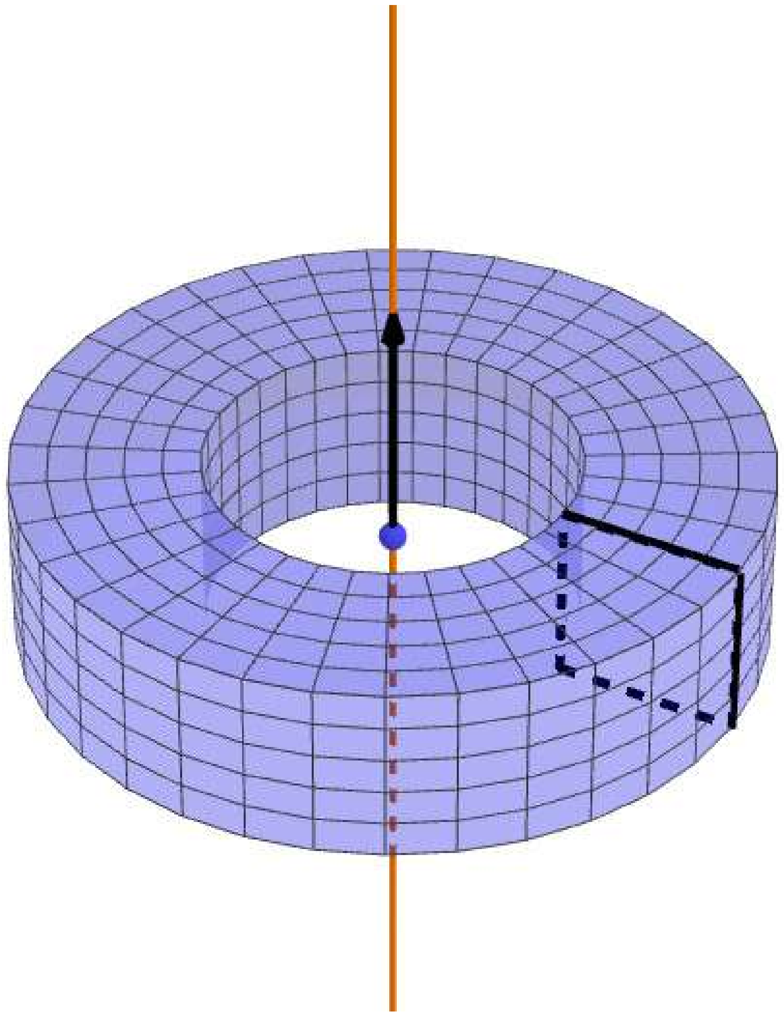
Como fazer uma construção dinâmica genérica de superfícies de revolução no Geogebra?

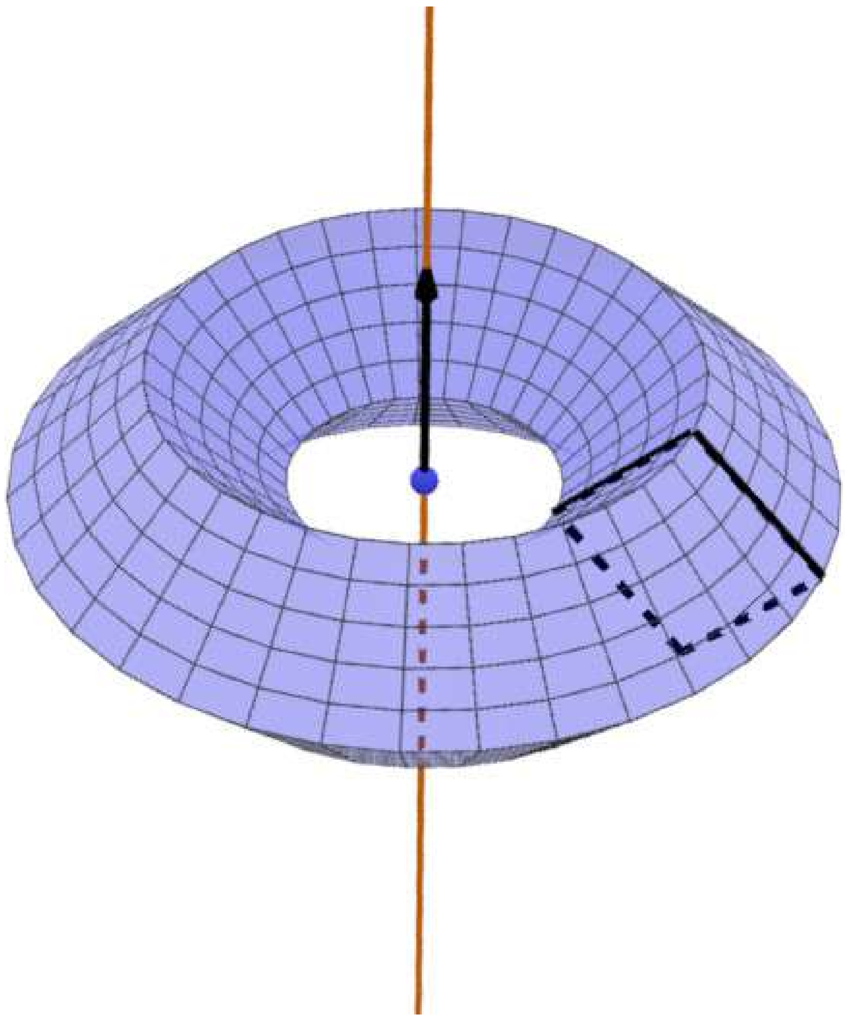


Toro de revolução (gerado por círculo):



“Toro” de revolução gerado por quadrado e por losango:





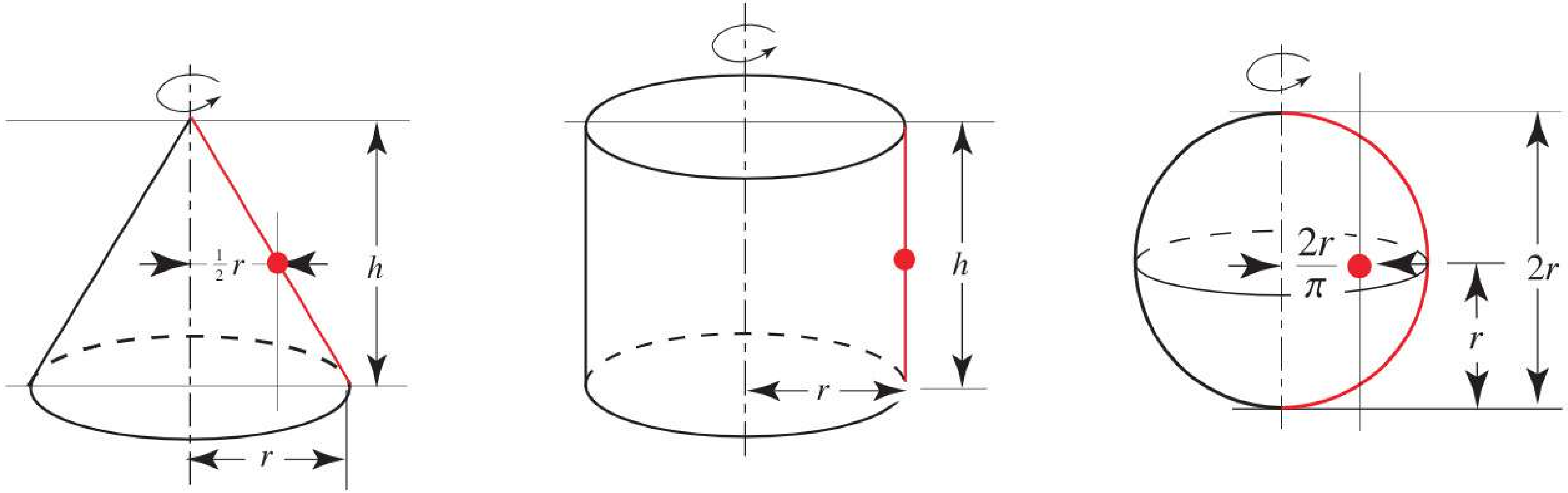
Teoremas de Pappus-Guldin

Proposição 1.1 (1° Teorema de Pappus-Guldin) Sejam C curva plana contínua* de comprimento c, s reta de seu plano que não intersecta C (exceto, eventualmente, nos extremos de C) e S superfície de revolução, obtida pela rotação completa de C em torno de s. Então, a área da superfície S é dada por

$$\boxed{A = (2\pi r)\,\mathsf{c}},$$

sendo r o raio o círculo descrito pelo centroide da curva C no movimento de rotação.

(*) *Intuitivamente, uma curva plana contínua* C *é constituída por "um único pedaço" e pode ser uma curva "fechada" (como um quadrado ou uma circunferência) ou uma curva "aberta" (como um segmento ou um arco de círcunferência).*

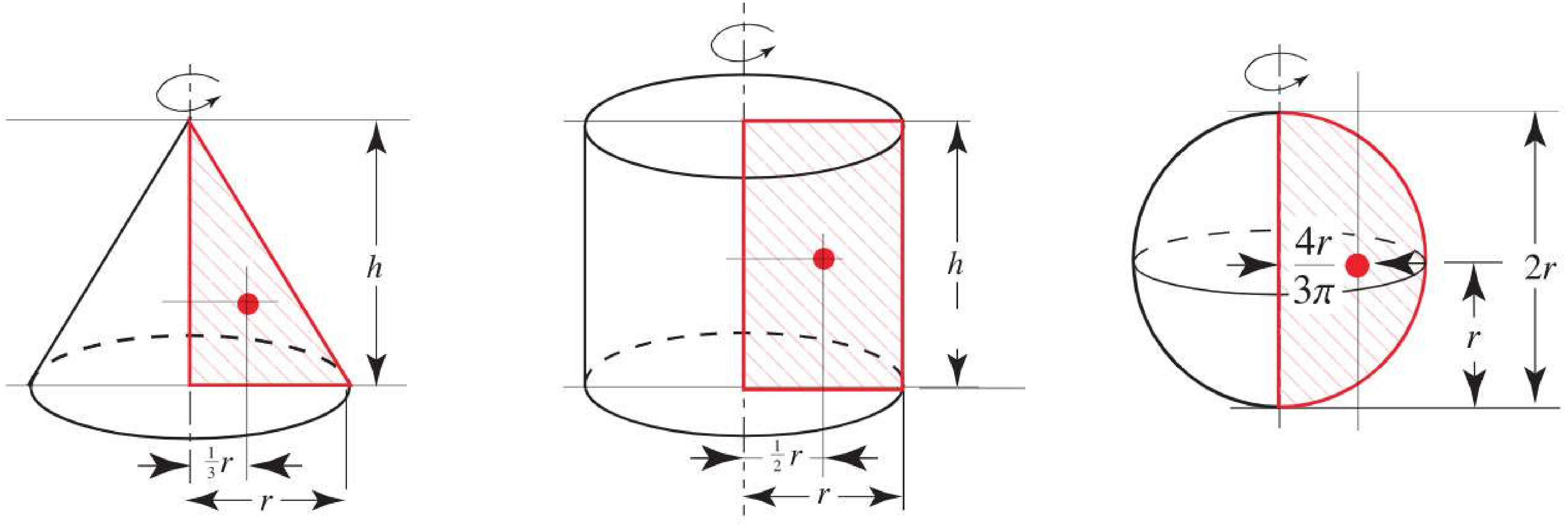


Proposição 1.2 (2º Teorema de Pappus-Guldin) Sejam R região plana fechada com interior conexo** de área a, s reta de seu plano que não intersecta R (exceto, eventualmente, na fronteira de R) e S sólido de revolução, obtido pela rotação completa de R em torno de s. Então, o volume do sólido S é dado por

$$\boxed{V = (2\pi r)\,a},$$

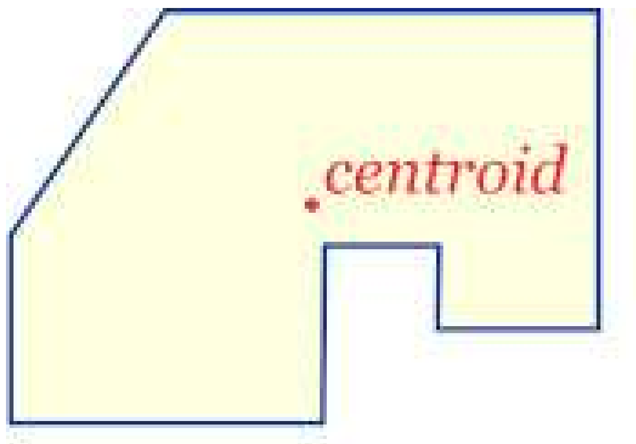
sendo r o raio o círculo descrito pelo centroide de R no movimento de rotação.

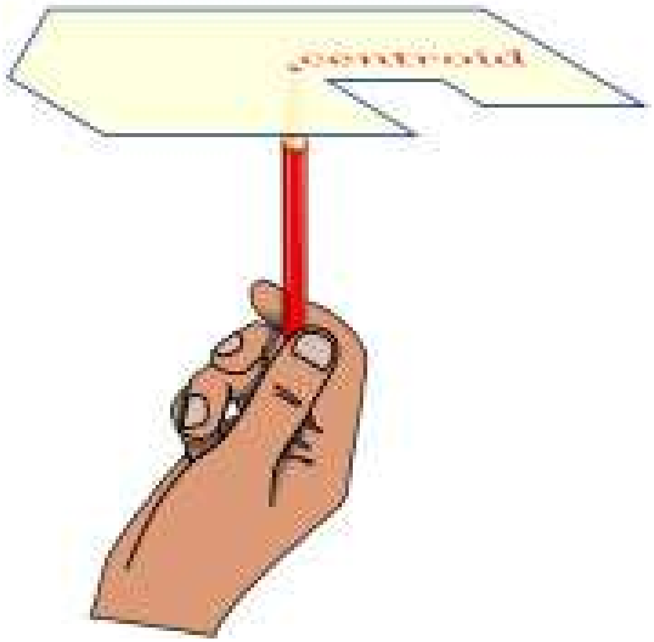
(**) *Intuitivamente, uma região plana fechada com interior conexo* R *é tal que seu interior é constituído por "um único pedaço" e sua fronteira é uma curva que está contida em* R. *Polígonos e círculos são exemplos de tais regiões.*

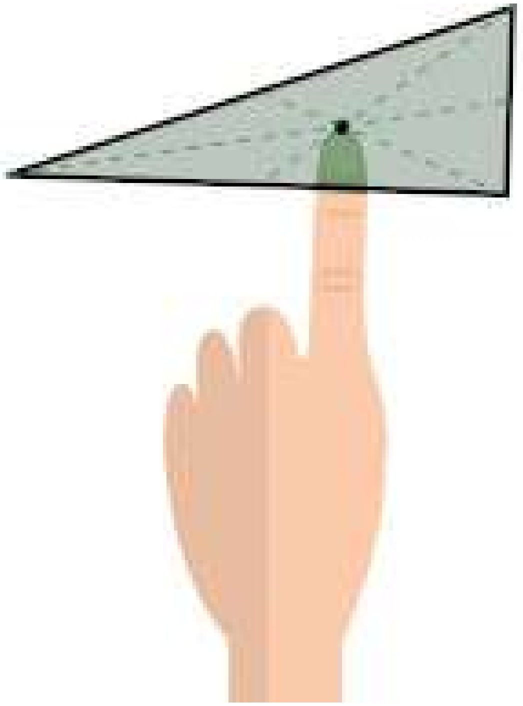


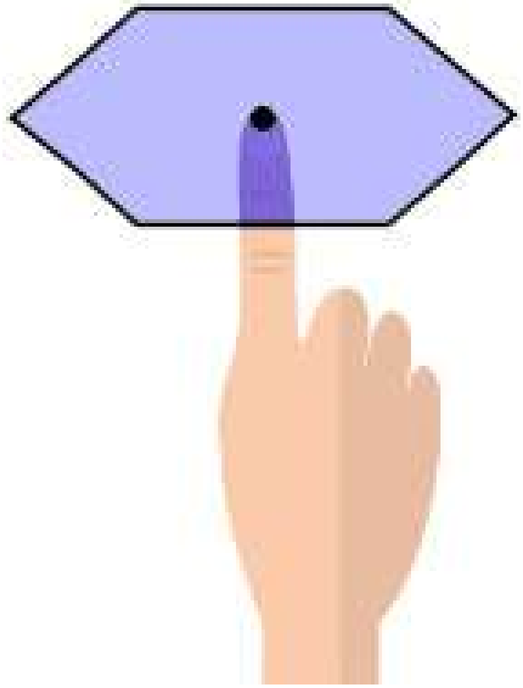
Observação importante: geralmente, o centroide de uma região R é diferente do centroide de sua curva-fronteira C.

Centroide e ponto de equilíbrio em regiões de mesma densidade









Quando a figura é composta por um material de mesma densidade, então o centroide coincide com o centro de massa.

O cálculo do centroide de uma curva ou região genérica é feito com o auxílio de integrais.

Pappus de Alexandria $(290 - 350)$ e Paul Guldin $(1577 - 1643)$


PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
Collectiones.
A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATÆ
In Latinum Conuersæ, & Commentarijs
Illustratæ.
VENETIIS,
Apud Franciscum de Franciscis Senensem.
M. D. LXXXIX.

PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
COLLECTIONES
A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATE
In Latinum conuersæ, & Commentarijs illustratæ.
In hac nostra editione ab innumeris, quibus scatebant mendis, & præcipuè in Græco contextu diligenter vindicatæ.
ET SERENISSIMO PRINCIPI
LEOPOLDO GVLIELMO
ARCHIDVCI AVSTRIAE, &c.
DICATAE.
BONONIÆ Ex Typographia HH. de Duccijs. M.DC.LX.
SVPERIORVM PERMISSV.

Parametrização de Curva no Espaço

Uma **curva parametrizada** no espaço cartesiano é o conjunto imagem de uma função vetorial de uma variável no espaço, ou seja:

$$c : [m, n] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \text{ com } c(t) = (c_1(t), c_2(t), c_3(t)),$$

sendo $c_i(t)$ funções reais de uma variável.

A variável $t \in [m, n]$ é chamada de **parâmetro** da curva.

É comum identificar a curva (que é o conjunto imagem de uma função vetorial) com a própria função, ou seja, podemos escrever e falar "curva c" ao invés de "curva $\operatorname{Im}(c)$".

Exemplo: Parametrização do círculo com centro em $(a, 0, 0)$ e raio r no plano coordenado xz:

$$c : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \text{ com } c(t) = (r\cos(t) + a, 0, r\,\mathrm{sen}(t)).$$

A parametrização acima é fácil de ser entendida:

$a(t) = (\cos(t), 0, \mathrm{sen}(t))$ é círculo de centro $(0, 0, 0)$ e raio 1 no plano xz (pense no círculo trigonométrico no plano xz).
$b(t) = ra(t) = (r\cos(t), 0, r\,\mathrm{sen}(t))$ é círculo de centro $(0, 0, 0)$ e raio $r > 0$ no plano xz.
$c(t) = b(t) + (a, 0, 0) = (r\cos(t) + a, 0, r\,\mathrm{sen}(t))$ é círculo de centro $(a, 0, 0)$ e raio r no plano xz.