อนุกรม (Series)

บทนิยาม

อนุกรม (Series) คือ ผลบวกของพจน์ทุกพจน์ของลำดับ

- เมื่อ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ เป็นลำดับจำกัด
  เรียก $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ ว่า **"อนุกรมจำกัด"**
  เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sum_{i=1}^{n} a_i$
- เมื่อ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ เป็นลำดับอนันต์
  เรียก $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ ว่า **"อนุกรมอนันต์"**
  เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$
  จากบทนิยาม จะได้ว่า
  - อนุกรมจำกัด มาจากลำดับจำกัด
  - อนุกรมอนันต์ มาจากลำดับอนันต์

สมบัติบางประการเกี่ยวกับการใช้ $\sum$

1. $\sum_{i=1}^{n} c = \underbrace{c + c + c + \ldots + c}_{n \text{ จำนวน}} = cn$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่
2. $\sum_{i=1}^{n} ca_1 = c\sum_{i=1}^{n} a_i$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่
3. $\sum_{i=1}^{n} i\ (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1} b_i$
4. $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n + 1)$
5. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n}{6}(2n + 1)(n + 1)$
6. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (\frac{n}{2}(n + 1))^2$

1. จงเขียนสัญลักษณ์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปการบวก

   1) $\sum_{i=1}^{5} i$

   2) $\sum_{i=1}^{10} 2i$

   3) $\sum_{k=1}^{6} (k+1)$

   4) $\sum_{j=1}^{5} (j+1)^2$

   5) $\sum_{k=1}^{3} (k^2 - 2k + 5)$

2. จงหาค่าของ

   1) $\sum_{i=1}^{10} i$

   2) $\sum_{k=1}^{5} 3k$

   3) $\sum_{i=1}^{4} (i^2 - 2i + 3)$

   4) $\sum_{k=1}^{5} \frac{k+1}{k+2}$

   5) $\sum_{j=1}^{5} (j+1)(j+2)$

3. จงเขียนอนุกรมต่อไปนี้ในรูปที่ใช้เครื่องหมาย $\sum$

1) $2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 2 \cdot 12$

2) $3 \cdot 5 + 3 \cdot 25 + 3 \cdot 125 + \ldots + 3 \cdot 5^{10}$

3) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$

4) $1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{25} + \dots + \frac{4}{125} + \dots$

5) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

6) $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \dots$