SPA2 partie 1 : Primitives d'un polynôme.

I/ Notion de primitive :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On nomme primitive de *f* sur I, toute fonction dérivable sur I dont la dérivée *F'* est égale à *F*. Généralement, par convention, les fonctions sont nommées avec des lettres minuscules et leurs primitives avec la même lettre mais en majuscule.

Autrement dit, trouver la primitive c'est faire l'opération « inverse » de la dérivée.

Exemple :
Soient $F(x) = x^2$ et $f(x) = 2x$. On remarque que $F'(x) = 2x = f(x)$. Donc *F* est une primitive de *f*.

Remarque : Si nous avions posé $F(x) = x^2 + 2$, $F(x)$ aurait aussi été une primitive de *f* puisque la dérivée d'une constante est nulle. **Ainsi nous remarquons qu'une fonction admet une infinité de primitives.** Souvent les données de l'énoncé nous permettrons de déterminer la constante.

II/ Primitives des fonctions usuelles :

Dans chacune des formules du tableau ci-dessous, C est une constante, c'est-à-dire n'importe quel nombre de ℝ**.**

f est définie sur I par:	primitives F de f sur I	Intervalle
$f(x) = a$	$F(x) = ax + C$	ℝ
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$	ℝ
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$	ℝ
$f(x) = x^3$	$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$	ℝ
$f(x) = x^{\boldsymbol{n}}$	$F(x) = \frac{1}{\boldsymbol{n}+1}x^{\boldsymbol{n}+1} + C$	n entier naturel et intervalle de définition de F : ℝ

Exemples :
Donnez les primitives des fonctions suivantes :

$f(x) = x^{\mathbf{2}}$
$F(x)= \frac{1}{\mathbf{2}+1}x^{\mathbf{2}+1} + C = \frac{1}{3}x^3 + C$

$f(x) = x^{\mathbf{8}}$
$F(x)= \frac{1}{\mathbf{8}+1}x^{\mathbf{8}+1} + C = \frac{1}{9}x^9 + C$

III/ Primitives d'un polynôme :

De la même manière que l'on peut additionner les dérivées ou les multiplier par un nombre, on peut aussi additionner les primitives ou les multiplier par un nombre. Les formules précédentes nous permettent donc de trouver facilement les primitives des fonctions polynômes.

Quelques exemples :

$f(x) = 5x^{\mathbf{2}}$ alors $F(x) = 5\times\frac{1}{\mathbf{2}+1}x^{\mathbf{2}+1} + C = 5\times\frac{1}{3}x^3 + C = \frac{5}{3}x^3 + C$

$g(x) = 7x^{\mathbf{6}}$ alors $G(x) = 7\times\frac{1}{\mathbf{6}+1}x^{\mathbf{6}+1} + C = 5\times\frac{1}{7}x^7 + C = \frac{7}{7}x^7 + C = x^7 + C$

$h(x) = 5x^2 + 7x^6$ alors $H(x) = \frac{5}{3}x^3 + x^7 + C$ (Nous avons additionné les primitives de $5x^2$ et $7x^6$)

IV/ Trouver une primitive particulière :

Jusqu'ici, nous avons trouvé LES primitives d'une fonction, dans cette partie nous verrons comment trouver UNE primitive d'une fonction.

Différence entre LES et UNE primitive :

Comme dit dans l'introduction une fonction admet une infinité de primitives. Par exemple :
$F(x) = 3x$; $G(x) = 3x + 1$; $H(x) = 3x - 5$ et $I(x) = 3x + 1896{,}6789$ sont toutes des primitives de la fonction $f(x) = 3$.
Ainsi lorsque l'on cherche les primitives de la fonction f on l'écrira sous cette forme :
$F(x) = 3x + C$
C représentant n'importe quel nombre.
Lorsque l'on cherche UNE primitive, on désire trouver une unique valeur de C répondant à des conditions particulières.
Reprenons notre fonction $f(x) = 3$ et cherchons LA primitive telle que $F(0) = 2$.
On commence par chercher toutes les primitives de f.
$F(x) = 3x + C$
On sait que $F(0) = 2$, Donc :
$F(0) = 3 \times 0 + C = 2$ On en déduit que $C = 2$
Donc LA primitive recherchée est :
$F(x) = 3x + 2$

Généralisation :

De l'explication précédente on peut en déduire une méthode pour trouver une primitive précise d'une fonction :

- Etape 1 : Trouver toutes les primitives de la fonction en utilisant la constante C.
- Etape 2 : Utiliser la ou les conditions fixées par l'énoncé pour trouver la valeur de C.
- Etape 3 : Conclure en écrivant la primitive.

Exemple :

Trouver la primitive de f, telle que $F(1) = 0$, avec :
$f(x) = 8x^3 + 4x - 6$
Etape 1 : On cherche toutes les primitives.
$F(x) = 8\times\frac{1}{3+1}x^{3+1} + 4\times\frac{1}{1+1}x^{1+1} - 6x + C = 8\times\frac{1}{4}x^4 + 4\times\frac{1}{2}x^2 - 6x + C = 2x^4 + 2x^2 - 6x + C$
Etape 2 : Utiliser la condition fixée.
On sait que $F(1) = 0$, or :
$F(1) = 2\times 1^4 + 2\times 1^2 - 6\times 1 + C = 2 + 2 - 6 + C = -2 + C = 0$
Donc :
$-2 + C = 0$
$C = 2$
Etape 3 : Conclure.
Donc la primitive recherchée est :
$F(x) = 2x^4 + 2x^2 - 6x + 2$

Remarque :

Pour vérifier qu'une fonction F est bien primitive d'une fonction f, il sera souvent plus simple de dériver F et de vérifier qu'elle est bien égale à f plutôt que de chercher la primitive de f.