Kočí & analysa

Taylorův polynom a Eulerova rovnice

Žán Pól Kastról

7. března 2022

1 Náhrada funkce tečnou

Vezměme si funkci $f(x) : y = \frac{1}{x}$ a zkusme ji nahradit v okolí bodu $x_0 = 1$ lineární funkcí $g(x) : y = ax + b$. Asi bude rozumné požadovat, aby $g(x_0) = f(x_0)$, tedy aby $g(1) = f(1)$ (viz obr.1). Chceme-li, aby se graf $g(x)$ podobal v okolí bodu $x_0 = 1$ co nejvíce grafu funkce $f(x)$, bude zřejmě nejvhodnější přímkou **tečna**.

Víme, že **směrnice** tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0 je rovna **derivaci** této funkce v bodě x_0. Tedy

$$a = f^{'}(x_0) = f^{'}(1)$$

Derivace funkce $\frac{1}{x}$ je $-\frac{1}{x^2}$, takže dostáváme pro a

$$a = -1$$

Tečna má procházet bodem $[1; 1]$, pročež její rovnice bude

$$(y - 1) = a(x - 1) \tag{1}$$

a po dosazení za a a úpravě máme

$$\boxed{g(x) : y = -x + 2}$$

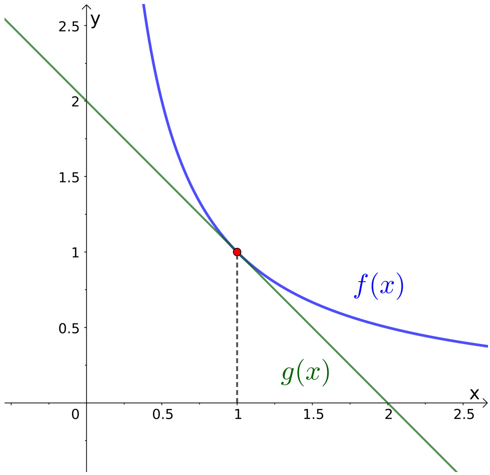
Z obrázku 1 vidíme, že to sedí.

Nyní vezměme rovnici (1) obecně:

$$(y - f(x_0)) = a(x - x_0)$$

Ale $a = f^{'}(x_0)$, pročež

$$\boxed{y = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0)} \tag{2}$$



Obr. 1

Uvědomme si, že jsme požadovali dvě věci:

$$g(x_0) = f(x_0) \tag{3}$$

$$g'(x_0) = f'(x_0) \tag{4}$$

Druhý z požadavků plyne z toho, že $g(x) : y = ax + b$ je $LIFU$, takže $g'(x_0) = a$ a také $f'(x_0) = a$, pač derivace je směrnice tečny, kterou chceme nahradit graf funkce f.

2 Náhrada funkce parabolou

Nyní pojďme náhradu funkce $f(x) : y = \dfrac{1}{x}$ vylepšit. Tečna se moc ke grafu nepřimyká, pač je moc rovná, je prostě taková prkenná. Lepší by byla nějaká křivka. Napadne nás, že místo lineární funkce vezmeme tedy funkci **kvadrátickou**, jejímž grafem je **párabola**. Jaký by měla mít párabola recepis? Inspirováni podmínkami 3 a 4 budeme požadovat:

$$g(x_0) = f(x_0) \tag{5}$$

$$g'(x_0) = f'(x_0) \tag{6}$$
$$g''(x_0) = f''(x_0) \tag{7}$$

Hledáme tedy recepis funkce $g(x) : y = ax^2 + bx + c$ tak, aby byly splněny podmínky 5, 6, 7.

Napočítáme si ty derivace:

$g = ax^2 + bx + c$	$f = \frac{1}{x}$
$g' = 2ax + b$	$f' = -\frac{1}{x^2}$
$g'' = 2a$	$f'' = \frac{2}{x^3}$

$g(1) = a + b + c$	$f(1) = 1$
$g'(1) = 2a + b$	$f'(1) = -1$
$g''(1) = 2a$	$f''(1) = 2$

Dostáváme soustavu

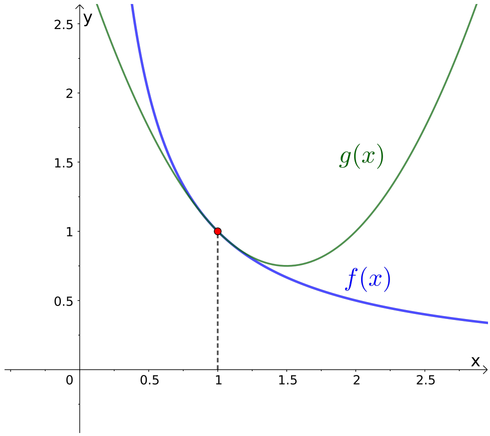
$$a + b + c = 1 \tag{8}$$
$$2a + b = -1 \tag{9}$$
$$2a = 2 \tag{10}$$

Řešením je $a = 1$, $b = -3$, $c = 3$ a funkce g má recepis

$$\boxed{x^2 - 3x + 3 = 0} \tag{11}$$

Nyní obecně – podmínky 5 až 7 dávají soustavu

$$ax_0^2 + bx_0 + c = f(x_0) \tag{12}$$
$$2 \cdot a \cdot x_0^{(2-1)} + b = 2ax_0 + b = f'(x_0) \tag{13}$$
$$2 \cdot 1 \cdot a \cdot x_0^{(1-1)} = 2!a = f''(x_0) \tag{14}$$



Obr. 2

Jejím vyřešením dostaneme hodnoty a, b, c a recepis mnohočlenu $g(x)$ potom po úpravě vypadá takto:

$$\boxed{g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2}$$

Všimněme si, že to lze psát též takto:

$$\boxed{g(x) = \frac{f(x_0)}{0!}(x - x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2} \tag{15}$$

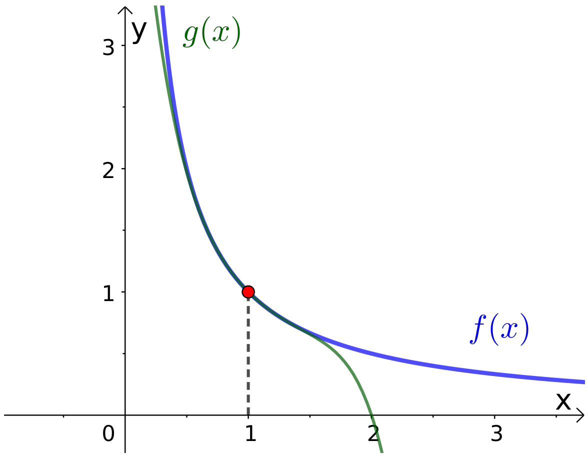
3 Náhrada funkce polynomem

Už jsme použili pro náhradu funkce funkci lineární i kvadrátickou (polynomy 1. a 2. stupně) a mohlo by nás napadnout, že další zpřesnění by daly polynomy vyšších stupňů.

Pojďme jen kvůli úspornosti změnit označení – místo x_0 budeme používat a. Následující polynom je tzv. **Taylorův polynom** (TP).

$$\boxed{g(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n} \tag{16}$$

TP nahrazuje tedy původní funkci $f(x)$. Takže například náhrada funkce $y = \dfrac{1}{x}$ v bodě $a = 1$ vypadá pro polynom stupně 5 takto (viz obr. 3)
a aplet v GeoGebře https://ggbm.at/z4ax54pp):



Obr. 3

4 Rozvoj $\sin x$ a $\cos x$ v bodě $a = 0$

Funkce **sinus** má tyto derivace:

Vidíme, že od 4. derivace se začínají hodnoty opakovat. Rozvoj děláme v $x_0 = 0$:

$f(x)$	$f^{(1)}(x)$	$f^{(2)}(x)$	$f^{(3)}(x)$	$f^{(4)}(x)$	$f^{(5)}(x)$	...
$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	...

$f(0)$	$f^{(1)}(0)$	$f^{(2)}(0)$	$f^{(3)}(0)$	$f^{(4)}(0)$	$f^{(5)}(0)$	...
0	1	0	-1	0	1	...

Vidíme, že v bodě $a = 0$ jsou všechny sudé derivace nulové, takže v rozvoji dle vztahu 16 zůstanou jen členy s lichými mocninami (sinus je *lichá* fce):

$$\boxed{\sin x = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots} \tag{17}$$

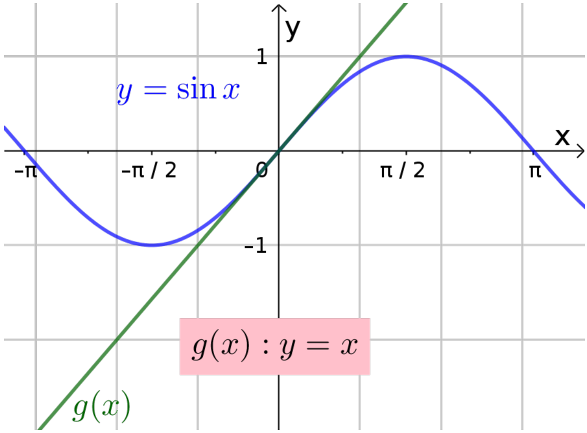
Vidíme, že použijeme-li jen první člen polynomu, dostáváme pro velmi malá x známý přibližný vzorec

$$\boxed{\sin x \doteq x} \tag{18}$$

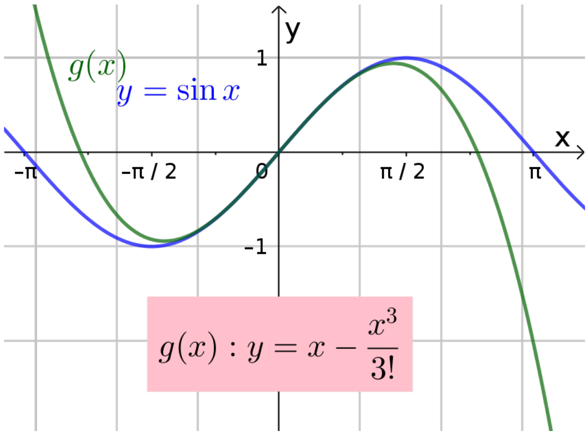
Zde nahrazujeme v nule sinus tečnou $y = x$. Další aproximace viz obrázky 4–7 a dále aplet v GeoGebře https://ggbm.at/c2rrkk5h

Podobně dospějeme k rozvoji funkce **kosinus**. V bodě $a = 0$ budou všechny liché derivace nulové, takže v rozvoji budou jen členy se **sudými** mocninami (kosinus je *sudá* fce). (Viz obrázky 8–11 a dále aplet v GeoGebře https://ggbm.at/nkjqxekq)

$$\boxed{\cos x = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots} \tag{19}$$



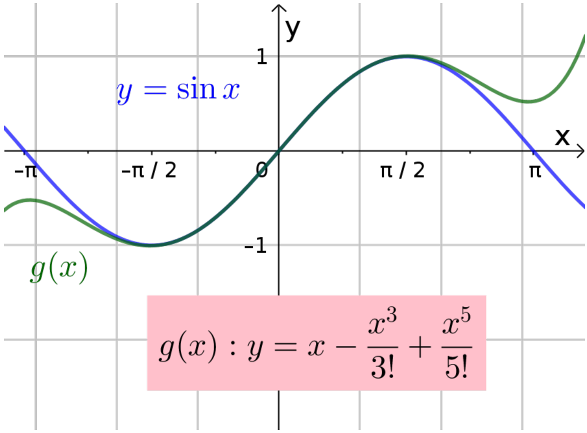
Obr. 4



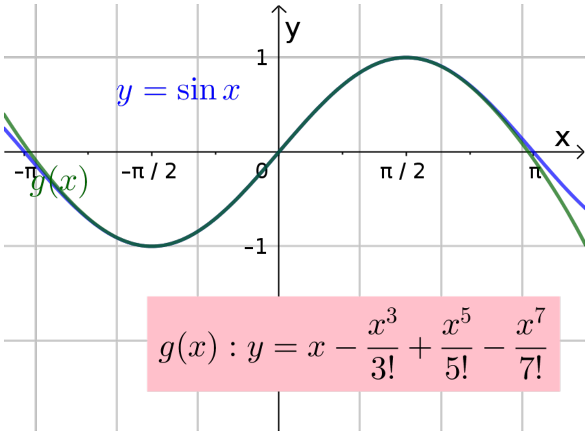
Obr. 5

5 Rozvoj e^x v bodě $a = 0$

Fce $y = e^x$ má všechny derivace rovny e^x a jejich funkční hodnoty v $a = 0$ budou proto všechny rovny 1. Rozvoj bude proto pěkný:



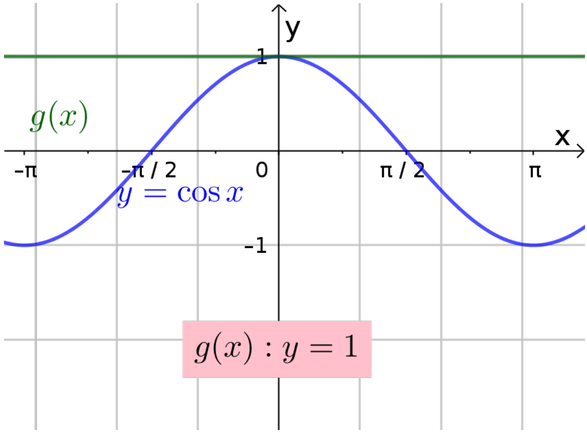
Obr. 6



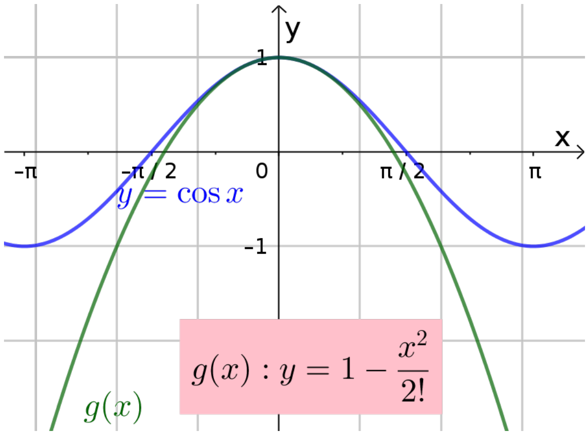
Obr. 7

$$\boxed{e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \dots} \qquad (20)$$

Viz aplet https://ggbm.at/ywdsvnvt a obrázky 12 až 15



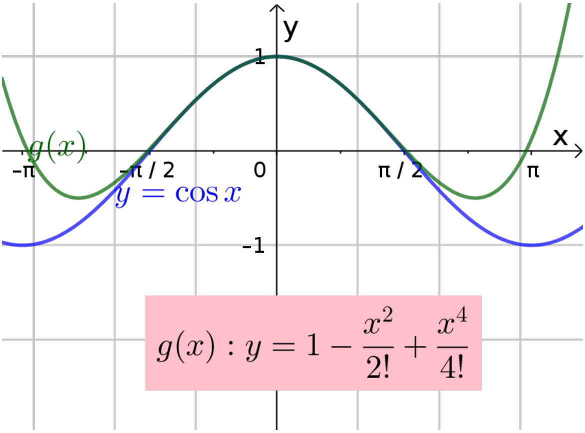
Obr. 8



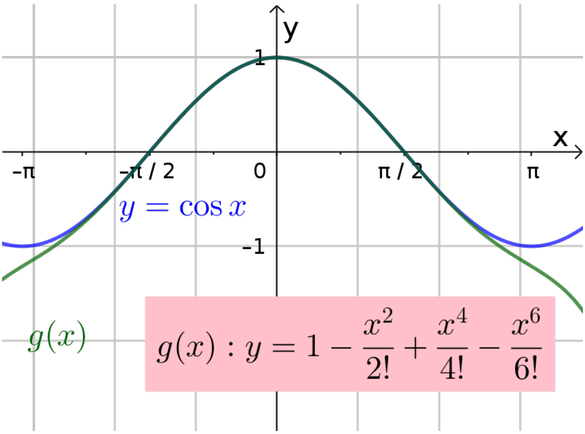
Obr. 9

Pomocí tohoto rozvoje můžeme krástně vyjádřit hodnotu *Eulerova čísla*, stačí dosadit za $x = 1$:

$$\boxed{e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots} \tag{21}$$

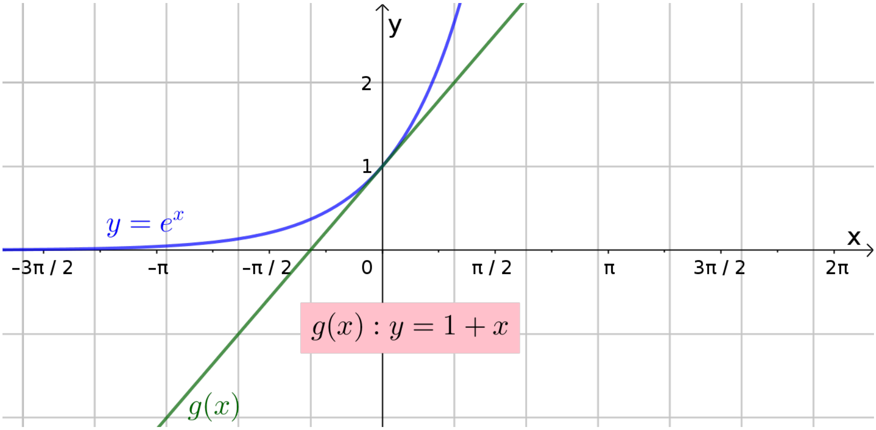


Obr. 10

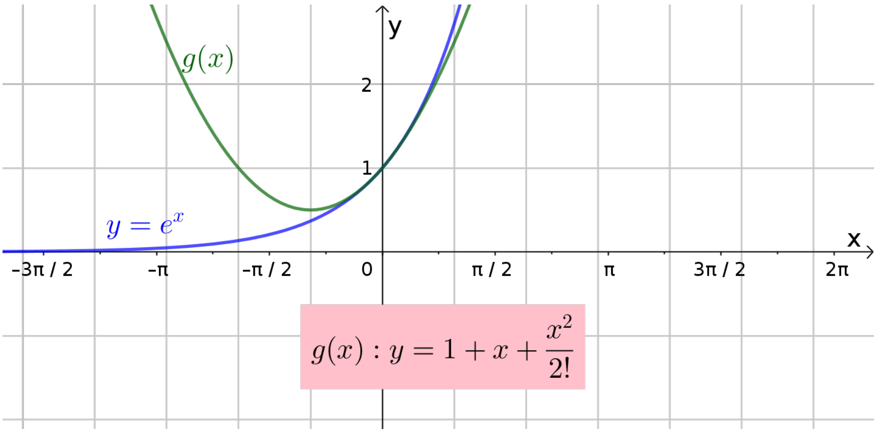


Obr. 11

Vztahem 21 je e vyjádřeno pomocí **nekonečné řady**. První tři členy dávají hodnotu $\frac{8}{3} = 2,\bar{6} \doteq 2,7$, což už dává při zaokrouhlení na jedno desetinné místo rozumnou hodnotu čísla $e = 2,71828182845\ldots$



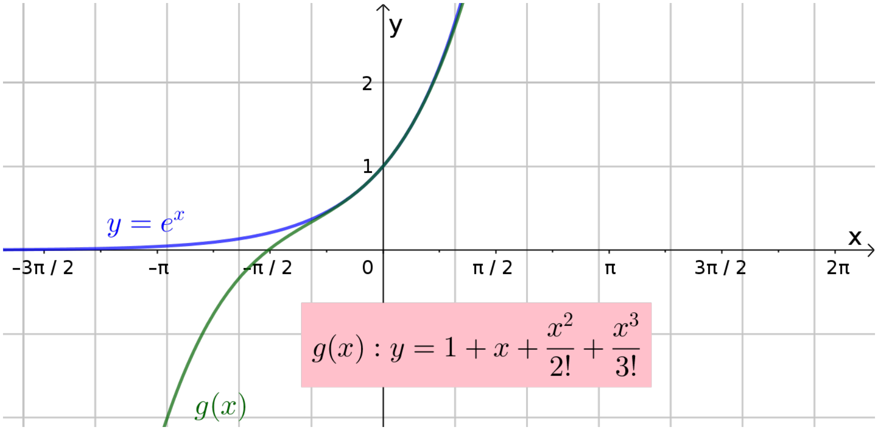
Obr. 12



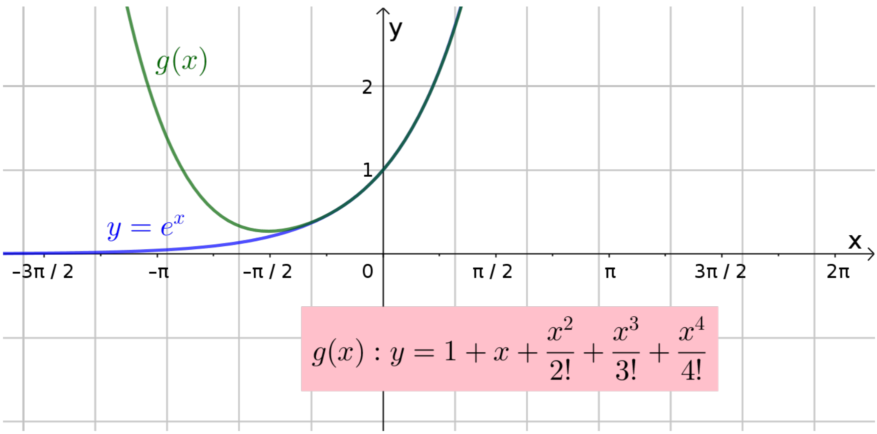
Obr. 13

6 Eulerův vzorec

Porovnáním rozvojů *sinus*, *kosinus* a *přirozené exponenciály* vidíme, že tyto tři funkce spolu úzce souvisejí. Nebýt záporných znamének v rozvojích *sinus* a *kosinus*, stačilo by tyto rozvoje sečíst a dostali bychom rozvoj e^x. Bohužel kužel je to složitější a je potřeba se uchýlit ke kom-



Obr. 14



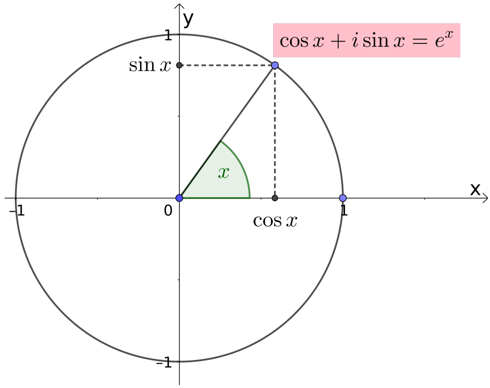
Obr. 15

plexním číslům. Jejich základem je **imaginární jednotka** i, která má tu vlastnost, že

$$i^2 = -1$$

Pro její mocniny dostáváme

$$i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i$$



Obr. 16

Od čtvrté mocniny se už hodnoty začínají opakovat. Toho lze využít – dosadíme do rozvoje e^x místo x výraz $i \cdot x$. Dostáváme

$$e^{ix} = \frac{(ix)^0}{0!} + \frac{(ix)^1}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \dots \tag{22}$$

Po umocnění imaginárních jednotek dostáváme

$$e^{ix} = \frac{x^0}{0!} + i \cdot \frac{x^1}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i \cdot \frac{x^3}{3!} + \dots \tag{23}$$

Vidíme, že členy neobsahující i dávají rozvoj **kosinus** a červené členy obsahující i dávají rozvoj **sinus**. Odtud dostáváme **Eulerův vztah**

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x} \tag{24}$$

Na pravé straně máme **komplexní jednotku** vyjádřenou v **goniometrickém tvaru** (Viz obr. 16).

Dosadíme-li například $x = \dfrac{\pi}{4}$, dostaneme

$$e^{\frac{\pi}{4} i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Nebo pro $x = \frac{\pi}{2}$ dostaneme

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = i$$

Dosadíme-li $x = \pi$, dostaneme $e^{i\pi} = -1$ a po úpravě máme **nejkrásnější rovnici na světě** (viz https://cs.wikipedia.org/wiki/Eulerova_rovnost)

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0} \tag{25}$$

Δ

Da Sista Les

∞