Analytická geometrie

Vzdálenost bodu od přímky

Žán Pól Kastról

6. března 2022

Ukážeme si dva způsoby odvození vztahu pro vzdálenost bodu od přímky – odvození *planimetrické* a odvození pomocí *skalárního součinu*.

1 Odvození planimetrické

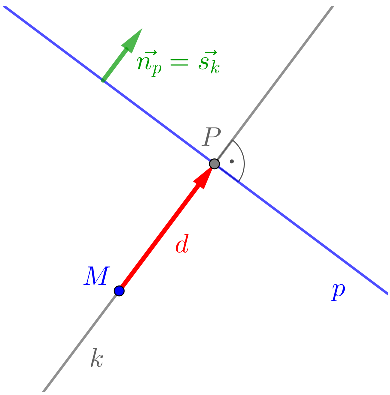
1.1 Číselně

Příklad 1

Je dána přímka $p: 3x + 4y - 12 = 0$ a bod $M[-14; 1]$. Urči vzdálenost d bodu M od přímky p.

Postup je stejný jako v planimetrii (viz obr.1):

- Z bodu M spustíme kolmici k na přímku p.
- Najdeme patu kolmice P.
- Vzdálenost d je rovna velikosti vektoru $P - M$.



Obr. 1

Kolmice k: Normálový vektor $\vec{n_p}$ přímky p je současně směrovým vektorem $\vec{s_k}$ kolmice k:

$$\vec{n_p} = \vec{s_k} = (3; 4)$$

Proto $\mathcal{PAROP}$ kolmice k je:

$$x = -14 + 3t \tag{1}$$
$$y = 1 + 4t \tag{2}$$

Pata kolmice P: Pata kolmice P leží na k, takže má souřadnice dané rovnicemi (1) a (2):

$$P[-14 + 3t; 1 + 4t] \tag{3}$$

Potřebujeme zjistit neznámý parametr t bodu P. Bod P leží současně na přímce p, proto jeho souřadnice (3) dosadíme do rovnice přímky p a řešíme rovnici s neznámou t:

$$\begin{aligned} 3(-14 + 3t) + 4(1 + 4t) - 12 &= 0 \\ -42 + 9t + 4 + 16t - 12 &= 0 \\ 25t &= 50 \end{aligned}$$

Odtud máme parametr paty kolmice P:

$$\boxed{t = 2}$$

Ten dosadíme do (3) a máme patu:

$$P[-8; 9]$$

Vektor $P - M$: Vektor $P - M$ má souřadnice $(6; 8)$. Jeho velikost je $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$, takže pro vzdálenost bodu M od přímky p dostáváme:

$$\boxed{d = 10}$$

Nyní náš postup zobecníme:

1.2 Obecně

Příklad 2

Je dána přímka $p : ax + by + c = 0$ a bod $M[x_M; y_M]$. Urči vzdálenost d bodu M od přímky p.

Kolmice k: Normálový vektor $\vec{n_p}$ přímky p je současně směrovým vektorem $\vec{s_k}$ kolmice k:

$$\vec{n_p} = \vec{s_k} = (a; b)$$

Proto $\mathcal{PAROP}$ kolmice k je:

$$x = x_M + at \tag{4}$$

$$y = y_M + bt \tag{5}$$

Pata kolmice P: Pata kolmice P leží na k, takže má souřadnice dané rovnicemi (4) a (5):

$$P[x_M + at; y_M + bt] \tag{6}$$

Potřebujeme zjistit neznámý parametr t bodu P. Bod P leží současně na přímce p, proto jeho souřadnice (6) dosadíme do rovnice přímky p a řešíme rovnici s neznámou t:

$$a(x_M + at) + b(y_M + bt) + c = 0$$

$$ax_M + a^2t + by_M + b^2t + c = 0$$

$$t(a^2 + b^2) = -(ax_M + by_M + c)$$

Odtud máme parametr paty kolmice P:

$$\boxed{t = -\frac{ax_M + by_M + c}{a^2 + b^2}} \tag{7}$$

Nebudeme ho však zatím (na rozdíl od číselného řešení výše) kvůli přehlednosti dosazovat do (6), ale vyjádříme nejprve vektor $P - M$, jehož velikost je hledanou vzdáleností d.

Vektor $P - M$: Pač bod M má souřadnice $M[x_M; y_M]$ a bod P má souřadnice (6), platí:

$$P - M = (at; bt) = t \cdot (a; b)$$

Odtud

$$d = |P - M| = |t|\sqrt{a^2 + b^2}$$

Sem dosadíme (7) a dostáváme

$$d = \frac{|ax_M + by_M + c|}{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$$

Nyní si stačí uvědomit, že platí

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

a máme výsledek

$$\boxed{d = \frac{|a \cdot x_M + b \cdot y_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}} \tag{8}$$

1.3 Rozbor vztahu pro d

Vztah (8) se dobře pamatuje:

- V čitateli je v **absolutní hodnotě** (vzdálenost musí být nezáporná) vlastně **levá strana obecné rovnice** přímky p, do níž jsme dosadili souřadnice bodu M.
- Ve jmenovateli je **velikost normálového vektoru** přímky p

To není vše. Vzpomeňme si na úvahy o rovnici *poloroviny*. Přímka p dělí rovinu na dvě poloroviny.

Když dosadíme do levé strany rovnice přímky bod, který na ní **leží**, dostaneme **nulu** (odborně řečeno „prd“ čili tzv. „hovno“).

Pokud však dosadíme bod, který na ní **neleží**, dostaneme **nenulové číslo**, které je pro všechny body jedné poloroviny **kladné** a pro body poloroviny opačné **záporné**.

Vidíme, že toto číslo máme v abs. hodnotě právě v čitateli a pokud si vybereme jednotkový normálový vektor, vyjadřuje abs. hodnota tohoto čísla přímo vzdálenost bodu M od přímky p.

2 Odvození pomocí skalárního součinu

Připomeňme si nejprve méně známé odvození obecné rovnice přímky ($\mathcal{OROP}$) pomocí skalárního součinu ($\mathcal{OROP}$ se odvozuje častěji vyloučením parametru z parametrického vyjádření), protože pro nás bude inspirací pro odvození vztahu (8).

2.1 Odvození $\mathcal{OROP}$ pomocí skalárního součinu

Čummež na obr.2, kde máme přímku p, která je jednoznačně určena bodem $A[x_A; y_A]$ a normálovým vektorem $\vec{n} = (a; b)$. V obrázku je vyznačen *libovolný* bod X přímky p a dále *libovolný* bod X, který na přímce p neleží.

Pro libovolný bod X přímky p zřejmě platí:

a) $(X \in p \wedge X \neq A) \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{AX} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} = 0$

b) $X = A \Rightarrow \overrightarrow{AX} = \vec{0} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} = 0$

Z a) a b) plyne:

$$X \in p \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} = 0 \tag{9}$$

Pro libovolný bod X, který neleží na p, zřejmě platí:

$$X \notin p \Rightarrow \vec{n} \not\perp \overrightarrow{AX} \quad \text{neboli obměnou} \quad \vec{n} \perp \overrightarrow{AX} \Rightarrow X \in p$$

Vyjádřeno skalárním součinem tedy

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} = 0 \Rightarrow X \in p \tag{10}$$

Sloučením (9) a (10) dostáváme:

$$\boxed{X \in p \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} = 0} \tag{11}$$

Vztah (11) nám zaručuje, že množina všech bodů X přímky p je **přesně rovna** množině všech bodů X, které splňují rovnost

$$\boxed{\vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} = 0} \tag{12}$$

Nyní stačí vztah (12) ekvivalentně upravit a dostaneme hladce $\mathcal{OROP}$.

$$\begin{aligned} (a;b) \cdot (X - A) &= 0 \\ (a;b) \cdot (x - x_A; y - y_A) &= 0 \end{aligned}$$

Odtud dostáváme zajímavý tvar $\mathcal{OROP}$:

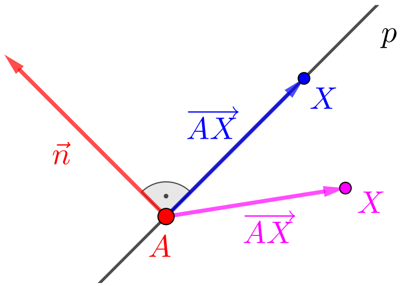
$$\boxed{a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0} \tag{13}$$

Připomíná středovou rovnici kružnice (elipsy či hyperboly, či vrcholovou rovnici paraboly), jejíž střed jsme posunuli z počátku $O[0;0]$ do bodu $A[x_A; y_A]$ (viz obr.3). Roznásobením závor dostáváme

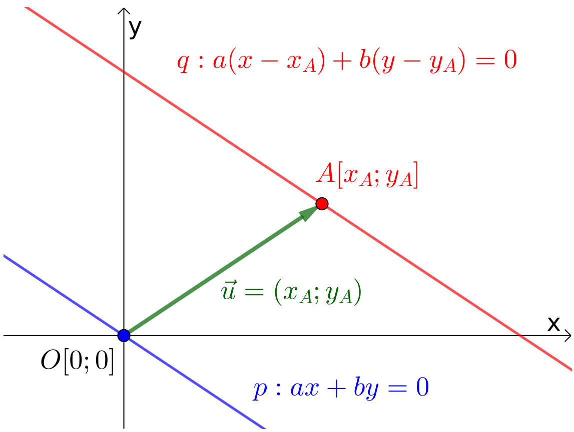
$$\begin{aligned} ax - ax_A + by - by_A &= 0 \\ ax + by + \underbrace{(-ax_A - by_A)}_{c} &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Označíme

$$\boxed{-ax_A - by_A = c} \tag{15}$$



Obr. 2: K odvození $\mathcal{OROP}$ pomocí skalárního součinu



Obr. 3: „Středový“ tvar $\mathcal{OROP}$

A máme klasickou $\mathcal{OROP}$:

$$\boxed{ax + by + c = 0} \tag{16}$$

Zajímavý tvar dostaneme, když v (14) převedeme závoru na pravou stranu:

$$\boxed{ax + by = ax_A + by_A} \tag{17}$$

Toto je jeden z tvarů, které se používají pro rovnice přímky v GeoGebře.

Na levé straně máme skalární součin normálového vektoru $(a; b)$ a polohového vektoru $(x; y)$ libovolně vybraného bodu $X[x; y]$ přímky p.

Na pravé straně je skalární součin normálového vektoru $(a; b)$ a polohového vektoru $(x_A; y_A)$ bodu $A[x_A; y_A]$. Rovnici (17) můžeme tedy psát ve tvaru

$$\boxed{\vec{n} \cdot \vec{X} = \vec{n} \cdot \vec{X_A}} \tag{18}$$

2.2 Odvození d pomocí skalárního součinu

Máme přímku p s normálovým vektorem $\vec{n}$ a její bod A. Víme, že pro každý bod v rovině platí ekvivalence (11).

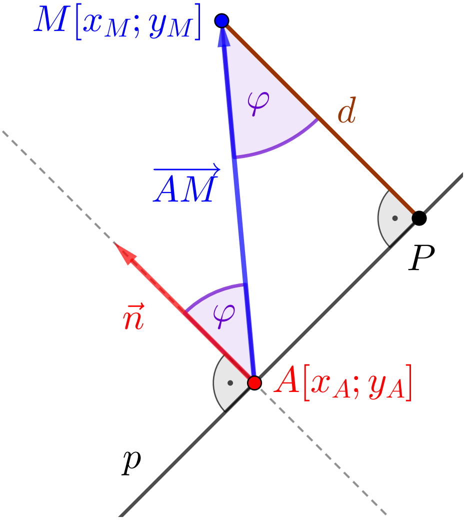
Nyní vezmeme bod $M[x_M; y_M]$, který na p neleží (obr.4), takže pro něj zřejmě platí

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} \neq 0$$

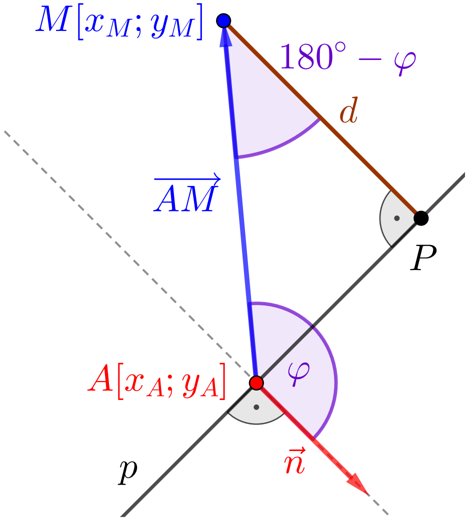
Víme, že tento skalární součin lze vyjádřit takto:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos\varphi \tag{19}$$

kde φ je úhel mezi $\vec{n}$ a $\overrightarrow{AM}$. V obrázku 4 může $\vec{n}$ mířit do stejné poloroviny, v níž leží M (obr.4a) nebo do poloroviny opačné (obr.4b).



(a) $d = |\overrightarrow{AM}| \cos\varphi$



(b) $d = -|\overrightarrow{AM}| \cos\varphi$

Obr. 4: $M \notin p \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} \neq 0$

Vzdálenost d bodu M od přímky p je velikost odvěsny v trojúhelníku APM. Zřejmě platí (obr.4a)

$$d = |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos\varphi$$

nebo (obr.4b)

$$d = |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos(180° - \varphi) = -|\overrightarrow{AM}| \cdot \cos\varphi$$

Tedy stručně:

$$d = \pm|\overrightarrow{AM}| \cdot \cos\varphi \tag{20}$$

Z (19) dostáváme

$$|\overrightarrow{AM}| \cdot \cos\varphi = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}}{|\vec{n}|}$$

A po dosazení do (20) máme

$$d = \pm\frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}}{|\vec{n}|} \tag{21}$$

Tedy

$$\boxed{d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}|}{|\vec{n}|}} \tag{22}$$

A jsme doma, zbytek už je πsof kejk!

$$\begin{aligned}
\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} &= (a; b) \cdot (M - A) \\
&= (a; b) \cdot (x_M - x_A; y_M - y_A) \\
&= a(x_M - x_A) + b(y_M - y_A) \\
&= ax_M + by_M + \underbrace{(-ax_A - by_A)}_{\text{dle (15) je toto } c} \\
&= ax_M + by_M + c
\end{aligned}$$

A tak dostáváme finální vztah

$$\boxed{d = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}} \tag{23}$$

$\triangle$

Da Sista Les

∞

.