Problemas – Tema 2

Problemas resueltos - 1 - función biyectiva y existencia de inversa

1. Sea $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$ **.**

a) Obtener de manera razonada el dominio y la imagen de la función. Realiza un esbozo de la función.

b) Justificar, de manera razonada, por qué la función no admite inversa en su dominio maximal.

a) El dominio de la función son todos los reales menos $x=\pm 1$, que es donde se anula el denominador. Realizamos un sencillo estudio de su gráfica para determinar la imagen (también llamada recorrido o codominio).

La función pasa por el punto $(0,0)$. Posee asíntotas verticales en $x=\pm 1$. No posee asíntota horizontal, pero sí oblicua.

$m=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(x^2-1)\cdot x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3-x}=1$ → realizamos el cociente de coeficientes que acompañan a la máxima potencia del polinomio.

$n=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^3}{x^2-1}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=0$ → grado del denominador > grado del numerador

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-1} \rightarrow f'(x)=\frac{3x^2(x^2-1)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$f'(x)=0 \rightarrow x^4-3x^2=0 \rightarrow x^2(x^2-3)=0 \rightarrow x=0,\pm\sqrt{3}$ → puntos críticos

Evaluamos la derivada a ambos lados de los puntos críticos.

$(-\infty,-\sqrt{3}) \rightarrow f'(-10)>0 \rightarrow f(x)\uparrow$

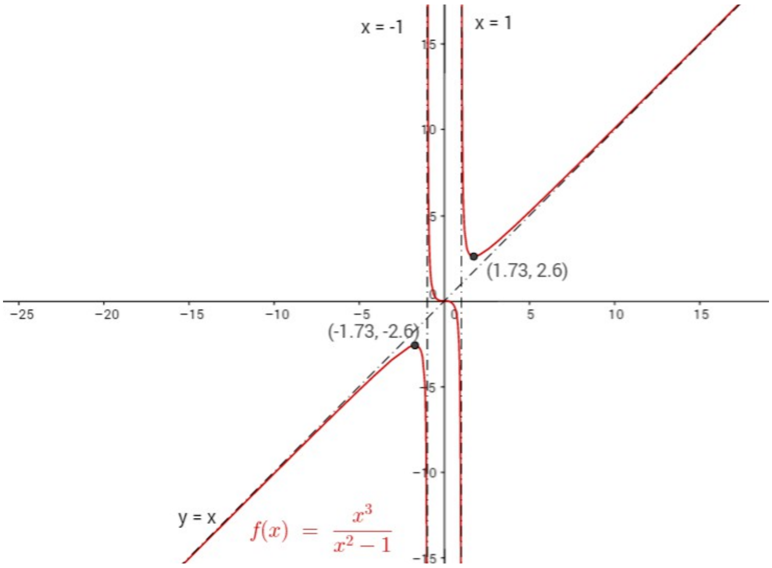
$(-\sqrt{3},-1) \rightarrow f'(\frac{-3}{2})<0 \rightarrow f(x)\downarrow$ → máximo en $x=-\sqrt{3}$

$(-1,0) \rightarrow f'(\frac{-1}{2})<0 \rightarrow f(x)\downarrow$

$(0,1) \rightarrow f'(\frac{1}{2})<0 \rightarrow f(x)\downarrow$

$(1,\sqrt{3}) \rightarrow f'(\frac{3}{2})<0 \rightarrow f(x)\downarrow$

$(\sqrt{3},+\infty) \rightarrow f'(10)>0 \rightarrow f(x)\uparrow$ → mínimo en $x=\sqrt{3}$



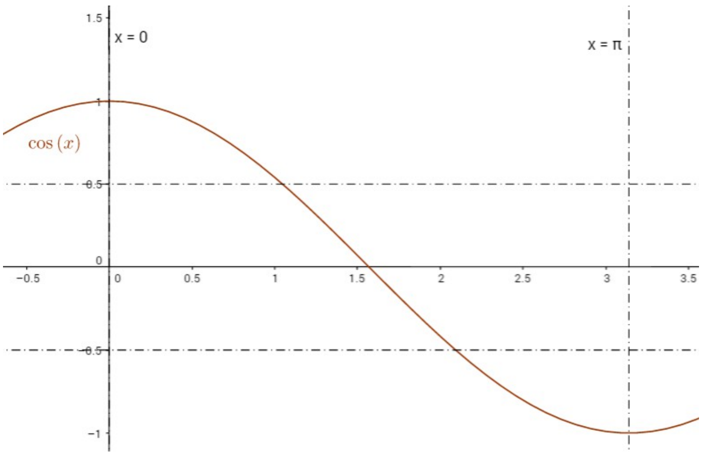
El codominio de la función son todos los números reales, como muestra la gráfica.

b) La función no admite inversa en todo su dominio por no ser biyectiva, ya que no es inyectiva. Si trazamos, sobre la gráfica, rectas horizontales, encontramos que en determinados tramos cada recta horizontal corta a la gráfica en más de un punto.

Si tomáramos como dominio el intervalo $(-1,1)$ la función sí sería biyectiva y admitiría inversa.

2. **Indica un dominio que permita que la función $f(x)=\cos(x)$ admita inversa. Demuestra que, en ese dominio que propones, la función es biyectiva.**

La gráfica de la función $f(x)=\cos(x)$ no admite inversa en su dominio maximal $\mathbb{R}$ por no ser inyectiva. Pero si elegimos el dominio $[0,\pi]$ sí es inyectiva, ya que en ese dominio cualquier recta horizontal corta a la gráfica, como máximo, una sola vez.

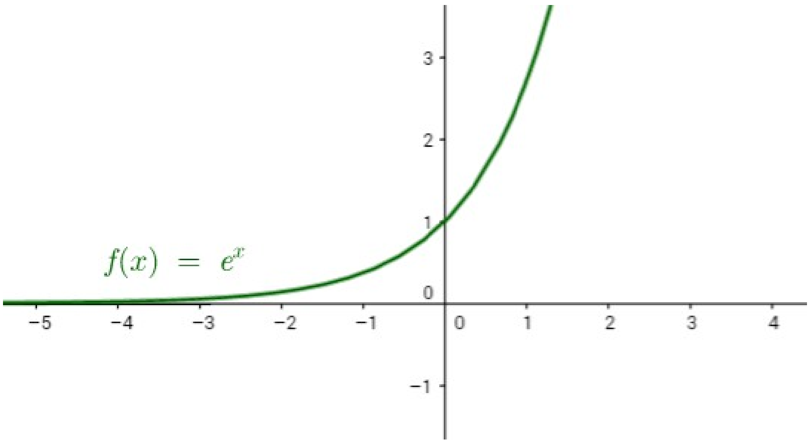


El dominio $[0,\pi]$ genera, a su vez, el codominio maximal de la función coseno → $[-1,1]$ → por lo tanto la función es sobreyectiva.

Siendo inyectiva y sobreyectiva, la función es biyectiva y admite inversa en el dominio $[0,\pi]$.

3. Demostrar que la función $g(x)=e^x$ es biyectiva.

Como no nos fijan un dominio, asumimos el dominio maximal $\mathbb{R}$ que genera el codominio maximal $(0,+\infty)$.



A partir de la gráfica de la exponencial es fácil razonar que es inyectiva (rectas horizontales cortan a la gráfica, como máximo, una sola vez) y que es sobreyectiva (el dominio maximal $\mathbb{R}$ genera el codominio maximal $(0,+\infty)$).

Al ser inyectiva y sobreyectiva, es biyectiva y admitirá inversa.