Problemas – Tema 6

Problemas resueltos - 16 - aplicar inversa para resolver ecuaciones matriciales

1. Despeja X de la ecuación matricial $X(CD)^{-1}=A+X(D^{-1}C^{-1}-B)$, siendo A, B, C y D matrices cuadradas invertibles.

Recordamos que una matriz multiplicada por su inversa da la matriz identidad → $A A^{-1}=I$

Recordamos que una matriz multiplicada por la matriz identidad, resulta la propia matriz → $A I=A$

Recordamos que el producto de matrices no es conmutativo, por lo que por lo general → $AB\neq BA$ → Por lo que al multiplicar matrices debemos tener muy claro el lado por donde aplicamos la inversa.

Más cosas: la inversa de un producto resulta $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. Ojo que cambia el orden de la matrices cuando el operador inversa actúa sobre cada término del producto.

Y por Dios... que nadie divida matrices. La división de matrices no está definida.

Con todo esto a modo de repaso, resolvemos.

$X(CD)^{-1}=A+X(D^{-1}C^{-1}-B)$ → Aplico por la derecha la inversa de $(CD)^{-1}$

$X(CD)^{-1}CD=[A+X(D^{-1}C^{-1}-B)]CD \rightarrow X I=[A+X(D^{-1}C^{-1}-B)]CD$

Donde I es la matriz identidad.

$X=ACD+X(D^{-1}C^{-1}-B)CD \rightarrow X=ACD+(XD^{-1}C^{-1}-XB)CD$

$X=ACD+XD^{-1}C^{-1}CD-XBCD$

Es fundamental aplicar los productos en el orden correcto.

$X=ACD+XD^{-1}ID-XBCD \rightarrow X=ACD+XD^{-1}D-XBCD$

$X=ACD+XI-XBCD \rightarrow X=ACD+X-XBCD \rightarrow 0=ACD-XBCD$

Donde 0 es la matriz nula.

$XBCD=ACD \rightarrow XBCDD^{-1}=ACDD^{-1} \rightarrow XBC=AC \rightarrow XBCC^{-1}=ACC^{-1}$

$XB=A \rightarrow XBB^{-1}=AB^{-1} \rightarrow X=AB^{-1}$

Resumiendo: tenemos que ir aplicando matrices inversas, sin equivocarnos de lado de aplicación. Y cuando coincida una matriz y su inversa, cancelan como la matriz identidad.

2. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

a) Hallar, si existe, la matriz inversa de A **.**

b) Determine, si existe, la solución X **de la ecuación matricial** $A=A\cdot X\cdot A^{-1}+B$

a) Aplicamos método directo:

$$A\cdot A^{-1}=I \;\rightarrow\; \begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix}3a+5c & 3b+5d\\ a+2c & b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Igualamos término a término, y formamos un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, que puede descomponerse en dos sistemas 2x2.

$$\begin{Bmatrix}3a+5c=1\\ 3b+5d=0\\ a+2c=0\\ b+2d=1\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}3a+5c=1\\ a+2c=0\end{Bmatrix} \;\rightarrow\; \begin{Bmatrix}3a+5c=1\\ -3a-6c=0\end{Bmatrix} \;\rightarrow\; -c=1 \;\rightarrow\; c=-1 \;\rightarrow\; a-2=0 \;\rightarrow\; a=2$$

$$\begin{Bmatrix}3b+5d=0\\ b+2d=1\end{Bmatrix} \;\rightarrow\; \begin{Bmatrix}3b+5d=0\\ -3b-6d=-3\end{Bmatrix} \;\rightarrow\; -d=-3 \;\rightarrow\; d=3 \;\rightarrow\; 3b+15=0 \;\rightarrow\; b=-5$$

Por lo tanto → $A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

b) $A=A\cdot X\cdot A^{-1}+B \;\rightarrow\; A-B=A\cdot X\cdot A^{-1} \;\rightarrow\; A^{-1}(A-B)=X\cdot A^{-1} \;\rightarrow\; A^{-1}(A-B)A=X$

Sustituimos las matrices y operamos:

$$X=\begin{pmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 8\\ -5 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35 & 61\\ -19 & -33\end{pmatrix}$$