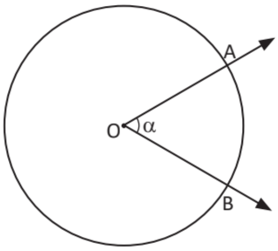
5.2. Çemberde Açılar

5.2.1. Bir Çemberde Merkez Açı, Çevre Açı, İç Açı, Dış Açı ve Teğet-Kiriş Açı

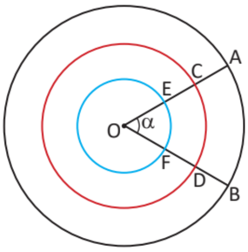
Merkez Açı

Köşesi çemberin merkezinde olan açıya çemberin bir **merkez açı**sı denir. Merkez açının özellikleri üç adımda incelenecektir.

1. Bir çemberde bir merkez açının ölçüsü bu merkez açının gördüğü yayın ölçüsüne eşittir.

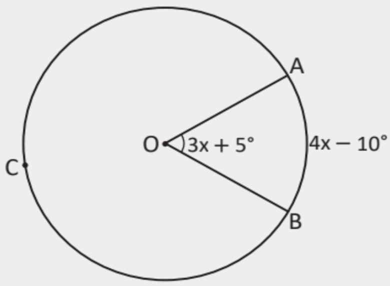


Yandaki şekilde ölçüsü α olan AOB açısı bir merkez açıdır.
AB yayı, AOB açısının gördüğü yaydır.



Merkezleri O olan üç çemberin merkez açılarının ölçüsü α olsun.
α, görmüş olduğu yay ölçülerine eşittir. Buna göre
dıştaki çember için $\alpha = m(\overset{\frown}{AB})$
ortadaki çember için $\alpha = m(\overset{\frown}{CD})$
içteki çember için $\alpha = m(\overset{\frown}{EF})$ olur.

ÖRNEK:



Yandaki O merkezli çemberde $m(\widehat{AOB}) = 3x + 5°$ ve $m(\overset{\frown}{AB}) = 4x - 10°$ olduğuna göre ACB yayının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

$\widehat{AOB}$ merkez açı olduğu için ölçüsü $\overset{\frown}{AB}$ nın ölçüsüne eşittir.

$4x - 10° = 3x + 5° \Rightarrow 4x - 3x = 5° + 10°$

$\Rightarrow x = 15°$ olur.

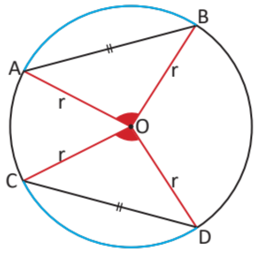
Bu değer $m(\overset{\frown}{AB}) = 4x - 10°$ eşitliğinde yerine yazıldığında

$m(\overset{\frown}{AB}) = 4 \cdot 15° - 10° = 50°$ olur. Buradan

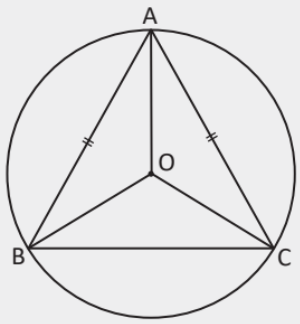
$m(\overset{\frown}{ACB}) = 360° - 50° = 310°$ olur.

2. Çemberde eş kirişlerin belirlediği yaylar eştir.

Yandaki çemberde $|AB| = |CD|$ olsun.
Çizilen yarıçaplarla oluşturulan $\widehat{AOB}$ ve $\widehat{COD}$ eş üçgenlerdir (K.K.K.).
Dolayısıyla iki üçgenin tepe açıları eşittir.
Bir çemberde merkez açının ölçüsü, bu merkez açının gördüğü yayın ölçüsüne eşit olduğundan $m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{CD})$ olur.
O hâlde çemberde eş kirişlerin belirlediği yaylar eştir.



ÖRNEK:



Yandaki şekilde köşeleri O merkezli çember üzerinde olan ABC ikizkenar üçgeninde $|AB| = |AC|$ olarak veriliyor.
$m(\overset{\frown}{BC}) = 100°$ ve $m(\widehat{BOA}) = 3x + 10°$ olduğuna göre x değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

Yukarıdaki şekilde

$m(\overset{\frown}{BC}) = 100° \Rightarrow m(\overset{\frown}{BAC}) = 360° - 100° = 260°$ olur.

$|AB| = |AC|$ olduğundan $m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{AC}) = \dfrac{260°}{2} = 130°$ olur.

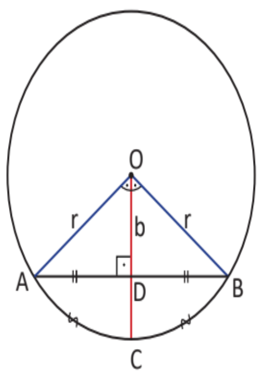
$\widehat{BOA}$ merkez açı olduğundan bu açının gördüğü yayın ölçüsüne eşittir.

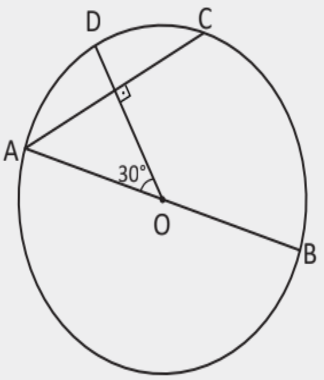
$3x + 10° = 130° \Rightarrow 3x = 120°$

$\Rightarrow x = 40°$ olur.

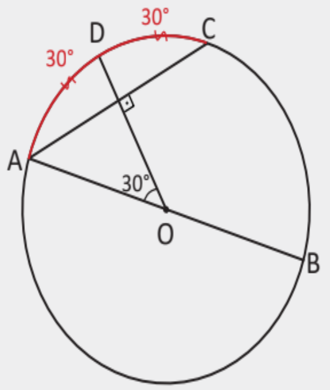
3. Bir çemberin merkezinden kirişe indirilen dikme bu kirişin gördüğü yayı ortalar.

Yandaki O merkezli çemberde $\widehat{AOB}$ ikizkenar üçgen olduğundan merkezden AB kirişine indirilen dikme aynı zamanda üçgenin açıortayıdır.
AOC ve COB merkez açılarının ölçüleri eşit olduğundan
$m(\overset{\frown}{AC}) = m(\overset{\frown}{CB})$ olur.
O hâlde bir çemberin merkezinden kirişe indirilen dikme bu kirişin gördüğü yayı ortalar.





Yandaki O merkezli çemberde $[OD] \perp [AC]$ ve $[AB]$ çaptır.
$m(\widehat{AOD}) = 30°$ olduğuna göre
$m(\overset{\frown}{CB})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

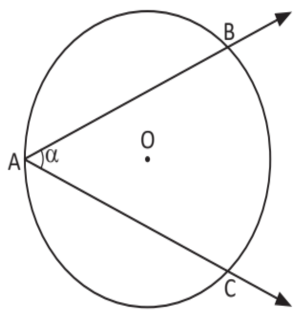


Çözüm

Yandaki çemberde AOD merkez açısı AD yayını gördüğünden $m(\overset{\frown}{AD}) = 30°$ olur.
OD dikmesi AC yayını ortalar.
$m(\overset{\frown}{AD}) = m(\overset{\frown}{DC}) = 30°$ olur.
$m(\overset{\frown}{ACB}) = 180°$ olduğundan
$m(\overset{\frown}{BC}) = 180° - (30° + 30°) = 120°$ olur.

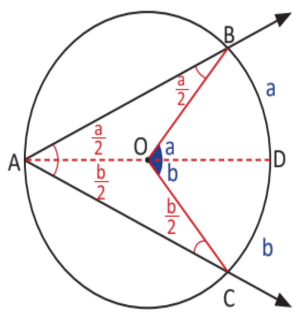
Çevre Açı

Köşesi çemberin üzerinde olan ve kenarları çemberi kesen açıya çemberin bir **çevre açısı** denir. Çevre açının özellikleri dört adımda incelenecektir.



Yandaki şekilde ölçüsü α olan BAC açısı çevre açıdır.
$\overset{\frown}{BC}$, BAC açısının gördüğü yaydır.

1. Bir çemberde çevre açının ölçüsü, bu açının gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşittir.

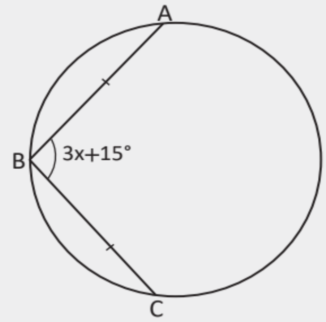


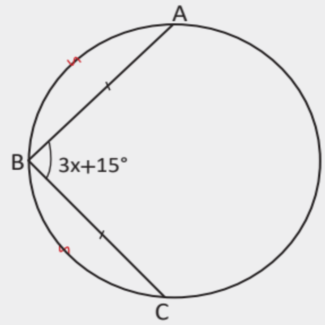
Yandaki şekilde O merkezli çemberde [AD] çap olmak üzere
$m(\overset{\frown}{BD}) = a$ ve $m(\overset{\frown}{DC}) = b$ olsun. Buradan
$m(\widehat{BOD}) = a$ ve $(\widehat{DOC}) = b$ olur.
OAB ve OAC ikizkenar üçgen olduğundan
$m(\widehat{OAB}) = m(\widehat{OBA}) = \frac{a}{2}$ ve $m(\widehat{OAC}) = m(\widehat{OCA}) = \frac{b}{2}$ olur.

Buradan A çevre açısının ölçüsü $m(\widehat{A}) = \frac{a+b}{2} = \frac{m(\overset{\frown}{BC})}{2}$ olur.

2. Bir çemberde çevre açının ölçüsü aynı yayı gören merkez açının ölçüsünün yarısına eşittir.

Yukarıdaki şekilde $m(\widehat{BAC}) = \frac{m(\widehat{BOC})}{2} = \frac{a+b}{2}$ olur.





Yandaki çemberde $|AB| = |BC|$, $m(\overset{\frown}{AB}) = 45°$ ve $m(\widehat{ABC}) = 3x + 15°$ olduğuna göre x değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

Yandaki şekilde $|AB| = |AC|$ olduğundan

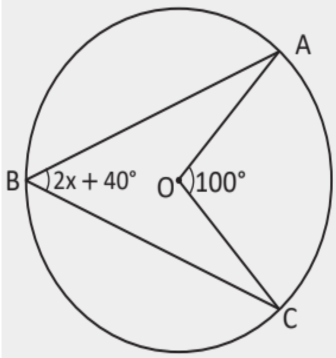
$m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{BC}) = 45°$ olur.

$m(\overset{\frown}{AC}) = 360° - (45° + 45°) = 360° - 90° = 270°$ ve

$m(\widehat{ABC}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AC})}{2} = \dfrac{270°}{2} = 135°$ olur. Buradan

$m(\widehat{ABC}) = 3x + 15° = 135° \Rightarrow 3x = 120° \Rightarrow x = 40°$ olur.

ÖRNEK:



Yandaki O merkezli çemberde $m(\widehat{AOC}) = 100°$ ve $m(\widehat{ABC}) = 2x + 40°$ olduğuna göre x in kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

Yandaki şekilde $m(\overset{\frown}{AC}) = 100°$ olur. Buradan

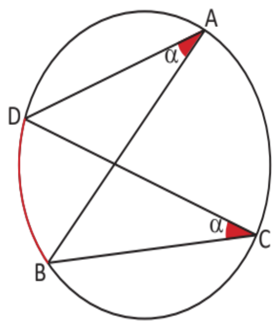
$m(\widehat{ABC}) = 2x + 40° = \dfrac{100°}{2} = 50°$ olur.

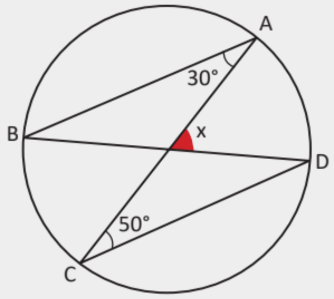
$2x + 40° = 50° \Rightarrow 2x = 10° \Rightarrow x = 5°$ olur.

Sonuç

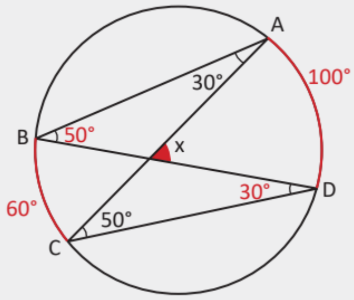
Aynı yayı gören çevre açıların ölçüleri eşittir.

Yandaki şekilde $m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{DCB})$ olur.





Yandaki çemberde $m(\widehat{BAC}) = 30°$ ve $m(\widehat{ACD}) = 50°$ olduğuna göre x değerini bulunuz.



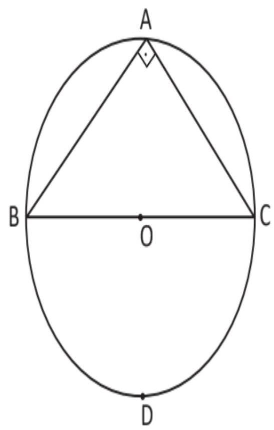
Çözüm

Yandaki çemberde BAC ve BDC çevre açıları aynı yayı görür ve bu açıların ölçüleri $\overset{\frown}{BC}$ nın ölçüsünün yarısına eşit olur. ABD ve ACD çevre açıları aynı yayı görür ve bu açıların ölçüleri $\overset{\frown}{AD}$ nın ölçüsünün yarısına eşit olur.

$m(\widehat{ABD}) = 50°$ ve $m(\widehat{BDC}) = 30°$ olduğundan

$x = 50° + 30° = 80°$ olur.

3. Bir çemberde çapı gören çevre açının ölçüsü 90° olur.

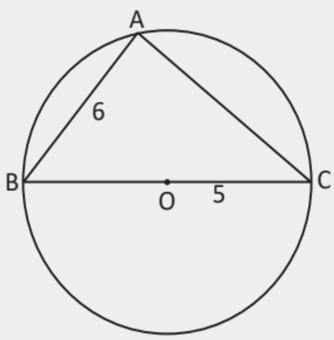


Yandaki şekilde O merkezli çemberde çapı gören çevre açı A açısıdır. A açısı BDC çember yayını görmektedir.

O, çemberin merkezi olduğu için $m(\overset{\frown}{BDC})=180°$ olur.

Buradan $m(\widehat{A}) = \frac{180°}{2} = 90°$ olur.

ÖRNEK:



Yandaki [BC] çaplı, O merkezli çemberin yarıçap uzunluğu $r = 5$ cm ve $|AB| = 6$ cm olduğuna göre AC uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

Çözüm

A çevre açısı çapı gördüğünden bu açının ölçüsü 90° olur.

$r = 5$ cm olduğundan ABC dik üçgeninde $|BC| = 10$ cm olur.

O hâlde ABC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında

$6^2 + |AC|^2 = 10^2 \Rightarrow |AC| = 8$ cm olur.

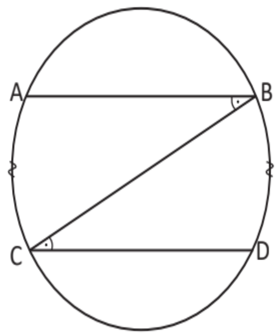
4. Bir çemberde paralel iki kirişin arasında kalan yayların ölçüleri birbirine eşittir.

[AB] // [CD] olmak üzere CBA ve DCB açıları iç ters açılar olup

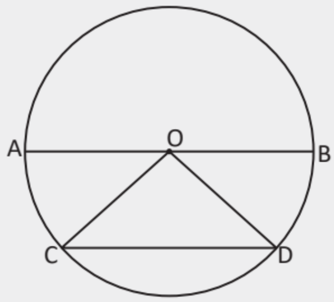
$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{BCD})$ olur.

Aynı çevre açının gördüğü yayların ölçüleri eşit olduğundan

$m(\widehat{AC}) = m(\widehat{BD})$ olur.



ÖRNEK:



Yandaki [AB] çaplı, O merkezli çemberde $m(\widehat{CD}) = 70°$ ve [AB] // [CD] olduğuna göre $m(\widehat{AOC})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

[AB] // [CD] ise $m(\widehat{CA}) = m(\widehat{DB})$ olur.

$m(\widehat{CA}) = m(\widehat{DB}) = x$ olmak üzere

$2x + 70° = 180° \Rightarrow x = 55°$ olur.

Teğet-Kiriş Açı

Köşesi çember üzerinde bulunan ve kenarlarından biri çemberin kirişi, diğeri çemberin teğeti olan açıya bu çemberin bir **teğet-kiriş açısı** denir.

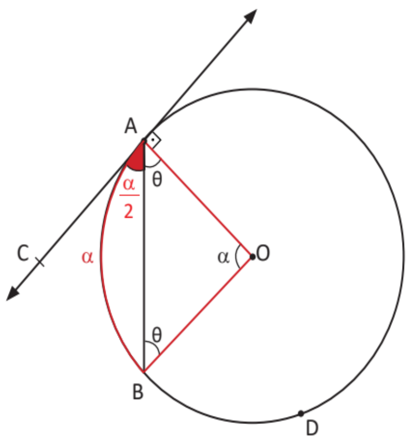
Yandaki şekilde CAB açısı çemberin bir teğet-kiriş açısıdır.
CAB açısının gördüğü yay AB yayıdır.
Çemberde OA ve OB doğru parçaları çizildiğinde OAB ikizkenar üçgeni elde edilir. [OA]⊥[AC] olur. Merkez açının ölçüsü α olsun. Bu durumda $m(\widehat{AB}) = \alpha$ olur.

$m(\widehat{BAO}) = m(\widehat{OBA}) = \theta$ olsun. Bu durumda

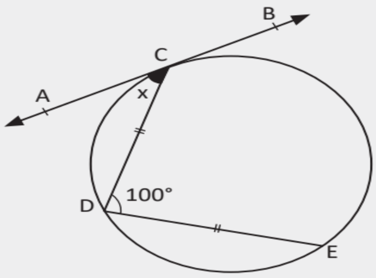
OAB üçgeninde $2\theta + \alpha = 180°$ eşitliğinin her iki yanı

2 ye bölündüğünde $\theta + \frac{\alpha}{2} = 90°$ olur. Buna göre

CAB teğet-kiriş açısının ölçüsü $m(\widehat{CAB}) = \frac{\alpha}{2}$ olur.



O hâlde **teğet-kiriş açının ölçüsü, bu açının gördüğü yay ölçüsünün yarısına eşittir.**



Yandaki şekilde AB doğrusu çembere C noktasında teğettir. $|CD| = |DE|$ ve $m(\widehat{CDE}) = 100°$ olduğuna göre $m(\widehat{ACD}) = x$ değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

ACD teğet-kiriş açının ölçüsü x derece olduğundan bu açının gördüğü CD yayının ölçüsü $m(\overset{\frown}{CD}) = 2x$ olur.

$|CD| = |DE| \Rightarrow m(\overset{\frown}{CD}) = m(\overset{\frown}{DE}) = 2x$ ve $m(\widehat{CDE}) = 100° \Rightarrow m(\overset{\frown}{CE}) = 200°$ olur.

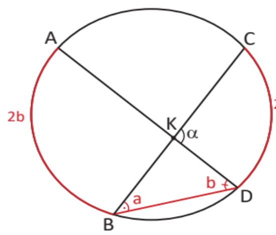
Verilen çemberde $m(\overset{\frown}{CD}) + m(\overset{\frown}{DE}) + m(\overset{\frown}{CE}) = 360°$ olduğundan

$2x + 2x + 200° = 360° \Rightarrow 4x = 160° \Rightarrow x = 40°$ olur.

İç Açı

Çemberin içinde herhangi bir noktada kesişen iki kirişin oluşturduğu açıların her birine bu çemberin bir **iç açı**sı denir.

Yandaki şekilde ölçüsü α olan DKC açısı çemberin iç açılarından biridir. DKC açısının gördüğü yaylar CD ve AB yaylarıdır.



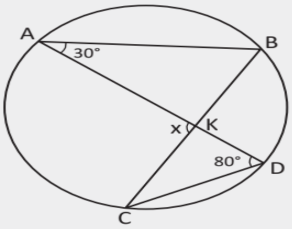
$m(\widehat{DBC}) = a$ ve $m(\widehat{ADB}) = b$ olsun. Buna göre

$m(\overset{\frown}{DC}) = 2a$ ve $m(\overset{\frown}{AB}) = 2b$ olur. Buradan

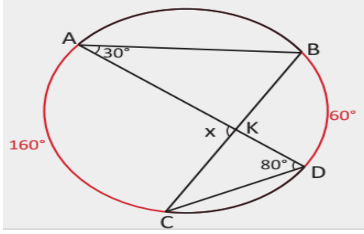
$\alpha = a + b = \dfrac{m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{CD})}{2}$ olur.

O hâlde **bir çemberde iç açının ölçüsü, bu açının gördüğü yayların ölçüleri toplamının yarısına eşittir.**

ÖRNEK:



Yandaki çemberde $[AD] \cap [BC] = \{K\}$, $m(\widehat{ADC}) = 80°$ ve $m(\widehat{BAD}) = 30°$ olduğuna göre $m(\widehat{AKC}) = x$ değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.



Çözüm

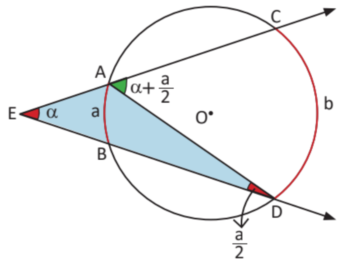
Yandaki şekilde BAD ve ADC çevre açılarının gördüğü yay ölçüleri sırasıyla $m(\overset{\frown}{BD}) = 60°$ ve $m(\overset{\frown}{AC}) = 160°$ olur.

Buradan $x = \dfrac{160° + 60°}{2} = \dfrac{220°}{2} = 110°$ olur.

Dış Açı

Bir çembere dışındaki noktadan çizilen iki kesenin, iki teğetin veya bir teğetle bir kesenin çemberin dışında oluşturduğu açıya çemberin **dış açısı** denir.

Yandaki şekilde DEC açısı bu çemberin bir dış açısıdır.
E açısının görmüş olduğu yaylar AB ve CD yaylarıdır.
A ve D noktaları birleştirilirse AB yayını gören çevre açı elde edilir.



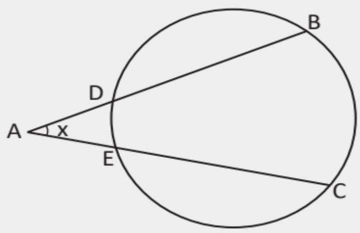
$m(\overset{\frown}{CED}) = \alpha$, $m(\overset{\frown}{AB}) = a$ ve $m(\overset{\frown}{CD}) = b$ olsun. $m(\overset{\frown}{AB}) = a$ olduğundan $m(\overset{\frown}{BDA}) = \frac{a}{2}$ olur.

AED üçgeninde $m(\overset{\frown}{CAD}) = \alpha + \frac{a}{2}$ olur. $\overset{\frown}{CAD}$ çevre açı olduğundan gördüğü yayın yarısına eşittir.

Buradan $\alpha + \frac{a}{2} = \frac{b}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{b-a}{2}$ olur.

Bir dış açının ölçüsü, gördüğü yaylardan büyük olan açı ile küçük olan açının ölçüsünün farkının yarısına eşittir.

ÖRNEK:



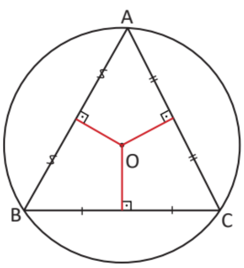
Yandaki çemberde $m(\overset{\frown}{DE}) = 30°$ ve $m(\overset{\frown}{BC}) = 80°$ olduğuna göre $m(\overset{\frown}{BAC}) = x$ değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

BAC açısı bir dış açı olup ölçüsü gördüğü BC ve DE yaylarının ölçüleri farkının yarısıdır.

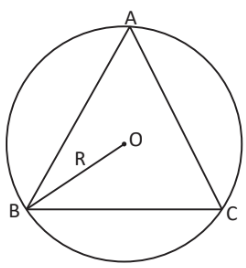
$$x = \frac{m(\overset{\frown}{BC}) - m(\overset{\frown}{DE})}{2} = \frac{80° - 30°}{2} = 25° \text{ olur.}$$

Çevrel Çember ve Sinüs Teoremi

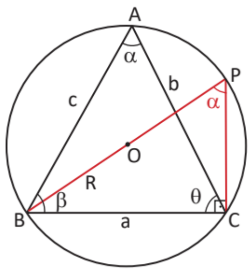


Bir üçgenin köşelerinden geçen çembere **üçgenin çevrel çemberi** denir. Yanda verilen ABC üçgeninin kenar orta dikmelerinin kesim noktası O olsun. Bu durumda |AO| = |BO| = |CO| olduğundan O, çevrel çemberin merkezidir.

Bir üçgenin kenar orta dikmeleri çevrel çemberin merkezinden geçer.



Yandaki şekilde O merkezli ve R yarıçaplı çember, ABC üçgeninin çevrel çemberidir. Çevrel çemberin yarıçapı R ile gösterilsin. Üçgenin kenarları, iç açıları ve çevrel çemberinin yarıçapı (R) arasındaki ilişki (sinüs teoremi) aşağıdaki gibi olur.



$m(\widehat{A}) = \alpha$, $m(\widehat{B}) = \beta$, $m(\widehat{C}) = \theta$; $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$ olsun.
Çember üzerinde bir P noktası alındığında [BP] kenarı merkezden geçen PCB üçgeni yandaki gibi çizilir. [BP] çap olduğundan $m(\widehat{PCB}) = 90°$ olur.
A ile P açıları aynı yayı gördüğünden $m(\widehat{A}) = m(\widehat{P}) = \alpha$ olur.
PCB dik üçgeninde

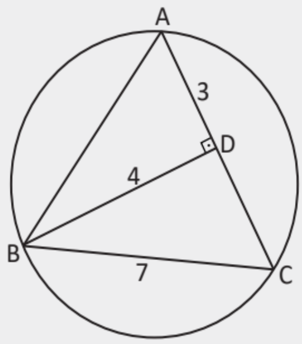
$\sin\alpha = \dfrac{a}{2R} \Rightarrow 2R = \dfrac{a}{\sin\alpha}$ olur.

Benzer şekilde

$2R = \dfrac{b}{\sin\beta}$ ve $2R = \dfrac{c}{\sin\theta}$ eşitlikleri yazılır. Buradan

$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\theta} = 2R$ veya $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R$ elde edilir.

ÖRNEK:



Köşeleri çember üzerinde bulunan yandaki ABC üçgeninde $[BD] \perp [AC]$, $|BD| = 4$ cm, $|AD| = 3$ cm ve $|BC| = 7$ cm olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

Çözüm

ABD dik üçgeni 3-4-5 özel üçgeni olduğundan
$|AB| = 5$ cm olur.

ABC üçgeninde sinüs teoremi uygulandığında

$\dfrac{a}{\sin(\widehat{A})} = 2R \Rightarrow \dfrac{7}{\sin(\widehat{A})} = 2R$ olur.

ABD üçgeninde $\sin(\widehat{A}) = \dfrac{4}{5}$ olduğundan

$\dfrac{7}{\frac{4}{5}} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{35}{8}$ cm olur.