Problemas sobre interpretación geométrica de la derivada

CURSO	TEMA	WWW.DANIPARTAL.NET
1ºBach CCSS	Derivadas	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

PROBLEMA 1

Calcula el crecimiento, decrecimiento y las abscisas de los extremos relativos de $f(x) = x^3 - x$.

Obtenemos los puntos críticos, anulando la primera derivada.

$f'(x) = 3x^2 - 1 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{\pm\sqrt{3}}{3}$

La función original es continua en toda la recta real, por ser polinómica, por lo que estudiamos el crecimiento de la función en los siguientes intervalos.

$(-\infty, \frac{-\sqrt{3}}{3}) \rightarrow f'(-100) > 0 \rightarrow f(x)$estrictamente creciente

$(\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) \rightarrow f'(0) < 0 \rightarrow f(x)$estrictamente decreciente

$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right) \rightarrow f'(100) > 0 \rightarrow f(x)$estrictamente creciente

Por lo tanto, en $x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ tenemos un máximo y en $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ tenemos un mínimo relativo. El enunciado solo nos pide obtener las abscisas de los extremos relativos, por lo que no calculamos las imágenes de los extremos.

PROBLEMA 2

Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada $f'(x) = (x-4)^2(x^2-8x+7)$, hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

Para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ usamos la primera derivada. Calculemos sus raíces $\rightarrow f'(x) = 0$.

$$(x-4)^2 = 0 \rightarrow x = 4$$

$$x^2 - 8x + 7 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = 1, x = 7$$

Evaluamos la derivada para estimar los crecimientos. Como la derivada es un polinomio es lógico asumir que la función original también será un polinomio, por lo que su dominio será toda la recta real.

Función $f(x)$	$f(x) \uparrow$	$f(x) \downarrow$	$f(x) \downarrow$	$f(x) \uparrow$
Intervalos	$(-\infty, 1)$	$(1,4)$	$(4,7)$	$(7, +\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f'(0) > 0$	$f'(2) < 0$	$f'(5) < 0$	$f'(10) > 0$

La función es creciente en los intervalos $(-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$ y decreciente en el intervalo $(1,7)$.

PROBLEMA 3

Determina el punto (x, y) de la función $f(x) = x^3 - x$ donde la recta tangente a la función en ese punto tenga pendiente igual a 74.

La pendiente de la recta tangente en un punto coincide con el valor de la derivada de la función en ese punto.

$f'(x_0) = m \to f'(x) = 3x^2 - 1$, $m = 74 \to x = \pm 5$

Los puntos son $\to (5, f(5)) = (5,120)$ y $(-5, f(-5)) = (-5, -120)$

PROBLEMA 4

Obtener la ecuación explícita de la recta tangente a la función $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ en $x=-2$.

La ecuación punto pendiente de la recta relaciona el punto del enunciado con la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto $\rightarrow m=\frac{y-f(x_0)}{x-x_0}$

$x_0=-2\rightarrow f(-2)=\frac{-2}{5}$

$m=f'(-2)\rightarrow f'(x)=\frac{x^2+1-x(2x)}{(x^2+1)^2}\rightarrow f'(-2)=\frac{4+1-8}{(4+1)^2}=\frac{-3}{25}$

La recta resulta $\rightarrow \frac{-3}{25}=\frac{y+\frac{2}{5}}{x+2}\rightarrow \frac{-3}{25}x-\frac{6}{25}-\frac{2}{5}=y\rightarrow y=\frac{-3}{25}x-\frac{16}{25}$

PROBLEMA 5

Sea la función $g(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 - \frac{2x}{3} - 4$. Hallar los valores x de la curva en que la recta tangente es paralela a la recta $0 = 2x + 3y - 4$.

La pendiente de las rectas tangentes que buscamos coincide con la pendiente la recta:

$0 = 2x + 3y - 4 \rightarrow y = \frac{-2}{3}x + \frac{4}{3} \rightarrow pendiente = \frac{-2}{3}$

Derivamos la función e igualamos a este valor de la pendiente.

$g(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 - \frac{2x}{3} - 4 \rightarrow g'(x) = x^2 - 8x - \frac{2}{3}$, $g'(x) = \frac{-2}{3} \rightarrow x^2 - 8x - \frac{2}{3} = \frac{-2}{3}$

$x^2 - 8x = 0 \rightarrow x(x - 8) = 0 \rightarrow x = 0, x = 8$

PROBLEMA 6

Sea la función definida por $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ para $x > 0$ y $x \neq 1$.

Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = e$.

El punto $x = e$ evaluado en la función da lugar a:

$$f(e) = \frac{e}{\ln(e)} = e$$

La pendiente de la recta tangente será la derivada de la función en el punto.

$$f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{(lnx)^2}$$

$f'(e) = 0 \rightarrow x = e \rightarrow$ Al ser la derivada nula tendremos en $x = e$ un candidato a extremo relativo.

En $x = e$ tendremos o bien un extremo relativo o bien un punto de inflexión. En ambos casos la recta tangente a la función en el punto será una recta horizontal (pendiente nula).

Usando la ecuación punto pendiente de la recta tenemos la recta tangente.

$$\frac{y-e}{x-e} = 0 \rightarrow y = e$$

Y la recta normal a $y = e$ es perpendicular a ella y pasando por el valor de abscisa $x = e$. Por lo tanto la recta normal es la recta perpendicular $x = e$.

PROBLEMA 7

Calcule a y b para que $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ pase por el punto $(-1, 6)$ y su recta tangente en $x = 1$ forme un ángulo de $45°$ con el eje OX.

Si la función pasa por el punto $(-1,6)$ se cumple la relación:

$f(-1) = 6 \rightarrow -1 + a - b + 2 = 6 \rightarrow a - b = 5$

La derivada de la función en $x = 1$ es igual a $tg(45°) = 1$, por ser éste el valor de la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto. Es decir:

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, $f'(1) = 3 + 2a + b$, $f'(1) = 1 \rightarrow 3 + 2a + b = 1 \rightarrow 2a + b = -2$

Obtenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$\left\{\begin{array}{c} a - b = 5 \\ 2a + b = -2 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sumamos ambas ecuaciones $\rightarrow 3a = 3 \rightarrow a = 1$

Llevando este valor a la primera ecuación del sistema:

$b = a - 5 \rightarrow b = -4$

PROBLEMA 8

Obtener la recta tangente y normal a $f(x) = \ln(x+1) - \frac{1}{x+1}$ en $x = 0$.

Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente m. Por lo que debemos obtener la pendiente de la recta que pasa por los dos puntos dados.

Esa recta viene dada por la expresión:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \rightarrow \frac{0-3}{-2-1} = \frac{y-3}{x-1} \rightarrow 1 = \frac{y-3}{x-1} \rightarrow m = 1$$

Según la interpretación geométrica de la derivada, debemos obtener el punto de la función cuya derivada coincida con el valor de la pendiente $m = 1$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow \frac{1}{1+x^2} = 1 \rightarrow 1 = 1 + x^2 \rightarrow x = 0$$

Calculamos la imagen del punto $x = 0 \rightarrow f(0) = arcotg(0) = 0 \rightarrow (x_0, y_0) = (0,0)$

Y con la pendiente y un punto, podemos escribir la ecuación de la recta tangente a la función en ese punto.

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \rightarrow 1 = \frac{y}{x} \rightarrow y = x$$

PROBLEMA 9

Sea la función $f: [-2,2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 2x + 5$. Determina las abscisas de los puntos, si existen, en los que la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2, f(-2))$ y $(2, f(2))$.

$f(-2) = (-2)^3 - 2(-2) + 5 = 1$

$f(2) = (2)^3 - 2(2) + 5 = 9$

El vector que une los puntos $A(-2,1)$ y $B(2,9)$ es:

$\overrightarrow{AB} = (4,8)$

Por lo que la pendiente del vector es:

$m = \dfrac{8}{4} = 2$

El vector es paralelo a la recta tangente de la que nos habla el enunciado. Por lo que la pendiente de la recta coincide con la pendiente del vector.

Por la interpretación geométrica de la derivada, la pendiente de la recta coincide con la derivada de la función en el punto de tangencia.

$f'(x) = 3x^2 - 2$, $f'(x) = 2$, $3x^2 - 2 = 2 \to 3x^2 = 4 \to x = \frac{\pm 2\sqrt{3}}{3}$