

# Hoofdstuk II: rationale functies

[www.karelappeltans.be](http://www.karelappeltans.be)

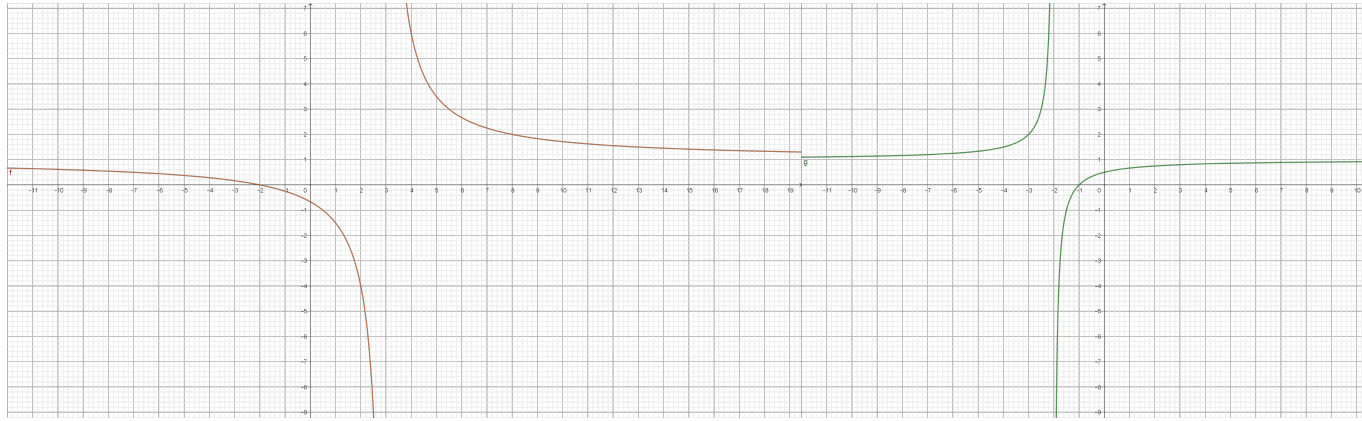
September 26, 2024

## Contents

<b>1</b>	<b>Voorbeelden</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Definitie</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>homografische functies</b>	<b>3</b>
3.1	basisfunctie $f(x) = \frac{1}{x}$ .....	3
3.2	homografische functies: transformaties van $f(x) = \frac{1}{x}$ .....	3
<b>4</b>	<b>Domein</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>Nulpunten</b>	<b>4</b>
<b>6</b>	<b>Tekentabel</b>	<b>5</b>
<b>7</b>	<b>ongelijkheden</b>	<b>5</b>
<b>8</b>	<b>Asymptoten en perforaties</b>	<b>6</b>
8.1	begripsvorming .....	6
8.2	overzicht .....	7
<b>9</b>	<b>Toepassingen</b>	<b>7</b>
<b>10</b>	<b>Oefeningen</b>	<b>7</b>
<b>11</b>	<b>taken</b>	<b>9</b>

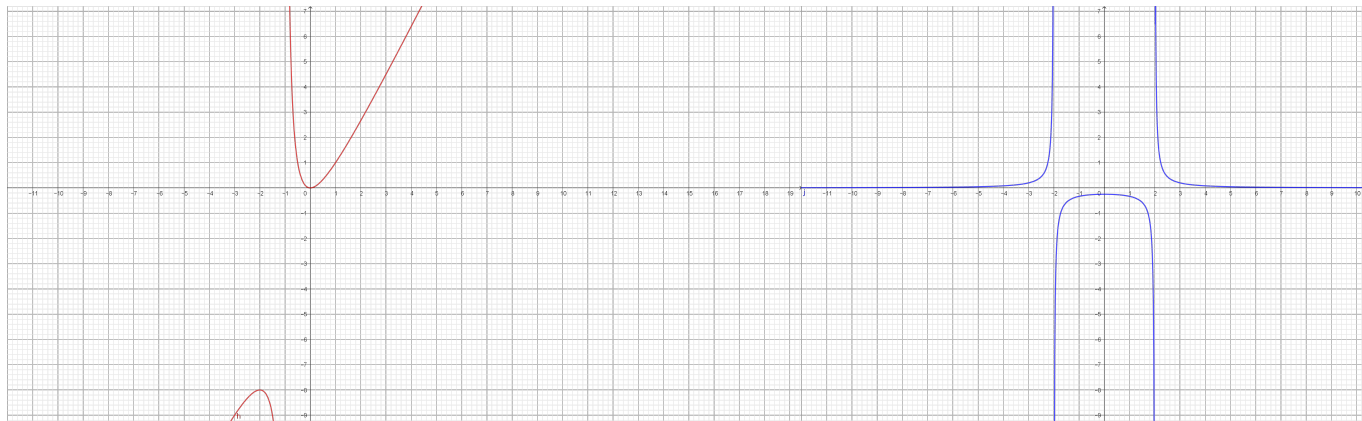
# 1 Voorbeelden

$$f(x) = \frac{x+2}{x-3} \quad g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+x-2} \quad h(x) = \frac{2x^2}{x+1} \quad j(x) = \frac{1}{x^2-4}$$



(a)  $f(x)$

(b)  $g(x)$



(c)  $h(x)$

(d)  $j(x)$

Figure 1: voorbeelden rationale functies

# 2 Definitie

Een rationale functie is een breuk van twee veeltermfuncties met  $gr(N) \geq 1$

### 3 homografische functies

#### 3.1 basisfunctie $f(x) = \frac{1}{x}$

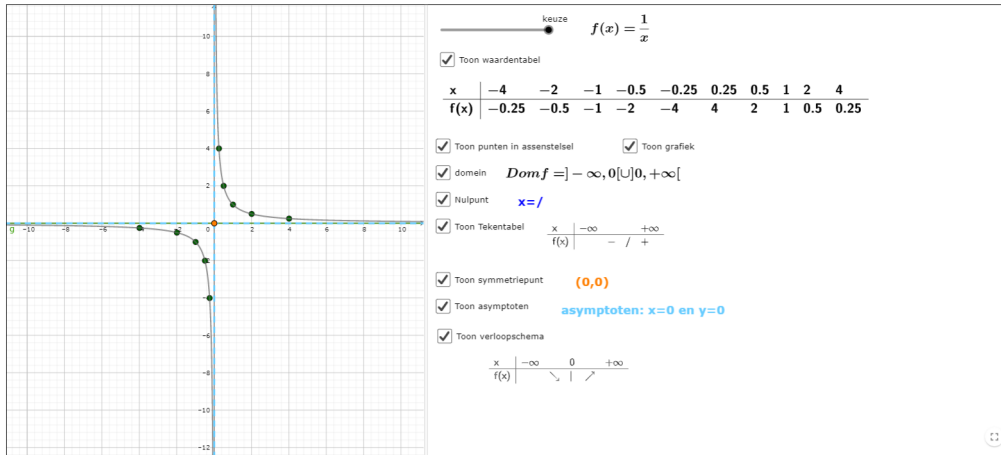


Figure 2: <https://www.geogebra.org/m/c3hg3FfG>

#### 3.2 homografische functies: transformaties van $f(x) = \frac{1}{x}$

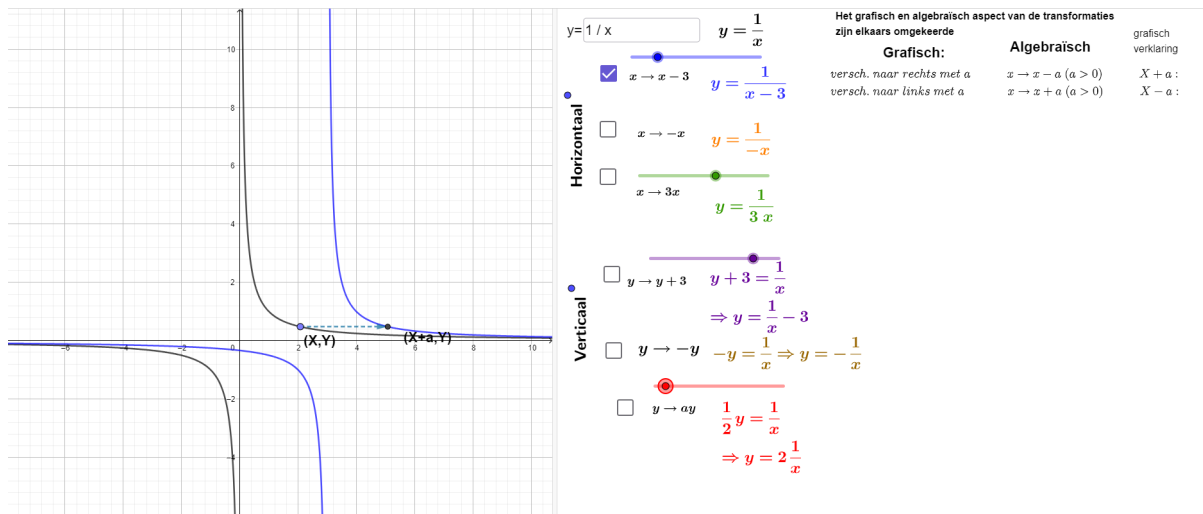


Figure 3: <https://www.geogebra.org/m/mq5zhh8t>

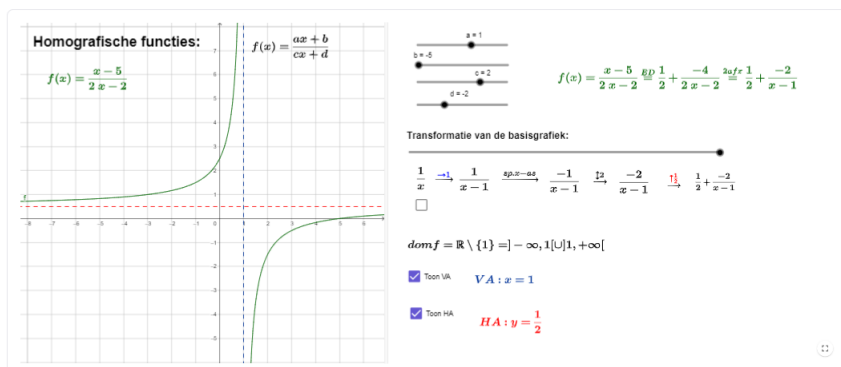


Figure 4: <https://www.geogebra.org/m/DaRnenDn>

## 4 Domein

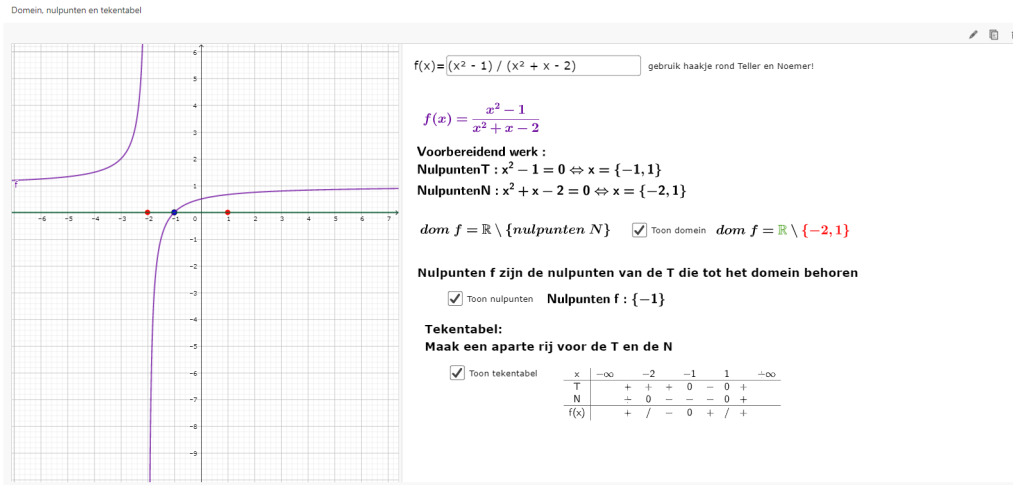


Figure 5: <https://www.geogebra.org/m/sz7kypag>

## 5 Nulpunten

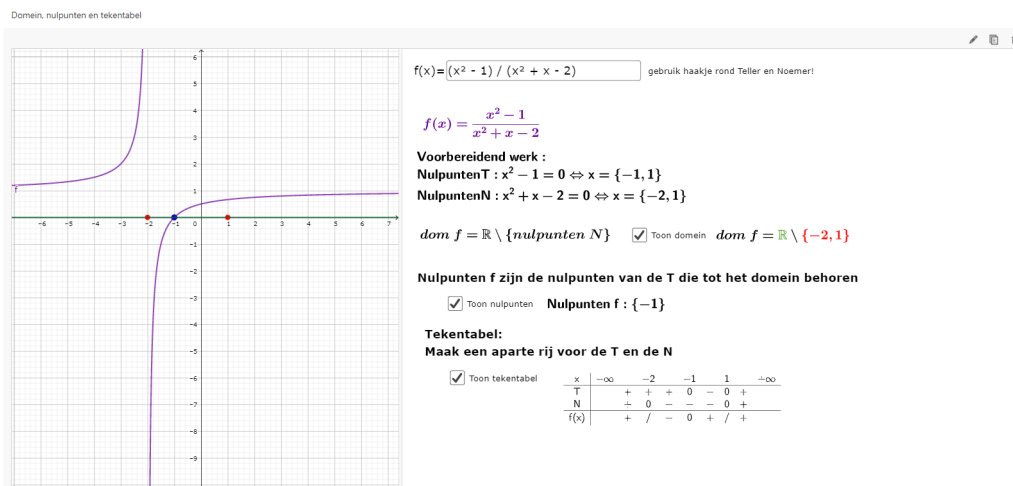


Figure 6: <https://www.geogebra.org/m/sz7kypag>

## 6 Tekentabel

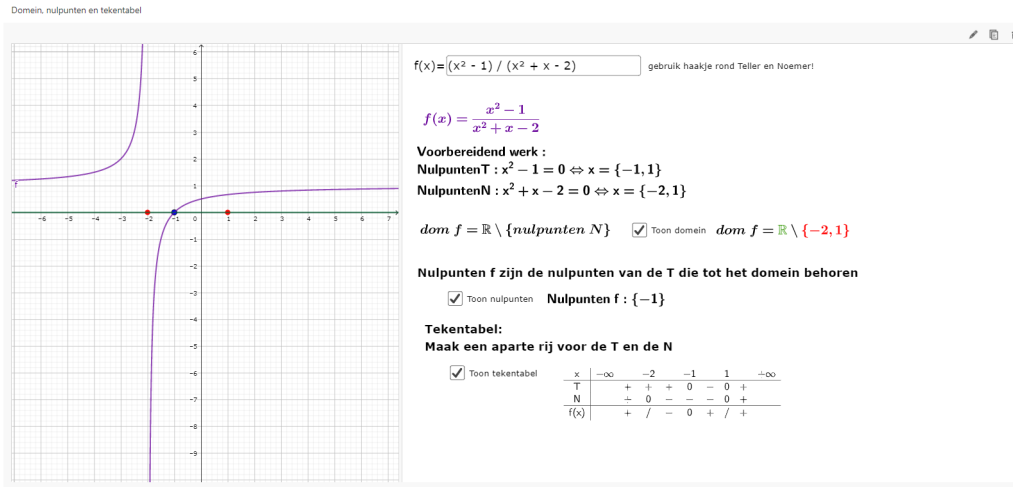


Figure 7: <https://www.geogebra.org/m/sz7kypag>

## 7 ongelijkheden

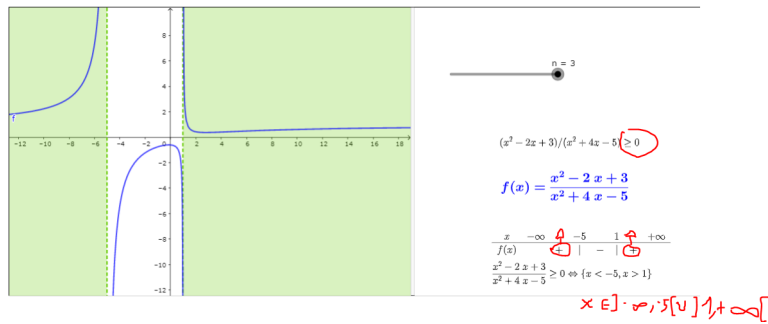


Figure 8: <https://www.geogebra.org/m/dR7jSdKn>

# 8 Asymptoten en perforaties

## 8.1 begripsvorming

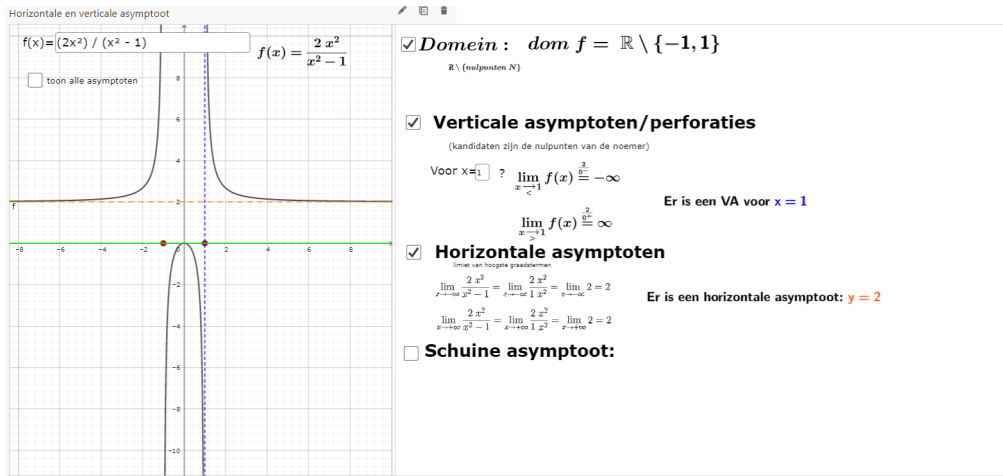


Figure 9: <https://www.geogebra.org/m/sz7kypag>

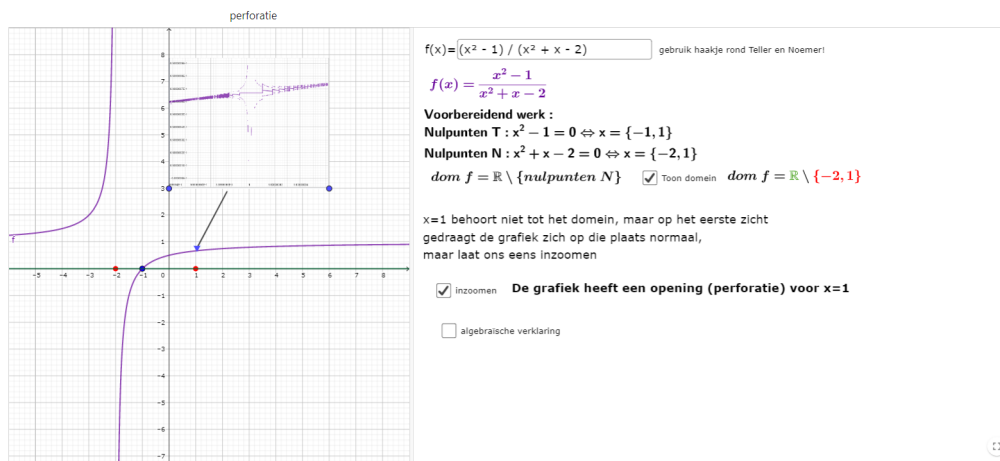


Figure 10: <https://www.geogebra.org/m/sz7kypag>

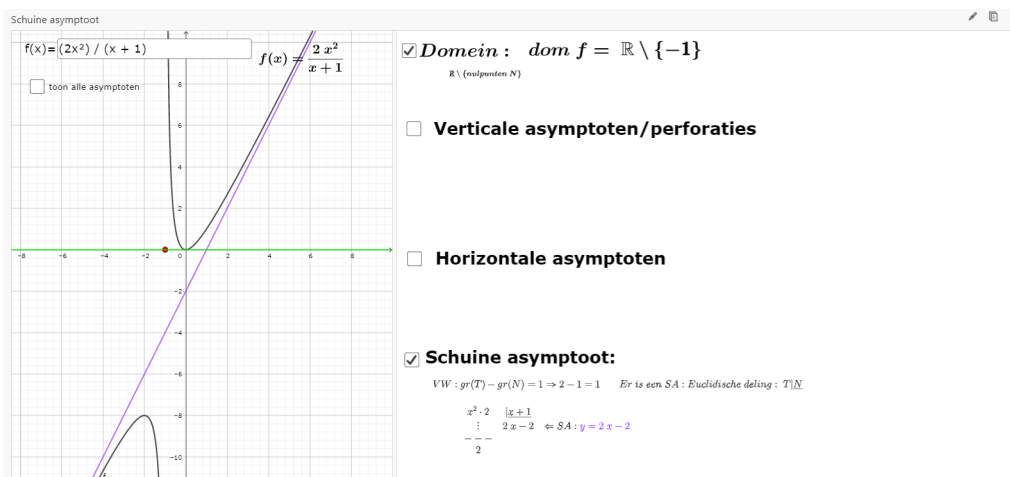


Figure 11: <https://www.geogebra.org/m/sz7kypag>

## 8.2 overzicht

### VA en perforatie

kandidaten: nulpunten noemer

VA:  $x = a$  als na vereenvoudiging  $(x-a)$  nog steeds een factor van de Noemer is.

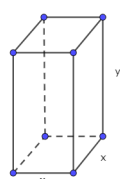
perforatie:  $P(a,g(a))$  als na vereenvoudiging  $(x-a)$  geen factor meer is van de Noemer.

### HA en SA

HA:  $y = b$  als  $gr(T) \leq gr(N)$

SA:  $y = ax + b$  als  $gr(T) - gr(N) = 1$

## 9 Toepassingen



De inhoud van een doos met vierkante bodem heeft een inhoud van  $125 \text{ cm}^3$   
Bepaal de afmetingen zodat  $150 \text{ cm}^2$  materiaal gebruikt wordt voor de wanden

#### 1) keuze onbekenden

2) Verband tussen de onbekenden uit het gegeven

$$x^2 \cdot y = 125 \Rightarrow y = \frac{125}{x^2}$$

3) Het gevraagde wiskundig uitdrukken

$$\begin{aligned} opp &= 2x^2 + 4xy = 150 \\ \Rightarrow 2x^2 + 4x \cdot \frac{125}{x^2} &= 150 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + \frac{500}{x} &= 150 \\ \Leftrightarrow \frac{2x^3 - 150x + 500}{x} &= 0 \end{aligned}$$

#### 4) vergelijking oplossen

$$x^3 - 75x + 250 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & -75 & +250 & \\ 5 & 5 & 25 & -250 & \\ \hline 1 & 5 & -50 & 0 & \end{array}$$

$$(x - 5)(x^2 + 5x - 50) = 0$$

$$s = -5, y = -50 \Rightarrow x_1 = -10; x_2 = 5$$

#### 5) Formuleer het antwoord

$$x = 5 \text{ cm en } y = \frac{125}{25} = 5 \text{ cm}$$

Figure 12: <https://www.geogebra.org/m/sz7kypag>

## 10 Oefeningen

- Welk functievoorschrift bekom je als je onderstaande transformaties uitvoert op de grafiek van  $f(x) = \frac{1}{x}$ ?
  - horizontale verschuiving 3 naar rechts, horizontale inkrimping met factor 2, spiegeling om x-as, verticale verschuiving 2 naar onder
  - verticale uitrekking met factor 2, 3 naar links en 1 omhoog
- Schets zonder gebruik te maken van ICT, maar wel m.b.v. transformaties de grafiek van volgende homografische functies:
  - $f(x) = \frac{3x+1}{x-1}$
  - $f(x) = \frac{3x-4}{-x+1}$
  - $f(x) = \frac{9x-8}{3x-6}$
  - $f(x) = \frac{-x}{x-2}$
- Gegeven is de functie f met voorschrift  $y = \frac{4x+1}{2x-1}$ 
  - Welke transformaties zetten de grafiek van  $y = \frac{1}{x}$  om in de grafiek van f?
  - Welke rechten zijn asymptoten van de grafiek van f?
  - Teken de grafiek van f
  - Bepaal het domein, het bereik en de nulpunten van f
  - Los de ongelijkheid  $f(x) > 3$  op met behulp van de grafiek van f

4. Bepaal domein, nulpunten en teken tabel van

(a)  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 8}{x - 2}$

(b)  $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 24}{x^2 + 2x - 15}$

(c)  $f(x) = \frac{x - 6}{x^3 - 7x^2 - 6x + 72}$

(d)  $f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + x + 5}{x^2 + 4x - 5}$

5. Los de volgende ongelijkheden op

(a)  $\frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} < 0$

(b)  $\frac{x^2 + 9}{x^3 + 12x^2 + 11x} \leq \frac{1}{x}$

(c)  $\frac{x}{x - 1} \geq \frac{20}{(x - 1)^2}$

(d)  $\frac{(4 - x^2)(3x^2 - 9x + 6)}{2x + 4} \leq 0$

6. Bepaal de eventuele asymptoten en/of perforaties van de grafiek van de rationale functies van oefening 2

7. Bepaal de eventuele asymptoten en/of perforaties van de grafiek van de rationale functies van oefening 4

8. Bepaal domein en de eventuele asymptoten en/of perforaties van de grafiek van volgende rationale functies:

(a)  $y = f(x) = \frac{(x + 5)^3(2x + 4)}{(x + 5)^2(x + 2)^3}$

(b)  $y = f(x) = \frac{(x - 1)^3(-x + 3)}{(x - 1)^4}$

9. Bepaal de waarde van b opdat de functie f met als functievoorschrift  $f(x) = \frac{1}{x^3 + (2 + 2b)x^2 + (4b + b^2)x + 2b^2}$  een VA heeft met vergelijking  $x = -3$  (A.  $b = 3$ )

10. Bepaal de waarde van de parameters a, b en c als je weet dat de grafiek van  $f(x) = \frac{3(x - 1)^2}{ax^2 + bx + c}$  een HA heeft voor  $y = 3$ , een VA heeft voor  $x = -2$  en door het punt  $P(3, \frac{12}{5})$  gaat.

11. Bepaal de waarde van de parameters a en b als je weet dat de grafiek van  $f(x) = \frac{ax^2 + bx}{2x - 5}$  een SA heeft met als vergelijking  $y = 2x - 5$

12. Bepaal het voorschrift van een mogelijke rationale functie met een grafiek met volgende kenmerken:

(a) VA  $x = 3$ ; nulpunt  $x = 2$ ; HA  $y = 4$

(b) geen nulpunten en asymptoten, maar een perforatiepunt  $P(2, 3)$

(c) SA  $y = 2x + 3$ , np  $x = 1$ , VA  $x = -2$

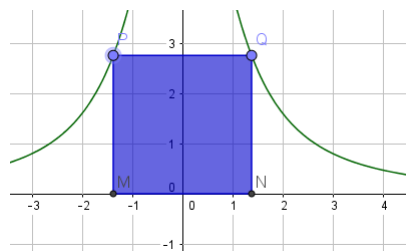
(d) even functie, met o.a. VA  $x = -2$ , perforatie  $P(1, -1)$

13. Stellen f(x) en g(x) dezelfde functies voor? Verklaar uw antwoord

(a)  $f(x) = \frac{x^2 - x}{x}$  en  $g(x) = x - 1$

(b)  $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{(x + 2)^2}$  en  $g(x) = \frac{x + 1}{x + 2}$

14. Bepaal de afmetingen van de rechthoek zodat deze een oppervlakte heeft van 4 eenheden. De hoekpunten P en Q liggen op de grafiek van  $f(x) = \frac{8}{1 + x^2}$ .





15. Een internetprovider rekent 50 euro aansluitingskosten aan en daarna een maandelijks abonnement van 23 euro.
- (a) Geef een functievoorschrift voor de gemiddelde maandelijkse kostprijs
  - (b) Na hoeveel maanden is er een gemiddelde kostprijs van 30 euro?
  - (c) Geef de betekenis van de HA van de grafiek in deze context.
16. In een grote ton wordt 100 l gemengd met 5 kg zout. Nu wordt per minuut 10 l water toegevoegd en 1 kg zout.
- (a) vergelijk de concentratie zout na 12 min met de beginconcentratie (A.  $C(t) = \frac{5+t}{100+10t}$ ,  $\frac{17}{220} > \frac{1}{20}$ )
  - (b) Bepaal de concentratie op lange termijn. (A.  $\frac{1}{10}$ )

## 11 taken

1. rationale functies