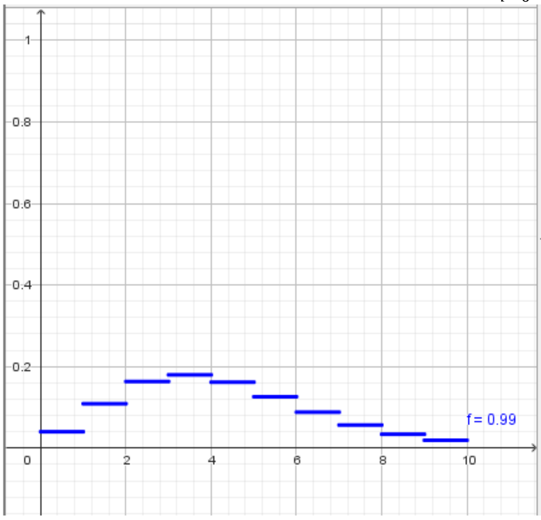
☺ Distribución Binomial Negativa. X ~ BiNe(r,p).

Una v. a. X tiene distribución Binomial Negativa de parámetros $r \in \mathbb{N}$ y $p \in (0,1)$. Siendo $q = 1 - p$

si tiene como función de probabilidad: $f_X(x) =$ Y cuya función de distribución es: $F_X(x) =$

$= 0 \cdot I_{\{\mathbb{R}-\mathbb{N}\}}(x) + \binom{r+x-1}{x} \cdot p^r \cdot q^x I_{\{\mathbb{N}\}}(x)$ $= 0 \cdot I_{\{(-\infty,0)\}}(x) + \sum_{i=0}^{[x]} f(i) \cdot I_{\{[0,+\infty)\}}(x)$



Ejemplo de f(x) para p=0,7 y r=9

Este tipo de variables se utilizan cuando tenemos que realizar una sucesión de pruebas de Bernoulli, es decir, experimentos donde el resultado puede ser éxito o fracaso, y la v. a. representa el número total de fracasos x, y r -1 éxitos, antes de obtener el último éxito.

Además, teniendo en cuenta que

$$\binom{r+x-1}{x} = \binom{r-1+x}{x} = \frac{(r-1+x)\cdot(r-1+x-1)\cdot\ldots\cdot(r-1+x-x+1)}{x!} =$$

$$= \frac{r\cdot(r+1)\cdot\ldots\cdot(r+x-1)}{x!} = \frac{(-1)^x\cdot(-r)\cdot(-r-1)\cdot\ldots\cdot(-r-x+1)}{x!} = (-1)^x \cdot \binom{-r}{x}$$

Será:

$$f_X(x) = 0\cdot I_{\{\mathbb{R}-\mathbb{N}\}}(x) + \binom{-r}{x}\cdot(-1)^x\cdot p^r\cdot q^x I_{\{\mathbb{N}\}}(x) = 0\cdot I_{\{\mathbb{R}-\mathbb{N}\}}(x) + \binom{-r}{x}\cdot p^r\cdot(-q)^x I_{\{\mathbb{N}\}}(x)$$

Además, como:

$$p^{-r} = (1-q)^{-r} = \sum_{x=0}^{+\infty} \binom{-r}{x}\cdot(-q)^x$$

Se comprueba:

$$\sum_{x=0}^{+\infty} f_X(x) = \sum_{x=0}^{+\infty} \binom{-r}{x} p^r\cdot(-q)^x = p^r\cdot\sum_{x=0}^{+\infty}\binom{-r}{x}(-q)^x = p^r\cdot p^{-r} = 1$$

Además

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a) \quad .$$

Algunos de sus parámetros o momentos destacables son:

- ✔ $E\{X^k\}=\sum_{i=0}^{+\infty} i^k \cdot f(i)=\sum_{i=0}^{+\infty} i^k \cdot \binom{-r}{i} \cdot p^r \cdot (-q)^i ; \forall\, k \in \mathbb{N}-\{0\}$

  Para $k=1$, Se cumple:

  $$E\{X\}=\sum_{i=0}^{+\infty} i \cdot f(i)=\sum_{i=0}^{+\infty} i \cdot \binom{-r}{i} \cdot p^r \cdot (-q)^i=\frac{r \cdot q}{p}$$

- ✔ $E\{(X-\alpha)^k\}=\sum_{i=0}^{n} (i-E\{X\})^k \cdot f(i)=\sum_{i=0}^{n} \left(i-\frac{r \cdot q}{p}\right)^k \cdot \binom{-r}{i} \cdot p^r \cdot (-q)^i ; \forall\, k \in \mathbb{N}-\{0\}$.

  En particular si $k=2$, se cumple:

  $$E\{(X-\alpha)^2\}=\sum_{i=0}^{n} (i-E\{X\})^2 \cdot f(i)=\sum_{i=0}^{n} \left(i-\frac{r \cdot q}{p}\right)^2 \cdot \binom{-r}{i} \cdot p^r \cdot (-q)^i ;=\frac{r \cdot q}{p^2}=\mu_2$$

- ✔ $\phi_X(t)=E\{e^{X \cdot t \cdot \hat{\imath}}\}=\left(\frac{p}{1-(1-p) \cdot e^{t \cdot \hat{\imath}}}\right)^r$