Sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss

Ecuaciones con una incógnita.

Ecuación.- Una ecuación es una igualdad de expresiones algebraicas.

 # Ejemplos: $2x - xy = 12 + x + z$; $\sqrt{x+2} = 3.y$; $3^x + 6 = 5$

Ecuación con una incógnita.- Es una ecuación, donde únicamente aparece una incógnita o variable

 # Ejemplos: $2x - 1 = 12 + x$; $\sqrt{x+2} = 3$; $3^x + 6 = 5$

Soluciones de una ecuación.- Las soluciones de una ecuación son los valores que pueden tomar las incógnitas, tales que al sustituirlos en la ecuación hacen que la igualdad sea cierta

Resolución de una ecuación.- Resolver una ecuación es encontrar sus soluciones.

Si una ecuación tiene solución decimos que es una ecuación incompatible, y si no tiene solución que es incompatible.

 # Ejemplos: $\sqrt{x+2} = 3.y$ *es compatible y tiene por solución* $x = 7$

$x^2 + 1 = 0$ *es incompatible, ya que no tiene solución*

Ecuaciones equivalentes.- Dos ecuaciones son equivalentes si tiene las mismas soluciones.

 # Ejemplo: $(x+1)^2 + (6x+3) = -3$ *y* $x^2 + 8x + 7 = 0$ *son equivalentes, ya que ambas tienen por soluciones* $x = -1$ *y* $x = -7$

Reglas de la suma y del producto

La resolución de ecuaciones se basa en las siguientes propiedades de los números reales:

$a = b \Leftrightarrow a \pm c = b \pm c$ $\qquad$ $a = b \Leftrightarrow a.c = b.c$

Que utilizamos para plantear ecuaciones equivalentes más sencillas, en las cuales podamos conocer fácilmente la solución

 # Ejemplo:

Para resolver la ecuación $2(x+1) - 3(x-2) = x + 6$

Quitamos los paréntesis $2x + 2 - 3x + 6 = x + 6$

Reducimos ambos miembros $8 - x = x + 6$

Sumamos x – 6 a ambos miembros $2 = 2x$

Dividimos por 2 ambos miembros $1 = x$

Que es la solución de la ecuación

Método de factorización

Un resultado útil para la resolución de ecuaciones se basa en la siguiente propiedad de los números reales:

$$a.b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ó } b=0$$

Que utilizamos para factorizar ecuaciones polinomiales igualadas a cero, ya sea sacando factor común, hallando las raíces de la ecuación o empleando el método de Ruffini.

 # Ejemplos:

- *Para resolver la ecuación* $x^3-2x^2=0$

  Sacando factor común x^2 $x^2.(x-2)=0$

  Que equivale a resolver $\{x^2=0\,, x-2=0\}$ $\Rightarrow$ $\{x=0\,, x=2\}$

- *Para resolver la ecuación* $x^3-2x^2-x+2=0$

  Utilizamos el método de Ruffini

	1	*-2*	*-1*	*2*
1		*1*	*- 1*	*-2*
	1	*-1*	*-2*	*0*
-1		*-1*	*2*	
	1	*-2*	*0*	

Y la ecuación quedará factorizada como $(x-1).(x+1).(x-2)=0$

Que equivale a resolver $\{x+1=0\,, x-1=0\,, x-2=0\}$ $\Rightarrow$ $\{x=-1\,, x=1\,, x=2\}$

Hay que tener en cuenta que una ecuación polinómica, de grado n, tiene como máximo n raíces reales.

Ecuaciones de segundo grado.

Una ecuación polinómica de segundo grado es de la forma

$$a x^2+b x+c=0, con\, a\neq 0$$

Que podemos resolver como caso particular de factorización, ya que

$$a x^2+b x+c=0 \quad \Rightarrow \quad a.\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4.a^2}-\frac{b^2}{4.a^2}+\frac{c}{a}=0 \quad \Rightarrow \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4.a^2}+\frac{c}{a}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4.a.c}{4.a^2}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\sqrt{\left(\frac{b^2-4.a.c}{4.a^2}\right)}\right).\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\sqrt{\left(\frac{b^2-4.a.c}{4.a^2}\right)}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4.\mathrm{a.c}}}{2.\mathrm{a}}\right).\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4.\mathrm{a.c}}}{2.\mathrm{a}}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4.\mathrm{a.c}}}{2a}\right).\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4.\mathrm{a.c}}}{2a}\right)=0$$

Cuya soluciones son $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4.\mathrm{a.c}}}{2a}$

Recuerda, que el número de soluciones de una ecuación polinómica de segundo grado, depende del signo del discriminante $\Delta=b^2-4.\mathrm{a.c}$, ya que:

Si $\Delta<0$ la ecuación no tiene solución

Si $\Delta=0$ la ecuación tiene una única solución

Si $\Delta>0$ la ecuación tiene dos soluciones solución

Además, si x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación $a.x^2+b.x+c=0$, se cumple:

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4.\mathrm{a.c}}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4.\mathrm{a.c}}}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$x_1.x_2=\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4.\mathrm{a.c}}}{2a}\right).\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4.\mathrm{a.c}}}{2a}\right)=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4.a.c.})^2}{4.\mathrm{a}^2}=\frac{c}{a}$$

 # Ejemplos:

a) Resolver la ecuación $x^2-3x+2=0$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4.2}}{2}=\{+1,+2\}$$

b) Resolver $x^2+x+1=0$

$\Rightarrow$ *Como* $(-1)^2-4.1.1=-3>0$ *, la ecuación no tiene soluciones reales.*

c) Encontrar dos números cuya suma sea 6 y cuyo producto sea – 27

$\Rightarrow$ *si* $x_1\, y\, x_2$ *son los números buscados, se tendrá que cumplir la ecuación*

$$x^2-(x_1+x_2).x+(x_1.x_2)=x^2-6.x-27=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=9,\, x_2=(-3)$$

Conviene recordar, que si se cumple que $b=0\, o\, c=0$ en la ecuación $a.x^2+b.x+c=0$, decimos que es una ecuación de segundo grado incompleta y se resuelve:

Si $b=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ y si c = 0 $\Rightarrow a.x.(x+\frac{b}{a})=0\Rightarrow x=0\, o\, x=\frac{b}{a}$

 # Ejemplos:

Resolver $7x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{7}}=\pm\frac{\sqrt{7}}{7}$

Resolver $7x^2-x=0 \Rightarrow x.(7.\text{x}-1)=0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} x=0 \\ x=\frac{1}{7} \end{Bmatrix}$

Ecuaciones polinómica con una raíz entera.

Si se conoce una raíz r entera de la ecuación polinómica P(x) = 0, podemos factorizar la ecuación, quedando:

$$P(x)=(x-r).Q(X)=0$$

Donde, $Q(x)=P\frac{(x)}{(x-r)}$

Y en general si $P(x)=0$, tiene k raíces reales $r_{1,}r_{2,}\ldots,r_k$, podemos factorizar cla ecuación como

$$P(x)=(x-r_1).(x-r_2).(x-r_3).\ldots.(x-r_k).Q(X)=0$$

 # Ejemplo.- Para resolver $x^3+2x^2-x-2=0$ *, denominando* $P(x)=x^3+2x^2-x-2$ *, como* $P(-2)=P(-1)=P(1)=0$ *, aplicando el método de Ruffini, obtenemos* $P(x)=(x+2).(x+1).(x-1)$ *, luego la ecuación queda como*

$$(x+2).(x+1).(x-1)=0$$

Cuyas soluciones son $x=-2, x=-1\ y\ x=1$

Ecuaciones radicales.

Ecuaciones radicales son aquellas en las que aparece la incógnita en algunos de sus términos, bajo el signo radical.

Para resolver una ecuación radical elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación y obtenemos otra ecuación, que si es polinómica, la resolvemos por los métodos de resolución polinómica, y si es radical, volvemos a aplicar ambos miembros de la ecuación al cuadrado.

Una vez resuelta la ecuación polinómica hay que comprobar si las soluciones obtenidas son soluciones de la ecuación radical (*no necesariamente son ecuaciones equivalentes, sin embargo, la soluciones de la ecuación radical lo son también de la ecuación polinómica*).

 # Ejemplo.- Para resolver $x+\sqrt{x}=2$

$\Rightarrow \sqrt{x}=2-x$ $\Rightarrow x=(2-x)^2$ $\Rightarrow x^2-5x+4=0$

Cuyas soluciones son $x=1$ *y* $x=4$.

Sustituyendo $x=1$ *y* $x=4$ *en la ecuación* $x+\sqrt{x}=2$ *, como solamente se cumple para* $x=1$ *, la solución será* $x=1$.

 # Ejemplo.- Para resolver $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=5$

%implica $\sqrt{x+5}=5-\sqrt{x}$ $\Rightarrow x+5=25+x-10\sqrt{x}$ $\Rightarrow \sqrt{x}=2$ $\Rightarrow x=4$

Sustituyendo $x=4$ *en la ecuación* $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=5$ *, como se cumple la igualdad, la solución será* $x=4$.

Ecuaciones logarítmicas.

Ecuaciones logarítmicas son aquellas en las que aparece la incógnita en algunos de sus términos, sometida a la operación logaritmo.

Para resolver una ecuación logarítmica tomando exponenciales a ambos miembros de la igualdad obtenemos una ecuación equivalente, ya que al tomar exponenciales, igualamos los números o expresiones algebraicas de los logaritmos.

Una vez resuelta la ecuación hay que comprobar si las soluciones obtenidas son soluciones de la ecuación radical (*no necesariamente son ecuaciones equivalentes, sin embargo, la soluciones de la ecuación logarítmica lo son también de la ecuación equivalente*).

 # Ejemplo.- Para resolver $2\log x=\log(10-3x)$

$\Rightarrow x^2=10-3x$ $\Rightarrow x^2+3x-10=0$ $\Rightarrow x=2, x=-5$

Sustituyendo $x=2$ *y* $x=-5$ *en la ecuación ,* $2\log x=\log(10-3x)$ *, log (-5) no está definido, la única solución será* $x=2$.

Ecuaciones exponenciales.

Ecuaciones exponenciales son aquellas en las que aparece la incógnita en el exponente.

Para resolver una ecuación exponencial tomando logaritmos a ambos miembros de la igualdad obtenemos una ecuación equivalente, ya que al tomar logaritmos, igualamos los exponentes.

 # Ejemplo.- Para resolver $3^{x+1}=8$

$\Rightarrow (x+1)\log 3=\log 8$ $\Rightarrow x=\dfrac{\log 8}{\log 3}-1$

Sistema de tres ecuaciones.

Dado un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas de la forma

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{12}z=b_1$$
$$a_{21}x+a_{22}y+a_{22}z=b_2$$
$$a_{31}x+a_{32}y+a_{32}z=b_3$$

Donde x, y , z son las variables o incógnitas, a_{ij} son los coeficientes y b_i son los términos independientes ($i, j=1,2,3$) .

Un método de resolución del sistema es mediante la suma o diferencia de ecuaciones (multiplicadas por algún número), obtener un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Y conocidas las dos incógnitas se sustituye en la tercera y se halla la solución.

 # Ejemplo.- Para resolver el sistema de ecuaciones

$$x+y-2z=9$$
$$2x-y+4z=4$$
$$2x-y+6z=-1$$

Podemos eliminar la incógnita y de las ecuaciones 1ª + 2ª y 1ª –+3ª

$$\begin{array}{rl} & x+y-2z=9 \\ + & 2x-y+4z=4 \\ \hline & 3x+2z=13 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & x+y-2z=9 \\ + & 2x-y+6z=-1 \\ \hline & 3x+4z=8 \end{array}$$

Y resolviendo el sistema

$$3x+2z=13$$
$$3x+4z=8$$

Por ejemplo restando ambas ecuaciones se obtiene $-2z=5 \Rightarrow z=-\frac{5}{2}, x=6$

Y sustituyendo estos valores en cualquiera de las tres ecuaciones se obtiene la solución

$$x=6, y=-2, z=-\frac{5}{2}$$

Método de Gauss

Para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas de la forma

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{12}z=b_1$$
$$a_{21}x+a_{22}y+a_{22}z=b_2$$
$$a_{31}x+a_{32}y+a_{32}z=b_3$$

por el método de Gauss, mediante la suma y resta de filas multiplicada por un número, consiste en encontrar un sistema equivalente de la forma

$$m_{11}x + m_{12}y + m_{12}z = n_1$$

$$m_{22}y + m_{22}z = n_2$$

$$m_{32}z = n_3$$

Y se resuelve primero la tercera ecuación que es de primer grado y se halla la z, después se sustituye en la segunda y se obtiene otra ecuación de primer grado, de la cual hallamos la y, y finalmente sustituimos la z y la y en la primera ecuación que también es de primer grado y hallamos la x.

 # Ejemplo.- Para resolver el sistema de ecuaciones

$$-x + y + x = 3$$

$$x + y - z = 1$$

$$x - y + z = 7$$

Si sumamos la primera ecuación a la segunda y tercera, se obtiene el sistema

$$-x + y + x = 3$$

$$2y \quad = 4$$

$$2z = 10$$

Cuya solución es $x = 4, y = 2, z = 5$

Inecuaciones polinómicas y racionales.

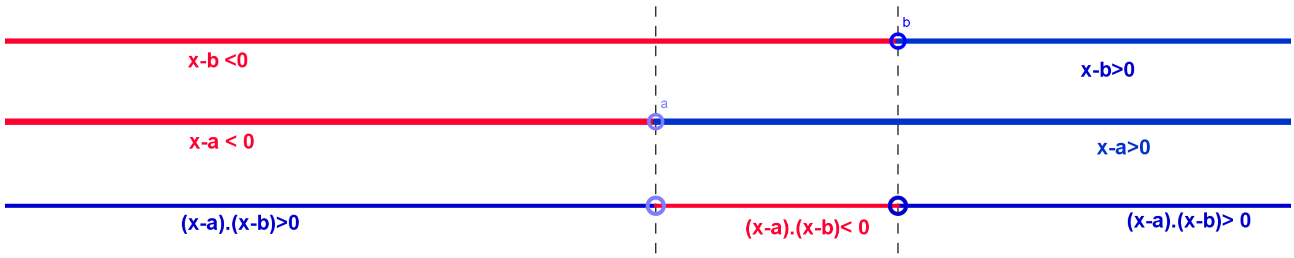
Si p(x) es una expresión polinómica o racional las inecuaciones son de la forma

$$p(x)<0 \quad , \quad p(x)\le 0 \quad , \quad p(x)>0 \quad , \quad p(x)\ge 0$$

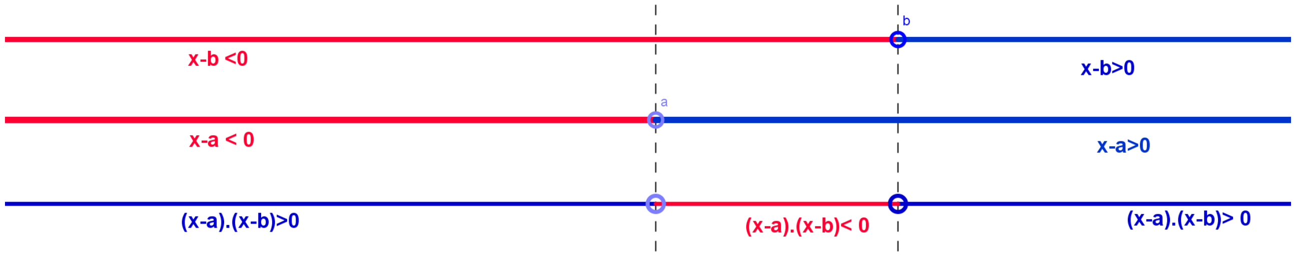
Estas inecuaciones se resuelven hallando el signo del valor numérico de la expresión. Para ello se factoriza la expresión como producto o cocientes y luego se representa cada factor en la recta real indicando su signo, tal y como se hace a continuación en estos tres casos

- Un factor: $x-a$

- Dos factores: $(x-a).(x-b)$, suponiendo que $a<b$

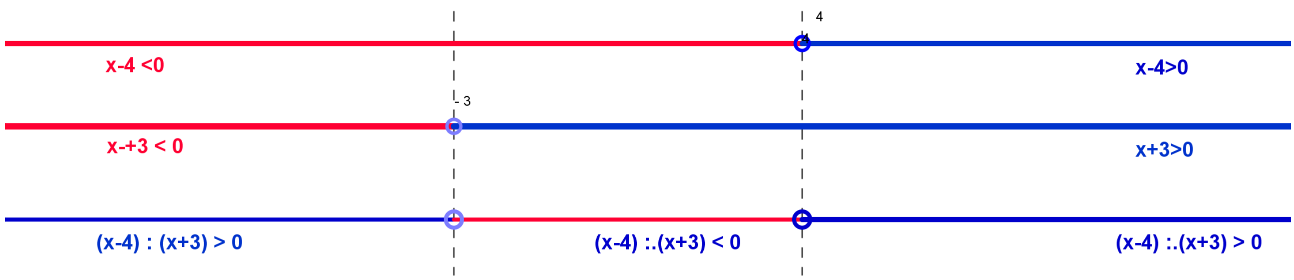


- Tres factores: $(x-a).(x-b).(x-c)$, suponiendo que $a<b<c$



 # Ejemplo.-Para resolver la inecuación $\dfrac{2x-8}{3x+9}>0$ *, como operando se obtiene*

$$\frac{2x-8}{3x+9}>0 \Leftrightarrow \frac{2.(x-4)}{3(x+3)9}>0 \Leftrightarrow \frac{x-4}{x+3}>0$$



Cuya solución es $x<-3 \; o \; x>4$.